

範圍	1-1 整數(1)	班級		姓名	
		座號		姓名	

一、選擇題 (每題 5 分)

1、(D) 試問有多少個正整數 n 使得 $\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \dots + \frac{10}{n}$ 為整數？

(A)1 個 (B)2 個 (C)3 個 (D)4 個 (E)5 個

解析：令 $\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \dots + \frac{10}{n} = P \Rightarrow \frac{1+2+\dots+10}{n} = P \Rightarrow \frac{55}{n} = P \Rightarrow 55 = nP$
 $n \in$ 正整數， $P \in$ 整數，所以 $n \mid 55$ ，則 $n=1,5,11,55$ 。

2、(C) 試問整數 43659 共有多少個不同的質因數？

(A)1 個 (B)2 個 (C)3 個 (D)4 個 (E)5 個

解析：

$$\begin{array}{r} 9 \overline{) 43659} \\ 9 \overline{) 4851} \\ 7 \overline{) 539} \\ 7 \overline{) 77} \\ 11 \end{array}$$

$\Rightarrow 43659 = 3^4 \cdot 7^2 \cdot 11 \Rightarrow$ 質因數有 3, 7, 11 三個。

3、(D) 下列何者是 2^{100} 除以 10 的餘數？ (A)0 (B)2 (C)4 (D)6 (E)8

解析：

觀察個位數： $2^1 \div 10$ 餘 2
 $2^2 \div 10$ 餘 4
 $2^3 \div 10$ 餘 8
 $2^4 \div 10$ 餘 6
 $2^5 \div 10$ 餘 2
 $2^6 \div 10$ 餘 4

每四次為一循環，又 $2^{100} = (2^4)^{25} \therefore$ 餘數為 6

4、(AB) (複選) 若六位數 $92a92b$ 可被 9 整除，則 $a+b$ 之值可能為

(A)5 (B)14 (C)23 (D)32 (E)41

解析：

六位數 $92a92b$ 可被 9 整除既數字加起來是 9 的倍數，即 $9+2+a+9+2+b=27$ 或 36 ， $a+b=5$ 或 14 。

5、(B) 在 230 與 240 之間共有多少個質數？ (A)1 個 (B)2 個 (C)3 個 (D)4 個 (E)5 個

解析：

231, ..., 239 中去掉 2 與 5 的倍數，在扣掉 3 的倍數 231, 237，剩下 233 與 239

比 $\sqrt{233}$ 與 $\sqrt{239}$ 小的質數有 2, 3, 5, 7, 11, 13 均不為 233 與 239 的因數
 \therefore 233 與 239 均為質數。

6、(BC/E) (複選) 下列那些數是 9 的倍數?

(A) 21478092 (B) 3^{22} (C) $43^3 + 11^3$ (D) $10^9 + 1$ (E) 345×813

解析：

$$43^3 + 11^3 = (43+11)(43^2 - 43 \times 11 + 11^2) = 54 \times p; 3|345, 3|813; \therefore 9|345 \times 813$$

7、(BC/E) (複選) 古代的足球運動，有一種計分法，規定踢進一球得 16 分，犯規後的罰踢，進一球得 6 分。請問下列那些得分數有可能在計分板上出現？

(A) 26 (B) 28 (C) 82 (D) 103 (E) 284

解析：設踢進 x 球，罰踢 y 球， x, y 為 0 或正整數，得分為 $16x + 6y = 2(8x + 3y)$

則(1) 得分必為偶數

(2) 令 $y = 0 \Rightarrow$ 得分為 16 的倍數。

(3) 令 $x = 0 \Rightarrow$ 得分為 6 的倍數。

(4) 其他狀況請代值。(由小而大，從 x 先討論)

x	1	1	1
y	2	11	48
$16x + 6y$	28	82	284

二、填充題 (每題 10 分)

1、設正整數 m, n ，有 $m > 1$ 且 $m | 21n + 5, m | 7n + 3$ 則 m 之值為_____。

答案：2, 4

解析： $m | 21n + 5, m | 7n + 3 \Rightarrow m | (21n + 5) - 3(7n + 3) \Rightarrow m | 4$

$$\therefore m = 2, 4 (\because m > 1, m \in \mathbb{N})$$

2、將下列各數分解為標準分解式

(1) $6435 =$ _____, (2) $9936 =$ _____。

答案： $3^2 \times 5 \times 11 \times 13, 2^4 \times 3^3 \times 23$

3、設 $n = 2^7 \times 3^4 \times 5^3$ 的正因數個數有_____個，又其因數總和為_____。

答案：160, 0

解析：正因數個數 $(7+1) \times (4+1) \times (3+1) = 160$ 個；因數成對一正一負兩兩和為 0 \Rightarrow 總和為 0

4、設 $x = 3600$ ，則 x 的正因數中

(1) 為完全平方數的有_____個，其和為_____。

(2) 為 4 的倍數而非 25 的倍數者共有_____個。

答案：(1) 12 ; 5460 (2) 2184

解析： $x = 3600 = 2^4 \times 3^2 \times 5^2$

(1) 完全平方數有 $2^0 3^0 5^0$

$$2^2 3^2 5^2$$

$$2^4$$

∴有 $3 \times 2 \times 2 = 12$ (個)。

總和 = $(2^0 + 2^2 + 2^4)(3^0 + 3^2)(5^0 + 5^2) = 5460$ 。

(2) $3600 = 2^4 \times 3^2 \times 5^2 = 2^2(2^2 \times 3^2 \times 5^1)5$ 的正因數中合乎條件的共 $3 \times 3 \times 2 = 18$ 個。

其和 = $(2^2 + 2^3 + 2^4) \times (3^0 + 3^1 + 3^2) \times (5^0 + 5^1) = 2184$

5、設 $n \in \mathbb{N}$ 且 $\frac{3n+17}{2n-3} \in \mathbb{N}$ ，求 $n =$ _____。

答案：2 或 23

解析：∵ $\frac{2n-3}{2n-3} | \frac{2n-3}{2n-3} \Rightarrow 2n-3 | 2(3n+17) - 3(2n-3) = 43$

∴ $2n-3 = 1$ 或 43 ∴ $n = 2$ 或 23 (代入皆合)。

6、設 a 為一整數。若 $a | (a+8), (a-1) | (a+11), (a-4) | (3a+6)$ ，試求 a 之值 _____。

答案： $a = 2, -2$

解析：由 $a | (a+8)$ ，知 $a | (a+8) - a$ ，即 $a | 8$ ， a 值有： $a = 1, -1, 2, -2, 4, -4, 8, -8 \dots \dots$ ①

將①代入 $(a-1) | (a+11)$ 中檢驗， $a = -1, 2, -2, 4 \dots \dots$ ②

將②代入 $(a-4) | (3a+6)$ 中檢驗， $a = 2, -2 \dots \dots$ ③

故 $a = 2$ 或 $a = -2$ 。

7、試求小於 143 而與 143 互質的正整數之個數為 _____ 個。

答案：120

解析：從 1 到 143 的整數中去除「與 143 不互質的整數」。

1 到 143 的整數共有 143 個。又 $143 = 11 \times 13$ ，所以「與 143 不互質的整數」必為 11 的倍數或 13 的倍數。

11 的倍數共有 $11 \times 1, 11 \times 2, \dots, 11 \times 13$ 等 13 個。

13 的倍數共有 $13 \times 1, 13 \times 2, \dots, 13 \times 11$ 等 11 個。

而 $11 \times 13 = 13 \times 11 = 143$ 重複。

故「小於 143 而與 143 互質的正整數之個數」 = $143 - (13 + 11 - 1) = 120$

8、設 x 為正整數，且 $\sqrt{x^2+12}$ 亦為正整數，求 $x =$ _____。

答案：2

解析：令 $p = \sqrt{x^2+12} \Rightarrow p^2 - x^2 = 12$

$(p+x)(p-x) = 12$ 且 $p+x > p-x$

$12 = 12 \times 1 = 6 \times 2 = 4 \times 3 \Rightarrow \begin{cases} p+x=12 \\ p-x=1 \end{cases}, \begin{cases} p+x=4 \\ p-x=3 \end{cases}, (\text{不合}) \Rightarrow \begin{cases} p+x=6 \\ p-x=2 \end{cases}, \Rightarrow p=4, x=2$