高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：96.09.17					
範圍	1-1 整數(2)	班級		姓名	
		座號			

一、選擇題 (每題 5 分)

1、(D) 計算 $\gcd(4^2\times6\times9^2\times11^2,\ 6^2\times11\times15\times33)=$

(A)1 (B) 6×11 (C) $2^2\times3^3\times11$ (D) $2^2\times3^4\times11^2$ (E) $2^5\times3^5\times5\times11^2$

解析：$4^2\times6\times9^2\times11^2=2^5\times3^5\times11^2$

$6^2\times11\times15\times33=2^2\times3^4\times5\times11^2$

2、(E) 下列那一個是質數？ (A)153 (B)143 (C)133 (D)123 (E)113

解析：(A)（╳）：$153=3\times51$。

(B)（╳）：$143=11\times13$。

(C)（╳）：$133=7\times19$。

(D)（╳）：$123=3\times41$。

(E)（○）。

故答案為(E)。

3、(BCD) (複選)下列各數何者為 9 的倍數？

(A)23574891 (B)12^{12} (C)612×372 (D)270^3-171^3 (E)$10^{100}+1$

解析：(A)（╳）：$2+3+5+7+4+8+9+1=39$ 不為 9 的倍數。

(B)（○）：$12^{12}=12^2\times12^{10}=(2^2\times3)^2\times12^{10}=9\times2^4\times12^{10}$。

(C)（○）：$612\times372=9\times68\times372$。

(D)（○）：$270^3-171^3=(270-171)(270^2+270\times171+171^2)$

$=99\times(270^2+270\times171+171^2)$

$=9\times11\times(270^2+270\times171+171^2)$。

(E)（╳）：$10^{100}+1$的數字和為 2，不為 9 的倍數。

故答案為(B)(C)(D)。

二、填充題 (每題 10 分)

1、$\overline{1ab77}$ 為 99 之倍數，則序對 $(a,b)=$___________。

答案：(2,1)

解析：

$99=9\times11$

$9\mid 1ab77\Rightarrow 9\mid 1+a+b+7+7=a+b+15\Rightarrow a+b=3,12$

$11\mid 1ab77\Rightarrow 11\mid 1-a+b-7+7=-a+b+1\Rightarrow -a+b=-1$

其中 $\begin{cases}a+b=12\\-a+b=-1\end{cases}$(不合)$\Rightarrow\begin{cases}a+b=3\\-a+b=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\b=1\end{cases}$

2、設 $a,b,c\in\mathbb{N}$且 $a:b:c=8:12:9$，又 $\gcd(a,b,c)+\operatorname{lcm}(a,b,c)=803$，則 $\gcd(a,b,c)=$______，又 $a=$______。

答案：11,88

解析：

$a=8k,\ b=12k,\ c=9k$

$$\begin{array}{r|l}
k & 8k \quad 12k \quad 9k \\ \hline
4 & 8 \quad 12 \quad 9 \\ \hline
3 & 2 \quad 3 \quad 9 \\ \hline
 & 2 \quad 1 \quad 3
\end{array}$$

$\therefore \gcd(a,b,c) = k$；$\operatorname{lcm}(a,b,c) = 72k \Rightarrow k + 72k = 803$， $\therefore k = 11$，故 $a = 8 \times 11 = 88$

3、設 $a \in \mathbb{N}$，若以 a 分別除 1112, 2139, 3956 所得的餘數都爲相同正整數，則 $a =$______，又其餘數 $r =$______。

答案：79,6

解析：

$\because$ 餘數均相同 $\therefore a \mid 2139 - 1112$ 且 $a \mid 3956 - 2139 \therefore a \mid 1027$ 、 $a \mid 1817$

$\because a \mid (1027,1817) \Rightarrow a \mid 79$，即 $a = 1$ 或 79，$\because a = 1$ 不合，$\therefore a = 79$

$1112 \div 79 = 14 \cdots\cdots 6 \quad \therefore r = 6$

4、設 $a,b \in \mathbb{N}$ 且滿足 $ab - 8a - 2b = -29$，則 $a + b =$______。

答案：22

解析：

原式 $\Rightarrow a(b-8) - 2(b-8) = -29 + 16 \Rightarrow \therefore (a-2)(b-8) = -13$

$\therefore \begin{cases} a-2=-1 \\ b-8=13 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a-2=13 \\ b-8=-1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a-2=1 \\ b-8=-13 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a-2=-13 \\ b-8=1 \end{cases}$

（不合）（不合）

$\therefore \begin{cases} a=1 \\ b=21 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a=15 \\ b=7 \end{cases}$，$\therefore a + b = 22$。

5、有 280 個梨子均分給若干個兒童，最後剩下 16 個；除此之外，另有 880 個蘋果也是均分給這些兒童，最後剩下 22 個，試問兒童有____________人。

答案：33 或 66

解析：

設兒童有 x 人（$x > 22$ 大於餘數）

$(280-16)$ 被 x 整除 $\Rightarrow x \mid 264$

$(880-22)$ 被 x 整除 $\Rightarrow x \mid 858$

$\therefore x$ 是 264,858 之公因數。既爲 264, 858 之最大公因數的因數

$$\begin{array}{r|r|r|l}
4 & 264 & 858 & 3 \\
 & 264 & 792 & \\ \hline
 & 0 & 66 &
\end{array}$$

$\therefore \gcd(264, 858) = 66$

又 $x \mid 66$ 且 $x > 22$，$\therefore x = 33$ 或 66，故兒童有 33 或 66 人。

6、設 n 爲自然數，且 $n \le 200$，若 $(n, 36) = 6$ 則合於條件之 n 值共______個。

答案：11

解析：

$n \in \mathbb{N},\ n \le 200,\ (n,\ 36) = 6$，令 $n = 6k \Rightarrow (k,\ 6) = 1$ 且 $n \le 200$

$1 \le k \le 33, \qquad 33-16-11+5=11$

7、設 $a,b \in \mathbb{N}$ 且已知 $\dfrac{a-68}{b-85}=\dfrac{a}{b},(a,b)=6$，試求 $a=$______, $b=$______。

答案：24 ; 30

解析：

$$\frac{a-68}{b-85}=\frac{a}{b} \Rightarrow \cancel{ab}-68b=\cancel{ab}-85a \Rightarrow a:b=(-68):(-85)=4:5$$

令 $\begin{cases} a=4k \\ b=5k \end{cases}, k \in \mathbb{N}$，又 $(a,b)=k=6$，$\therefore a=24, b=30$。

8、設 $a,b\in\mathbb{N}$且 $a>b,\ a+b=1606$, $\operatorname{lcm}(a,b)=2628$ 則 $\gcd(a,b)=$______，又 $a=$ ______。

答案：146,1314

解析：

設 $\gcd(a,b)=d,\ a=dh,\ b=dk,$

$\begin{cases} d(h+k)=1606 \\ dhk=2628 \end{cases}$，$\gcd(h,k)=1 \Rightarrow \gcd(h+k,hk)=1$

$d=\gcd(1606,2628)=146 \quad \Rightarrow h+k=11,\ hk=18$ 又 $h>k \quad \therefore h=9,\ k=2$

$\therefore a=9\times146=1314$

9、設 a, b 爲兩正整數，且 $40<a<b$，又 $\gcd(a, b)=31$，$\operatorname{lcm}(a, b)=1488$，則 $a=$ ______, b = ______。

答案：93, 496

解析：

$40<a<b$

$a=31\times h,\ b=31\times k$ 且 $\gcd(h,k)=1$

$\because \operatorname{lcm}(a,b)=1488=31\times h\times k \quad \therefore hk=48$

$\therefore h=1,k=48$ (不合) $h=3,\ k=16 \quad \therefore a=93,\ b=496$

10、利用輾轉相除法求 $\gcd(3818,4316)=$______。

答案：166

解析：

7	3818	4316	1
	3486	3818	
2	332	498	1
	332	332	
	0	166	

11、用輾轉相除法找一組整數 x, y 使 $(1616, 2121)=1616x+2121y$ 則序對 $(x, y)=$_______。

答案：$(4,-3)$

解析：

a	1616	2121	b
$-3a+3b$	1515	1616	a
$4a-3b$	101	505	$-a+b$
		505	
		0	

$\therefore\quad (1616，2121)=101$

$101=1616\times 4+2121\times(-3)$，$\therefore\quad (x，y)=(4，-3)$

12、$2^{20}-1$與$2^{19}+1$的最大公因數爲______。

答案：3

解析：

設最大公因數爲 d，則

$d\,|\,2^{20}-1,\ d\,|\,2^{19}+1 \Rightarrow d\,|\,(2^{19}+1)\cdot 2-(2^{20}-1)\times 1 \Rightarrow d\,|\,3 \Rightarrow d=1$ 或 3

$\because 2^{20}-1=(2^2)^{10}-1=4^{10}-1=(4-1)(4^9+4^8+\cdots+1)=3\times(4^9+\cdots+1)$

$2^{19}+1=(2+1)(2^{18}-2^{17}+\cdots+1)=3\times(2^{18}-\cdots+1)$

$\therefore$有公因數 3，且最大公因數爲 3

13、韓信點兵，兵不滿一萬人，每 6 人一數，7 人一數，9 人一數，都餘 1 人，則士兵最多有______人。

答案：9955

解析：

設士兵 x 人, $6|x-1,\ 7|x-1,\ 9|x-1$，$\therefore x-1$ 爲 $\operatorname{lcm}(6,7,9)$的倍數，

$\therefore x-1=126k$ ，取$k=79$ 得 $x=9955$

14、設 $a,b,q_1,q_2,q_3\in\mathbb{N}$ 且滿足$\begin{cases} a=bq_1+4098 \\ b=4098q_2+582 \\ 4098=582q_3+24 \end{cases}$，求 a,b 的最大公因數爲______。

答案：6

解析：$(a,b)=(b,4098)=(4098,582)=(582,24)=6$

$$\begin{array}{r|rr} 2 & 582 & 24 \\ \hline 3 & 291 & 12 \\ \hline & 97 & 4 \end{array}$$

15、我國陰曆以天干「甲、乙、丙、丁、戊、己、庚、辛、壬、癸」，地支「子、丑、寅、卯、辰、巳、午、未、申、酉、戌、亥」紀年，即甲子、乙丑、丙寅、丁卯、……、癸酉、甲戌、乙亥、……、癸未、甲申、……。譬如西元 2001 年就是「辛巳」年。問

(1) 一週期__________年。（俗稱 60 年爲一甲子）

(2)西元 3000 年陰曆紀年是甚麼年？___________

(3)離西元 2001 年最近的「丙辰」年是西元幾年？____________

答案：(1)60　(2) 庚申　(3) 1976

$\boxed{\text{解析}}$：(1)天干每 10 年一輪，地支每 12 年一輪，10 和 12 的最小公倍數爲 60，所以每 60 年爲一周期。

(2)編號天干從 1 到 10，地支編號從 1 到 12 逐，西元 2001 年的「辛巳」就是(8, 6)。

$3000-2001=999$。西元 3000 年的陰曆紀元就是

$(8+999,6+999)=(1007,1005)=(10\times100+7,12\times83+9)=(7,9)=$「庚申」。

(3)設 x 年後爲「丙辰」年，即(3, 5)年，而 2001 年是(8, 6)年。

所以 $8+x=10a+3, 6+x=12b+5$。$x=10a-5=12b-1$。

又 $5a-6b=2, a=\dfrac{6b+2}{5}=b+\dfrac{b+2}{5}$。

❶取 $b=3$，得 $x=12\times3-1=35$,即 35 年後 $2001+35=2036$ 是丙辰年。

❷取 $b=-2$，$x=12\times(-2)-1=-25$,即 25 年前 $2001-25=1976$ 也是丙辰年。

最近的年份是 1976。