高雄市明誠中學 高三數學平時測驗 日期：96.05.22					
範圍	Book4 All	班級	普三 班	姓名	
		座號			

一、選擇題

1. 以 $F(0，1)$爲焦點，以 $L：y=-1$ 爲準線的拋物線的方程式爲何？
   (A) $y^2=4x$ (B) $y^2=-4x$ (C) $x^2=4y$ (D) $x^2=-4y$ (E) $y=x^2$

【解答】(C)

【詳解】

焦點 $F(0，1)$，準線 $L：y=-1$ $\Rightarrow$ 對稱軸方程式爲 $x=0$

$4|c|=4\times 1=4$，頂點$(0，0)$，由標準式得拋物線方程式爲 $x^2=4y$

2. 擲 3 個硬幣，出現 3 正面可得 12 元，2 正面可得 8 元，一正面可得 4 元，爲了公平起見，出現三反面時，應賠多少元？(A)20 元 (B)24 元 (C)36 元 (D)40 元 (E)48 元

【解答】(D)

【詳解】

投 3 個硬幣，其樣本空間元素個數 $n(S)=2^3=8$，設出現三反面應賠 x 元則

得款數	12	8	4	$-x$
機率 p	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

今欲公平，則必須期望值 $E=0\Rightarrow 12\times\frac{1}{8}+8\times\frac{3}{8}+4\times\frac{3}{8}+(-x)\times\frac{1}{8}=0$，$x=40$，即賠 40 元

3. 平面上有一個橢圓，已知其長軸平行於 x 軸，短軸的一端點爲$(-4，0)$，且其中一焦點爲$(0，4)$，則此橢圓長軸的長度爲何？(A) 2 (B) $2\sqrt{2}$ (C) 6 (D) $6\sqrt{2}$ (E) $8\sqrt{2}$

【解答】(E)

【詳解】

短軸的一端點爲$(-4，0)$ $\Rightarrow$ 短軸：$y=0$，焦點$(0，4)$在長軸上 $\Rightarrow$ 長軸：$x=0$

$\therefore$ 中心$(0，0)$ $\Rightarrow$ $b=4$，$c=4$ $\Rightarrow$ $a=\sqrt{b^2+c^2}=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$

$\therefore$ 長軸長 $=2a=2\times 4\sqrt{2}=8\sqrt{2}$

4. 自 $1\sim 10^5$ 之自然數中，任取一數，取到數字之和爲 11 的自然數的機率爲
   (A)0.01300 (B)0.01340 (C)0.01355 (D)0.01365

【解答】(B)

【詳解】

一數之數字和爲 11 有多少個，即求

$x+y+z+u+t=11$，$0\le x，y，z，u，t\le 9$ 之整數解有多少組

$\because$ 有一未知數爲 11 之解有 5 種，有一未知數爲 10 之解有 $5\times C^4_1=20$ 種

$\therefore$ 所求整數解共有 $H^5_{11}-5-20=1340$ 種 $\therefore$ 所求機率爲 $\frac{1340}{10^5}=0.01340$

5. (複選)設 $A\in N$ 且 $1\le A\le 500$，則下列何者正確？
   (A)不爲 5 的倍數之 A 值有 400 個 (B)爲 2 或 3 的倍數之 A 值有 333 個
   (C)爲完全平方數或完全立方數之 A 值有 27 個
   (D)不爲 2，不爲 3 且不爲 5 的倍數之 A 值有 134 個 (E)與 28 互質之 A 值有 214 個

【解答】(A)(B)(C)(D)(E)

【詳解】

(A)對。$500-[\frac{500}{5}]=500-100=400$

(B)對。$[\frac{500}{2}]+[\frac{500}{3}]-[\frac{500}{6}]=250+166-83=333$

(C)對。A：平方數，$A=\{1^2，2^2，\cdots，22^2\}$，$n(A)=22$

B：立方數，$B=\{1^3，2^3，\cdots，7^3\}$，$n(B)=7$

$A\cap B=\{1^6，2^6\}$，$n(A\cap B)=2$

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=22+7-2=27$

(D)對。$n(A_2\cup A_3\cup A_5)$

$=n(A_2)+n(A_3)+n(A_5)-n(A_6)-n(A_{15})-n(A_{10})+n(A_{30})$

$=[\frac{500}{2}]+[\frac{500}{3}]+[\frac{500}{5}]-[\frac{500}{6}]-[\frac{500}{15}]-[\frac{500}{10}]+[\frac{500}{30}]$

$=250+166+100-83-33-50+16=366$，所求 $=500-366=134$

(E)對。$28=2^2\times 7$

$n(A_2\cup A_7)=n(A_2)+n(A_7)-n(A_{14})=[\frac{500}{2}]+[\frac{500}{7}]-[\frac{500}{14}]=250+71-35=286$

所求 $=500-286=214$

6. (複選)20 個字母：*aaaaa*，*bbbbb*，*ccccc*，*ddddd*，下列何者正確？

(A)選取 4 個字母有 C_4^{20} 種方法 (B)選取 5 個字母有 H_5^{20} 種方法 (C)取 3 個字母有 H_6^{20} 種方法 (D)取 5 個字母排列有 1024 種方法 (E)取 6 個字母排列，同字不相鄰，有 972 種方法

【解答】(D)(E)

【詳解】

(A) H_4^4 (B) H_5^4 (C) 4^3 (D) $4^5=1024$ (E) $4\cdot 3^5=972$

7. (複選)相異書本 9 本，下列分法何者正確？

(A)平分成 3 堆，有$\frac{C_3^9C_3^6C_3^3}{3!}$種 (B)平分給 3 人，有 $C_3^9C_3^6C_3^3$種

(C)一人得 5 本，一人得 2 本，一人得 2 本，有 $C_5^9C_2^4C_2^2$ 種

(D)一人得 5 本，一人得 3 本，一人得 1 本，有 $C_5^9C_3^4C_1^1$種

(E)每人至少分得 1 本，有 $C_5^9C_2^4C_2^2$ 種

【解答】(A)(B)

【詳解】

(A)$\frac{C_3^9C_3^6C_3^3}{3!}$ (B)$\frac{C_3^9C_3^6C_3^3}{3!}\times 3!=C_3^9C_3^6C_3^3$ (C)$\frac{C_5^9C_2^4C_2^2}{2!}\times 3!$ (D) $C_5^9C_3^4C_1^1\times 3!$

(E) $3^9-C_1^3\cdot 2^9+C_2^3\cdot 1^9$

8. (複選)自$\{1，2，3，\cdots，n\}$中，

(A)每次取二數，則樣本空間有P_2^n個元素

(B)每次取一數，取後不放回，取二次，則樣本空間有 C_2^n 個元素

(C)每次取一數，取後放回，取二次，則樣本空間有 C_2^n 個元素

(D)每次取一數，取後不放回，取二次，第二次的數字比第一次的數字大，則樣本空間有 C_2^n 個元素

(E)每次取一數，取後放回，取二次，第二次的數字比第一次的數字大，則樣本空間有 H_2^n 個元素

【解答】(D)

【詳解】(A) C_2^n (B) P_2^n (C) n^2 (D) C_2^n (E) C_2^n

5. (複選)已知雙曲線Γ：$\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$，過下列哪些點作$\Gamma$ 之切線恰有一條？

(A)(0，0) (B)(4，1) (C)(3，$\frac{4}{\sqrt{5}}$) (D)($\sqrt{5}$， -2) (E)(1，2)

【解答】(C)(D)

【詳解】

(A)(0，0)為中心，過中心沒有切線

(B) $\frac{4^2}{5}-\frac{1}{4}>1$，點(4，1)與焦點在同一區域內，過(4，1)沒有切線

(C)(3，$\frac{4}{\sqrt{5}}$)在Γ 上，過此點恰有一條切線

(D)($\sqrt{5}$，-2)在漸近線 $2x+\sqrt{5}\,y=0$ 上，過此點恰有一條切線

(E) $\frac{1^2}{5}-\frac{2^2}{4}=\frac{1}{5}-1<1$，點(1，2)與中心(0，0)在同一區域內且不在漸近線上，過點(1，2)有兩條切線

二、填充題

1. 二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 在 $x=-2$ 時有最小值 -1，且圖形交 y 軸於點(0，2)，則序組(a，b，c) = __________。

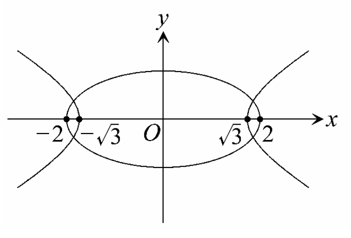
【解答】($\frac{3}{4}$，3，2)

【詳解】

$y=ax^2+bx+c$ 在 $x=-2$ 時有最小值 -1 $\Rightarrow$ 拋物線頂點(-2，-1)且開口向上

$\therefore$ $y=ax^2+bx+c=a(x+2)^2-1$，過點(0，2) $\therefore$ $2=a(0+2)^2-1$ $\Rightarrow$ $a=\frac{3}{4}$

故 $y=\frac{3}{4}(x+2)^2-1=\frac{3}{4}x^2+3x+2$ $\Rightarrow$ $a=\frac{3}{4}$，$b=3$，$c=2$



2. 以橢圓 $x^2+4y^2=4$ 的焦點為頂點，以其頂點為焦點的雙曲線方程式為__________。

【解答】$x^2-3y^2=3$

【詳解】

$x^2+4y^2=4$ $\Rightarrow$ $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 之頂點(2，0)，(-2，0)，焦點($\sqrt{3}$，0)，($-\sqrt{3}$，0)

雙曲線之頂點($\sqrt{3}$，0)，($-\sqrt{3}$，0)，而焦點(2，0)，(-2，0)

設雙曲線方程式為 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，則 $a=\sqrt{3}$，$c=2$，而 $b^2=c^2-a^2=1$，故所求為 $\frac{x^2}{3}-y^2=1$

3. 雙曲線Γ 與雙曲線$\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$ 共焦點且貫軸長爲 4，則Γ 的方程式爲＿＿＿＿＿。

【解答】$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{21}=1$

【詳解】

Γ 與$\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$ 共焦點，設Γ 之方程式爲$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

則 $a^2+b^2=c^2=9+16=25$……①，Γ 之貫軸長 $2a=4$ $\Rightarrow$ $a=2$ 代入①

$b^2=25-4=21$，故Γ ：$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{21}=1$

4. 設一雙曲線的二漸近線爲 $x+2y-5=0$ 與 $x-2y+3=0$，其一焦點爲$(1，2+\sqrt{5})$，則其方程式爲＿＿＿＿＿。

【解答】$\dfrac{(y-2)^2}{1}-\dfrac{(x-1)^2}{4}=1$

【詳解】

$\begin{cases} x-2y=-3 \\ x+2y=5 \end{cases}$ $\Rightarrow$ 中心$(1，2)$，又一焦點爲$(1，2+\sqrt{5})$ $\therefore$ 貫軸平行 y 軸且 $c=\sqrt{5}$

由一漸近線斜率爲$\dfrac{1}{2}$，得$\dfrac{a}{b}=\dfrac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $b=2a$ $\because$ $a^2+b^2=c^2$ $\therefore$ $a^2+(2a)^2=5$

$\Rightarrow$ $a=1$，$b=2$，故方程式爲$\dfrac{(y-2)^2}{1}-\dfrac{(x-1)^2}{4}=1$

5. 雙曲線Γ：$x^2-y^2-4x+8y-16=0$，

(1)Γ 之共軛雙曲線方程式爲＿＿＿＿＿。

(2)一弦$\overline{AB}$ 之中點爲$(4，3)$，則含此弦$\overline{AB}$ 之直線方程式爲＿＿＿＿＿。

【解答】(1) $-\dfrac{(x-2)^2}{4}+\dfrac{(y-4)^2}{4}=1$ (2) $2x+y-11=0$

【詳解】

(1)Γ：$x^2-y^2-4x+8y-16=0$ $\Rightarrow$ $(x-2)^2-(y-4)^2=4$ $\Rightarrow$ $\dfrac{(x-2)^2}{4}-\dfrac{(y-4)^2}{4}=1$

故Γ之共軛雙曲線爲$-\dfrac{(x-2)^2}{4}+\dfrac{(y-4)^2}{4}=1$

(2)設 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$

$\overleftrightarrow{AB}$ 之方程式 $y-3=m(x-4)$ $\Rightarrow$ $y=mx-4m+3$

$\therefore$ $\begin{cases} y=mx-4m+3 \\ x^2-y^2-4x+8y-16=0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ $x^2-(mx-4m+3)^2-4x+8(mx-4m+3)-16=0$

$\Rightarrow$ $(1-m^2)x^2+(8m^2+2m-4)x+(-16m^2-8m-1)=0$

二根 x_1，x_2 $\Rightarrow$ $x_1+x_2=\dfrac{8m^2+2m-4}{m^2-1}$ $\because$ $\overline{AB}$ 之中點$(4，3)$

$\Rightarrow$ $\dfrac{x_1+x_2}{2}=4$ $\Rightarrow$ $\dfrac{4m^2+m-2}{m^2-1}=4$ $\Rightarrow$ $m=-2$

故$\overleftrightarrow{AB}$ 之方程式爲 $y=-2x+11$ $\Rightarrow$ $2x+y-11=0$

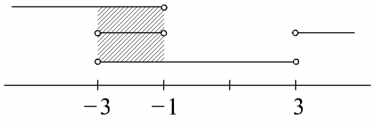
6. $\dfrac{(x+2)^2}{9-t^2}+\dfrac{(y-2)^2}{t+1}=1$ 圖形為貫軸平行 x 軸的雙曲線，則 t 的範圍為__________。

【解答】$-3<t<-1$

【詳解】

$\dfrac{(x+2)^2}{9-t^2}+\dfrac{(y-2)^2}{t+1}=1$ 圖形為貫軸平行 x 軸的雙曲線

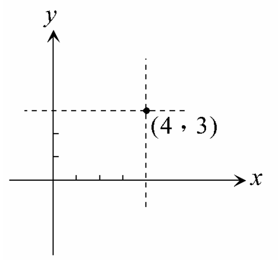
$\therefore \begin{cases} 9-t^2>0 \\ t+1<0 \\ (9-t^2)(t+1)<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3<t<3 \\ t<-1 \\ (t-3)(3+t)(t+1)>0 \end{cases} \quad \therefore\ -3<t<-1$



7. 中心(4，3)，貫軸在直線 $x=4$ 上，正焦弦長為 $\dfrac{32}{3}$，且兩焦點的距離為 10 的雙曲線方程式為__________，已知 P 在雙曲線上，且 F_1，F_2 為兩焦點，則 $|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}|=$ __________。

【解答】$\dfrac{(y-3)^2}{9}-\dfrac{(x-4)^2}{16}=1$；6

【詳解】



中心(4，3)，貫軸在直線 $x=4$ 上的雙曲線，令其方程式為 $\dfrac{(y-3)^2}{a^2}-\dfrac{(x-4)^2}{b^2}=1$

兩焦點距離為 10，即 $c=5$，正焦弦長 $=\dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{32}{3}$，因此可得 $\begin{cases} 3b^2=16a \\ 25=a^2+b^2 \end{cases}$

即 $25=a^2+\dfrac{16a}{3}$，亦即 $3a^2+16a-75=0$，可得 $a=3$，$b^2=16$

此雙曲線方程式為 $\dfrac{(y-3)^2}{9}-\dfrac{(x-4)^2}{16}=1$

設 P 在雙曲線上，F_1，F_2 為兩焦點，則 $|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}|=2a=6$

8. 設 $A(1，-4)$，$B(5，2)$，點 C 在曲線 $y=x^2$ 上，欲使△ABC 的面積最小，則 C 點坐標為__________。

【解答】$(\dfrac{3}{4}，\dfrac{9}{16})$

【詳解】

點 C 在 $y=x^2$ 上，設 $C(a，a^2)$，又 $A(1，-4)$，$B(5，2)$

則△ABC 的面積$=\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 1 & 5 & a & 1 \\ -4 & 2 & a^2 & -4 \end{vmatrix}\right|=\dfrac{1}{2}|2+20+5a^2-2a-4a-a^2|$

$=\frac{1}{2}|4a^2-6a+22|=|2(a-\frac{3}{4})^2+\frac{79}{8}|$

∴　當 $a=\frac{3}{4}$ 時，面積最小值爲 $\frac{79}{8}$，此時 $C(\frac{3}{4}，\frac{9}{16})$

9. 二拋物線 $y=x^2-3x$ 與 $y=\frac{1}{2}x^2+ax+b$ 有相同的頂點，則 $a=$ ________，$b=$ ________。

【解答】$-\frac{3}{2}$，$-\frac{9}{8}$

【詳解】

$y=x^2-3x=(x-\frac{3}{2})^2-\frac{9}{4}$　⇒　$(x-\frac{3}{2})^2=y+\frac{9}{4}$，頂點$(\frac{3}{2}，-\frac{9}{4})$

$y=\frac{1}{2}x^2+ax+b=\frac{1}{2}(x+a)^2+b-\frac{a^2}{2}$，頂點$(-a，b-\frac{a^2}{2})$，已知二頂點爲同一點

∴　$(-a，b-\frac{a^2}{2})=(\frac{3}{2}，-\frac{9}{4})$　∴　$-a=\frac{3}{2}$，$b-\frac{a^2}{2}=-\frac{9}{4}$　⇒　$a=-\frac{3}{2}$，$b=-\frac{9}{8}$

10. 自原點 O 作拋物線 $y=x^2+x+a$ 的切線有兩條，若此兩條切線互相垂直，則 a 的值爲________。

【解答】$\frac{1}{2}$

【詳解】

過原點 O 之直線 $y=mx$ 代入拋物線 $y=x^2+x+a$ 得

$mx=x^2+x+a$　⇒　$x^2+(1-m)x+a=0$ 有等根

令判別式爲 0，$(1-m)^2-4a=0$　⇒　$m^2-2m+1-4a=0$

已知切線有二條，即 m 有二解，設爲 m_1，m_2

則二根乘積 $m_1m_2=-1$（二切線互相垂直），由根與係數關係知 $1-4a=-1$，故 $a=\frac{1}{2}$

11. 一拋物線的準線垂直 x 軸且過三點$(1，0)$，$(-1，1)$，$(5，-1)$，則此拋物線方程式爲________，其焦點坐標爲________。

【解答】$x=y^2-3y+1$，$(-1，\frac{3}{2})$

【詳解】

拋物線之準線垂直 x 軸　⇒　對稱軸垂直 y 軸，設拋物線方程式 $x=ay^2+by+c$

通過三點$(1，0)$，$(-1，1)$，$(5，-1)$　∴　$1=c$，$-1=a+b+c$，$5=a-b+c$

解之得 $a=1$，$b=-3$，$c=1$　∴　拋物線方程式爲 $x=y^2-3y+1$

⇒　$(y-\frac{3}{2})^2=x+\frac{5}{4}$，頂點$(-\frac{5}{4}，\frac{3}{2})$　⇒　焦點$(-1，\frac{3}{2})$

12. $\sqrt{2(x-1)^2+2(y-2)^2}=|x+y+1|$ 其頂點坐標________。

【解答】$(-1，0)$

【詳解】

$\sqrt{2(x-1)^2+2(y-2)^2}=|x+y+1|$　⇒　$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}=\frac{|x+y+1|}{\sqrt{2}}$ 爲一拋物線

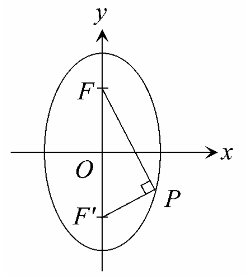
$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}$ 表動點$(x，y)$與定點$(1，2)$的距離

$\dfrac{|x+y+1|}{\sqrt{2}}$表動點($x$，$y$)與定直線 $x+y+1=0$ 的距離

由拋物線的定義知：焦點為(1，2)，準線為 $x+y+1=0$

過焦點(1，2)作準線 $x+y+1=0$ 的垂直線為對稱軸，其方程式為 $x-y+1=0$

則軸 $x-y+1=0$ 與準線 $x+y+1=0$ 的交點(－1，0)即為頂點坐標



13.設 P 為橢圓 $\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1$ 上的一點，兩焦點 F，F' 在 y 軸上且 $\overline{FF'}=10$，如果 $\overline{PF}=2\overline{PF'}$ 且 $\angle FPF'=90°$，則此橢圓正焦弦長為__________。

【解答】$\dfrac{8}{3}\sqrt{5}$

【詳解】

$2c=\overline{FF'}=10 \quad\Rightarrow\quad c=5$，設 $\overline{PF'}=k$，則 $\overline{PF}=2\overline{PF'}=2k$，又 $\angle FPF'=90°$

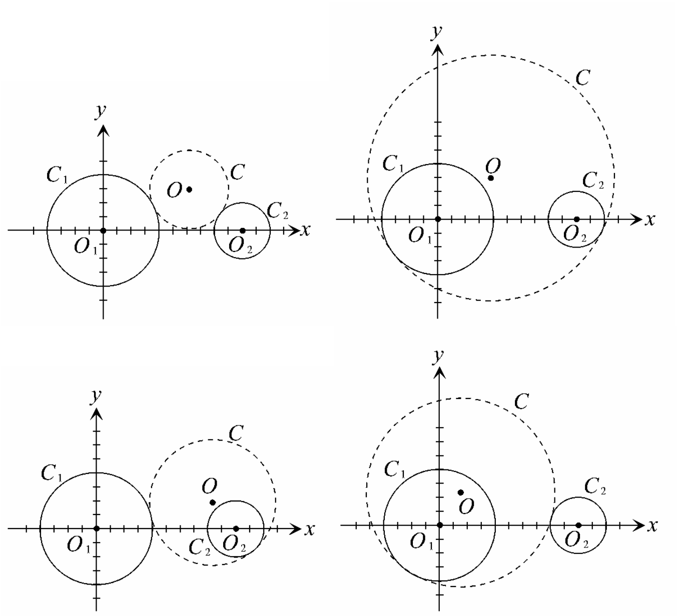
故 $4k^2+k^2=(2c)^2=100 \quad\Rightarrow\quad k^2=20$，$2a=\overline{PF}+\overline{PF'}=3k=3\sqrt{20}=6\sqrt{5}$

$\Rightarrow\quad a=3\sqrt{5}$，$b^2=a^2-c^2=45-25=20$，正焦弦長 $=\dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{40}{3\sqrt{5}}=\dfrac{8}{3}\sqrt{5}$

14.已知兩圓 C_1：$x^2+y^2=16$，C_2：$(x-10)^2+y^2=4$，若動圓 C 與 C_1，C_2 均相切，則此動圓 C 之圓心軌跡方程式為__________。

【解答】$\dfrac{x^2}{1}-\dfrac{y^2}{24}=1$ 或 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$

【詳解】



已知 C_1 之圓心 $O_1(0，0)$，半徑 $r_1=4$，C_2 之圓心 $O_2(10，0)$，半徑 $r_2=2$

設動圓 C 之圓心 $O(x，y)$

(1)①若 C 與 C_1，C_2 均外切，則 $\overline{OO_1}-\overline{OO_2}=2$

②若 C 與 C_1，C_2 均內切，則 $\overline{OO_2}-\overline{OO_1}=2$

由①②得 $|\overline{OO_1}-\overline{OO_2}|=2$，又 $\overline{O_1O_2}=10$

故 O 之軌跡為以 O_1，O_2 為焦點，貫軸長為 2 的雙曲線，其中心為(5，0)，$2a=2$，$2c=10$

$\Rightarrow\quad a=1$，$c=5$，$b^2=c^2-a^2=25-1=24$，所求軌跡方程式為 $\dfrac{x^2}{1}-\dfrac{y^2}{24}=1$

(2)①若 C 與 C_1 外切，與 C_2 內切，則 $\overline{OO_1}-\overline{OO_2}=6$

②若 C 與 C_1 內切，與 C_2 外切，則 $\overline{OO_2}-\overline{OO_1}=6$

由①②得 $|\overline{OO_1}-\overline{OO_2}|=6$，又 $\overline{O_1O_2}=10$

故 O 之軌跡方程式為以 O_1，O_2 為焦點，貫軸長為 6 的雙曲線

其中心為(5，0)，$2a=6$，$2c=10$ $\Rightarrow$ $a=3$，$c=5$，$b^2=c^2-a^2=25-9=16$

所求軌跡方程式為 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$

故由(1)(2)可知軌跡方程式為 $\dfrac{x^2}{1}-\dfrac{y^2}{24}=1$ 或 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$

15.拋物線 $y=x^2-mx+m$ 與 x 軸交於 A，B 兩點，若 $\overline{AB}=\sqrt{5}$，則 $m=$ ＿＿＿＿＿。

【解答】-1 或 5

【詳解】

$y=x^2-mx+m$ 交 x 軸於 $A(\alpha，0)$，$B(\beta，0)$，則 $\alpha+\beta=m$，$\alpha\beta=m$

$\Rightarrow$ $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=m^2-4m$ $\because$ $\overline{AB}=|\alpha-\beta|=\sqrt{5}$

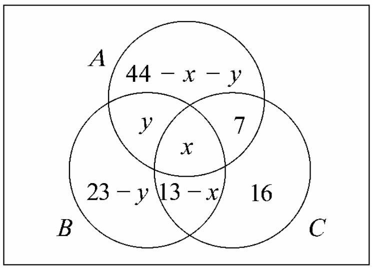
$\therefore$ $m^2-4m=5$ $\Rightarrow$ $(m+1)(m-5)=0$ $\Rightarrow$ $m=-1$ 或 5

16.某次數學競試有 100 個學生參加，試題僅 A，B，C 三題，測驗結果如下：答對 A 者有 51 人，答對 B 者有 36 人，只答對 C 者有 16 人，答對 B，C 兩題者有 13 人，答對 A 或 C 者有 75 人，答對 B 或 C 者有 59 人，而只答對 A，B，C 三題之一者有 66 人，則

(1)只答對 A 者有＿＿＿＿＿人。 (2)三題都答錯者有＿＿＿＿＿人。

【解答】(1) 33 (2) 8

【詳解】



$\begin{cases}51+16+(13-x)=75\\(44-x-y)+(23-y)+16=66\end{cases}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases}x=5\\y=6\end{cases}$

(1) $44-5-6=33$（人）

(2) $n(A\cup B\cup C)=92$ $\therefore$ $100-92=8$（人）

17.$A=\{x\,|\,\sqrt{x}\in N，1\le x\le 10^6\}$，$B=\{x\,|\,x=700k，k\in Z\}$，求 $n(A-B)=$ ＿＿＿＿＿。

【解答】986

【詳解】

$A=\{1^2，2^2，3^2，\cdots，(10^3)^2\}$，$n(A)=1000$

$A\cap B=\{x\,|\,x=7\times 2^2\times 5^2\times k，k=7\times 1^2，7\times 2^2，\cdots，7\times 14^2\}$，$n(A\cap B)=14$

$\therefore$ $n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=100-14=986$

18.在空間中，x，y，z 坐標皆為整數且與原點距離為 $\sqrt{17}$ 的點，共有＿＿＿＿＿個。

【解答】48

【詳解】

$\because$ $\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{17}$ $\Rightarrow$ $x^2+y^2+z^2=17$

先考慮 $0\le x\le y\le z$ 的解有

x	y	z
0	1	4
2	2	3

$\therefore$　所有解共有：$3!\times 2\times 2+\dfrac{3!}{2!}\times 2\times 2\times 2=48$

$\uparrow\ \uparrow\qquad\uparrow\ \uparrow\ \uparrow$

$(\pm 4)\ (\pm 1)\qquad(\pm 2)(\pm 2)(\pm 3)$

19.以 1000 元換成 500 元，100 元，50 元三種鈔票，其換法有________種，若其中 100 元券至少一張，其換法有________種。

【解答】18；15

【詳解】

設 1000 元券換成 500 元 x 張，100 元 y 張，50 元 z 張

則 $500x+100y+50z=1000$，x，y，z 爲非負整數　$\Rightarrow$　$10x+2y+z=20$

(1)不限張數時

①當 $x=0$　$\Rightarrow$　$2y+z=20$，其解爲 $\begin{array}{c|l} y & 0\ ，1\ ，2\ ，\cdots，10 \\ \hline z & 20，18，16，\cdots，0 \end{array}$ 共有 11 組解

②當 $x=1$　$\Rightarrow$　$2y+z=10$，其解爲 $\begin{array}{c|l} y & 0\ ，1，2，3，4，5 \\ \hline z & 10，8，6，4，2，0 \end{array}$ 共有 6 組解

③當 $x=2$　$\Rightarrow$　$2y+z=0$，有 1 組解$(2，0，0)$

$\therefore$　換法有 $11+6+1=18$ 種

(2)限制 100 元至少一張時（即 $y\geq 1$）

①當 $x=0$ 時　$\Rightarrow$　$2y+z=20$，其解有 10 組

②當 $x=1$ 時　$\Rightarrow$　$2y+z=10$，其解有 5 組

$\therefore$　換法有 $10+5=15$ 種

20.若 $A=\{x，y，z\}$，$B=\{x+1，2，3\}$且 $A=B$，則$(x，y，z)$之解共有________組。

【解答】5

【詳解】

$\because$　$A=B$ 且 $x\neq x+1$　$\Rightarrow$　$x=2$ 或 $x=3$

①若 $x=2$ 時，$A=\{2，y，z\}$，$B=\{3，2，3\}=\{2，3\}$

$\therefore$　$\begin{cases} y=2\ ，\ 3\ ，\ 3 \\ z=3\ ，\ 2\ ，\ 3 \end{cases}$，有 3 組解

②若 $x=3$ 時，$A=\{3，y，z\}$，$B=\{4，2，3\}$

$\therefore$　$\begin{cases} y=2\ ，\ 4 \\ z=4\ ，\ 2 \end{cases}$，有 2 組解

由①②知，共有 5 組解

21.若 $S=\{(x，x+5)\mid x\in R\}$，$T=\{(y-1，x+1)\mid 3x+2y=10，x，y\in R\}$，則 $S\cap T=$________。

【解答】$\{(-\frac{4}{5}，\frac{21}{5})\}$

【詳解】

令$(a，b)\in S\cap T$

$\because$　$(a，b)\in S$　$\Rightarrow$　$a=x$，$b=x+5$　$\Rightarrow$　$a-b+5=0$……①

$\because$　$(a，b)\in T$　$\Rightarrow$　$a=y-1$，$b=x+1$　$\Rightarrow$　$y=a+1$，$x=b-1$

又 $3x+2y=10$　$\Rightarrow$　$3(b-1)+2(a+1)=10$　$\Rightarrow$　$2a+3b-11=0$……②

解①②得 $a=-\dfrac{4}{5}$，$b=\dfrac{21}{5}$

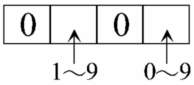
22.由 1，2，3，4，5，…到 1357，共 1357 個正整數中，共出現＿＿＿＿＿個 0。

【解答】365

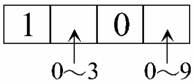
【詳解】

(1)個位數 0 $\Rightarrow$ 10，20，…，1350，共 135 個

(2)十位數 0



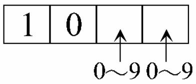
$\Rightarrow$ $9\times 10=90$



$\Rightarrow$ $4\times 10=40$

$\therefore$ 共 $90+40=130$ 個

(3)百位數 0



$\Rightarrow$ $10\times 10=100$

$\therefore$ 共有 $135+130+100=365$ 個 0

23.已知 P 爲橢圓 $\dfrac{(x-1)^2}{4}+\dfrac{(y+2)^2}{9}=1$ 上之一點，則 P 到直線 $2x-y+6=0$ 的最長距離爲＿＿＿＿＿，此時 P 點的坐標爲＿＿＿＿＿。

【解答】$3\sqrt{5}$，$(\dfrac{13}{2}，\dfrac{-19}{5})$

【詳解】

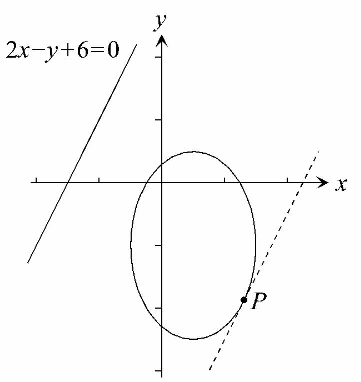
橢圓Γ：$\dfrac{(x-1)^2}{4}+\dfrac{(y+2)^2}{9}=1$，其中心$(1，-2)$，設 $y=2x+k$ 爲Γ 之切線

$y=2x+k$ 代入Γ 得 $\dfrac{(x-1)^2}{4}+\dfrac{(2x+k+2)^2}{9}=1$ $\Rightarrow$ $25x^2+(16k+14)x+4k^2+16k-11=0$

$D=(8k+7)^2-25(4k^2+16k-11)=0$ $\Rightarrow$ $k^2+8k-9=0$ $\Rightarrow$ $k=-9$ 或 1

求最長距離 $\therefore$ $k=-9$，$\dfrac{|6-(-9)|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{15}{\sqrt{5}}=3\sqrt{5}$

$y=2x-9$ 代入Γ，得$(5x-13)^2=0$ $\Rightarrow$ $x=\dfrac{13}{5}$，$y=\dfrac{-19}{5}$ $\therefore$ $P(\dfrac{13}{5}，\dfrac{-19}{5})$



24.有紙幣一元的 2 張，五元的 3 張，十元的 2 張，五十元的 1 張，這些紙幣可形成＿＿＿＿＿種不同的幣值。

【解答】47

【詳解】

因 5 元紙幣有 3 張，故 10 元這一幣值，可由 2 張 5 元或 1 張 10 元紙幣組成，5 元可配出 5 元、10 元兩種幣值，而 1 張 10 元只配出 1 種幣值，爲避免重複計算及遺漏的情況，可將 10 元紙幣換成 2 張 5 元來計算，即換成 1 元紙幣 2 張，5 元紙幣 7 張，50 元紙幣 1 張，配出的幣值有$(2+1)(7+1)(1+1)-1=47$ 種

25.設拋物線 $y^2=12x$ 之一弦中點(3，4)，則此弦所在之直線方程式斜率爲＿＿＿＿＿。

【解答】$\dfrac{3}{2}$

【詳解】

拋物線 $y^2=12x$ 之一弦中點(3，4)，設兩端點爲$(x_1，y_1)$，$(x_2，y_2)$

$\dfrac{x_1+x_2}{2}=3$，$\dfrac{y_1+y_2}{2}=4 \Rightarrow x_1+x_2=6$，$y_1+y_2=8$，又$\begin{cases} y_1^{\,2}=12x_1 \cdots\cdots ① \\ y_2^{\,2}=12x_2 \cdots\cdots ② \end{cases}$

① − ②得 $y_1^{\,2}-y_2^{\,2}=12(x_1-x_2) \Rightarrow (y_1-y_2)(y_1+y_2)=12(x_1-x_2)$

$\Rightarrow$ 斜率 $=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\dfrac{12}{y_1+y_2}=\dfrac{12}{8}=\dfrac{3}{2}$

26.學校的校慶活動今年擴大舉行，所舉辦的各項活動有：教室布置比賽、班際籃球比賽、電影欣賞、園遊會、…等等的活動。

(1)教室布置決定用 5 種不同顏色的壁報紙，將教室的每一面牆壁都貼一種顏色的壁報紙。同學們希望教室呈現另一種風格，每面相鄰的牆壁要貼不一樣的顏色，請問共有______種的貼法。

(2)籃球比賽班上選出 12 名球員，其中有 2 名是中鋒，5 名是前鋒，5 名是後衛，這 12 名球員中有 1 名後衛能兼打前鋒。籃球比賽每次只能有 5 個人上場，若場上一定要有 1 位中鋒，2 名前鋒，2 名後衛，請問有__________種上場組合方式？

(3)老師爲了獎勵班上籃球比賽勇奪全年級第一名，特地買了 4 包一樣的餅乾以及 5 罐一樣的飲料，發給 12 位球員，每人最多得一樣（可不得），問有__________種分法？

(4)電影欣賞挑選奧斯卡金項獎入圍的「臥虎藏龍」、「神鬼戰士」、「浩劫重生」3 部電影，由班級的 8 位幹部投票表決，每人只能投 1 票，沒有廢票。若採用「不記名投票」，則有__________種不同的開票結果。

(5)校慶大會時，阿福、小皓、阿珍…等七個人排成一列。

①若是阿福、小皓、阿珍吵架而不想看見彼此，問三人都不排在一起的方法有________種

②若老師說阿福衣衫不整，不能排第一個，阿珍太愛說話，不能排最後一個，試問排列的方法有__________種？

(6)校慶園遊會時有土風舞的遊戲，小皓和同學共 10 人一起逛到這個攤位。

①若規定只能 6 個人下場圍個圈跳舞，試問有__________種排列方式？

②承①，若是小皓和小崴有心結，所以小崴下去時，小皓不下去。小崴和阿珍是手帕交，小崴不下去時，阿珍也不會下去，試問共有__________種排列方式？

(7)阿福、小剛和同學共 8 人想利用學校校慶補假時，搭捷運到淡水作一日遊，他們分別搭乘 3 節車廂，每節車廂分乘 3 人、3 人、2 人，請問有__________種搭乘方法。

(8)現在他們想搭船欣賞淡水風光，淡水河邊有 3 艘不同的船，每艘船最多只能載 5 人。阿福和小剛會暈船，只能在河邊休息，其餘的 6 位同學欲同時搭船遊河，這時有______種安全搭船的方式。

(9)中午他們來到佳家餐飲中心用餐，此家餐廳供應便當、麵食、冰品三類，便當有排骨便當、雞腿便當、魚排便當 3 種，麵食有涼麵、羹麵、炒麵、湯麵 4 種，冰品有粉圓冰、八寶冰、芋頭冰、珍珠冰 4 種。

①阿珍只點一種食物，請問她有__________種選擇？

②若阿福想在便當、麵食、冰品三類各選一種，請問他有__________種選配法？

(10)茶餘飯後，他們一行人想來點娛樂消遣，小剛便拿出他所攜帶的魔法牌排放在桌上。若小剛想將 10 張不一樣的魔法牌分給小皓 4 張，小崴 4 張，阿珍 2 張，問有______種分法

(11)隨後，他們來到佳佳保齡球館，球館內的每一球道設有編號 1、2、⋯、10 的十個球瓶，若恰好擲球兩次使球瓶全部倒下，則球瓶全部倒下的情況共有________種組合。

(12)結束了快樂的一日遊，回家做功課吧！27.$(1+x^3)+(1+x^3)^2+\cdots+(1+x^3)^{20}$ 的展開式中，x^6 的係數為________。

【解答】(1) 260 (2) 260 (3) 27720 (4) 6561 (5) ①1440；②3720 (6) ①25200；②10080 (7) 1680 (8) 720 (9) ①7；②48 (10) 9450 (11) 1023 (12) 1330

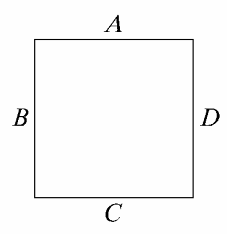
【詳解】

(1)將教室之牆壁分成 A，B，C，D 四面，依 A，B，C，D 的順序，分成兩類

(a) A，C 同色：$5\times4\times1\times4=80$

(b) A，C 異色：$5\times4\times3\times3=180$

共有 $80+180=260$ 種



(2) 5 人上場，則從 2 名中鋒取 1 名，5 名前鋒取 2 名，5 名後衛取 2 名 或 2 名中鋒取 1 名，1 名後衛能兼打前鋒，則 5 名前鋒取 1 名，4 名後衛取 2 名

$\therefore\ C_1^2\times C_2^5\times C_2^5+C_1^2\times C_1^5\times C_2^4=200+60=260$

(3) 4 包一樣的餅乾及 5 罐一樣的飲料分給 12 位球員

每人最多得一樣（可不得），則有 3 人沒分到 $\therefore\ \dfrac{12!}{4!5!3!}=27720$

(4)每位幹部有 3 種投票法 $\therefore\ 3^8=6561$

(5) ①先排另 4 人，阿福、小皓、阿珍再排入其 5 個間隔中，則有 $4!\times P_3^5=1440$ 種

②(全部排法) − (阿福排首或阿珍排尾)

= (全部排法) − (阿福排首 + 阿珍排尾 − 阿福排首且阿珍排尾)

$=7!-(6!+6!-5!)=3720$ 種

(6)①10 人取 6 人作環狀排列 $\dfrac{P_6^{10}}{6}=25200$

②(小崴下去，小皓不下去) + (小崴不下去，阿珍不下去)

$=P_5^8+\dfrac{P_6^8}{6}=6720+3360=10080$

(7) $C_3^8C_3^5C_2^2\times\dfrac{3!}{2!}=1680$

(8)(任意坐) − (6 人共乘一船) $=3^6-3=729-3=726$

(9)①$C_1^3+C_1^4=3+4=7$

②$C_1^3\times C_1^4\times C_1^4=3\times4\times4=48$

(10) $C_4^{10}\times C_4^6\times C_2^2\times\dfrac{3!}{2!}=210\times 15\times 1\times 3=9450$

(11) $C_0^{10}\cdot 1\quad+\quad C_1^{10}\cdot 1+C_2^{10}\cdot 1+C_3^{10}\cdot 1$

第 1 次沒倒　第 1 次倒 1 個

第 2 次全倒　第 2 次倒 9 個

$+\ \cdots\ +C_9^{10}\cdot 1+C_{10}^{10}\cdot 1-C_{10}^{10}\cdot 1\qquad=2^{10}-1=1024-1=1023$

(12)$(1+x^3)+(1+x^3)^2+\ \cdots\ +(1+x^3)^{20}=\dfrac{(1+x^3)[(1+x^3)^{20}-1]}{(1+x^3)-1}=\dfrac{(1+x^3)^{21}-(1+x^3)}{x^3}$

則 x^6 項的係數 $=(1+x^3)^{21}$ 展開式中 x^9 項的係數

$(1+x^3)^{21}$ 的一般項為 $C_r^{21}\cdot 1^{21-r}\cdot(x^3)^r=C_r^{21}x^{3r}$

x^9 項 $\Rightarrow\quad 3r=9\quad\Rightarrow\quad r=3\quad\therefore$　係數為 $C_3^{21}=1330$

27.橢圓 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 在直線 $x+2y-12=0$ 上正射影長為__________。

【解答】$\dfrac{12}{5}\sqrt{5}$

【詳解】

橢圓在直線 $x+2y-12=0$ 上正射影長，即為垂直於 $x+2y-12=0$ 且與橢圓相切之兩平行線間的距離，設 $\begin{cases}\text{切線 } L：2x-y+k=0\cdots\cdots①\\ \text{橢圓}\Gamma：\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1\quad\cdots\cdots②\end{cases}$

由①　$\Rightarrow\quad y=2x+k$ 代入②　$\Rightarrow\quad 9x^2+8kx+2(k^2-4)=0$

$\because$　相切　$\therefore$　$D：64k^2-4\times 9\times 2(k^2-4)=0$ 得 $k=\pm 6$ 代入①

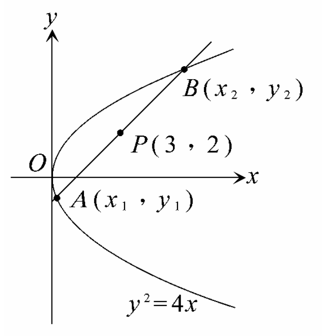
$\Rightarrow$　兩切線分別為 $L_1：2x-y+6=0$ 及 $L_2：2x-y-6=0$

所求 $=d(L_1，L_2)=\dfrac{|6-(-6)|}{\sqrt{4+1}}=\dfrac{12}{5}\sqrt{5}$

28.若 $P(3，2)$為拋物線 $y^2=4x$ 之一弦 $\overline{AB}$ 的中點，則 $\overleftrightarrow{AB}$ 方程式為__________。

【解答】$x-y-1=0$

【詳解】



$\begin{cases}\overleftrightarrow{AB}：y-2=m(x-3)\ \cdots\cdots①\\ \Gamma：y^2=4x\qquad\qquad\cdots\cdots②\end{cases}$

由①　$\Rightarrow\quad x=\dfrac{y}{m}-\dfrac{2}{m}+3$ 代入②　$\Rightarrow\quad y^2=\dfrac{4}{m}y-\dfrac{8}{m}+12$

$\Rightarrow\quad y^2-\dfrac{4}{m}y+(\dfrac{8}{m}-12)=0$ 之二根 y_1, y_2, 二根之和 $y_1+y_2=\dfrac{4}{m}$，

又 $\overline{AB}$ 之中點為 P

$\therefore\quad y_1+y_2=4\quad\Rightarrow\quad m=1$ 代入①得 $\overleftrightarrow{AB}$：$x-y-1=0$

29.求橢圓 $x^2+2y^2-2x=4$ 與直線 $y=x-1$ 之交弦長為__________。

【解答】$\dfrac{2\sqrt{30}}{3}$

【詳解】

$\begin{cases}\text{橢圓}：x^2+2y^2-2x-4=0\cdots\cdots①\\ \text{直線}：y=x-1\qquad\qquad\cdots\cdots②\end{cases}$

②代入① $\Rightarrow$ $3x^2-6x-2=0$ 之二根為 x_1，x_2

則交點分別為 $A(x_1，x_1-1)$，$B(x_2，x_2-1)$，又 $x_1+x_2=2$，$x_1x_2=\dfrac{-2}{3}$

$\overline{AB}^2=(x_1-x_2)^2+[(x_1-1)-(x_2-1)]^2=2(x_1-x_2)^2=2[(x_1-x_2)^2-4x_1x_2]$

$=2[2^2-4\times(\dfrac{-2}{3})]=\dfrac{40}{3}$，弦長$=\overline{AB}=\sqrt{\dfrac{40}{3}}=\dfrac{2\sqrt{30}}{3}$

30.橢圓 $4x^2+9y^2=36$ 之一弦 $\overline{AB}$ 的中點為$(2，1)$，則 $\overleftrightarrow{AB}$ 之方程式為__________。

【解答】$8x+9y-25=0$

【詳解】

設 $A(x_1，y_1)$，$\overline{AB}$ 中點$(2，1)$，因此 $B(4-x_1，2-y_1)$

A，B 在橢圓 $4x^2+9y^2=36$ 上，故 $4x_1^2+9y_1^2=36\cdots\cdots$①

且 $4(4-x_1)^2+9(2-y_1)^2=36$ $\Rightarrow$ $4x_1^2+9y_1^2-32x_1-36y_1=-64\cdots\cdots$②

①－②得 $32x_1+36y_1=100$ $\Rightarrow$ $8x_1+9y_1=25$，即直線 AB 為 $8x+9y-25=0$

三、計算題

1.設 $A(-1，0)$，$C_1：(x-5)^2+y^2=4$，$C_2：(x+5)^2+y^2=49$，求

(1)過 A 且與圓 C_1 相切之動圓的圓心軌跡方程式。

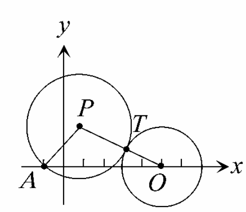
(2)與圓 C_1，C_2 相切之軌跡方程式。

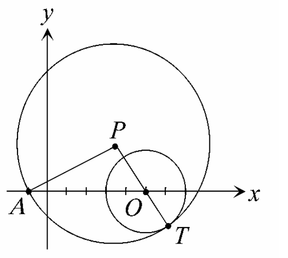
【解答】(1) $\dfrac{(x-2)^2}{1}-\dfrac{y^2}{8}=1$ (2) $\dfrac{x^2}{\frac{25}{4}}-\dfrac{y^2}{\frac{75}{4}}=1$

【詳解】

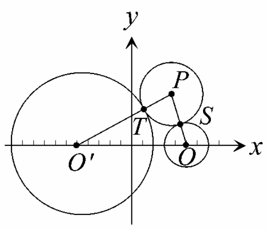
(1) $\overline{PT}=\overline{PA}$ $\Rightarrow$ $\overline{PA}=\overline{PO}-2$ 或 $\overline{PA}=\overline{PO}+2$ $\Rightarrow$ $|\overline{PO}-\overline{PA}|=2$ 為雙曲線

二焦點$(-1，0)$，$(5，0)$，中心$(2，0)$，$c=3$，$a=1$ $\therefore$ $b^2=8$，故得 $\dfrac{(x-2)^2}{1}-\dfrac{y^2}{8}=1$

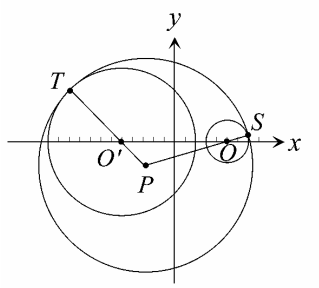




(2)



圖(一)



圖(二)

由圖(一)：$\overline{PS}=\overline{PT}$ $\Rightarrow$ $\overline{PO}-\overline{OS}=\overline{PO'}-\overline{O'T}$ $\Rightarrow$ $\overline{PO}-2=\overline{PO'}-7$ $\Rightarrow$ $\overline{PO'}-\overline{PO}=5$

由圖(二)：$\overline{PS}=\overline{PT}$ $\Rightarrow$ $\overline{PO}+2=\overline{PO'}+7$ $\Rightarrow$ $\overline{PO}-\overline{PO'}=5$

$\therefore$ $|\overline{PO}-\overline{PO'}|=5$ 表雙曲線，二焦點 $F'(-5，0)$，$F(5，0)$

$\therefore$ 中心$(0，0)$，$c=5$，$a=\dfrac{5}{2}$ $\Rightarrow$ $b^2=\dfrac{75}{4}$，故$\dfrac{x^2}{\frac{25}{4}}-\dfrac{y^2}{\frac{75}{4}}=1$ 即為所求

2.設 P 為雙曲線 $x^2-4y^2=4$ 上一點，$A(3，0)$，則$\overline{PA}$之 min = ？

【解答】$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

【詳解】

$x^2-4y^2=4$ $\Rightarrow$ $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$，令 $P\,(2\sec\theta，\tan\theta)$

$\Rightarrow \overline{PA}=\sqrt{(2\sec\theta-3)^2+\tan^2\theta}=\sqrt{4\sec^2\theta-12\sec\theta+9+(\sec^2\theta-1)}$

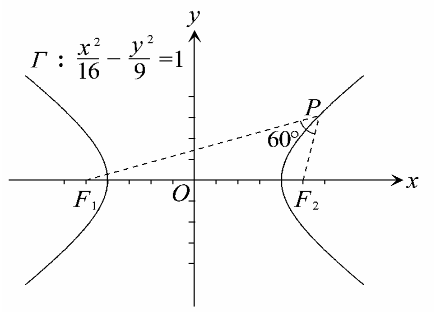
$=\sqrt{5\sec^2\theta-12\sec\theta+8}=\sqrt{5(\sec\theta-\frac{6}{5})^2+\frac{4}{5}}$

$\therefore$ 當 $\sec\theta=\dfrac{6}{5}$時，$\overline{PA}$有 min $=\sqrt{\dfrac{4}{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

3.設雙曲線Γ：$\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$之兩焦點為 F_1，F_2，P 為Γ上之一點且$\angle F_1PF_2=60°$，求△ F_1PF_2之面積。

【解答】$9\sqrt{3}$

【詳解】



Γ ：$\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$ $\Rightarrow$ $a^2=16$，$b^2=9$

$\therefore$ $c^2=a^2+b^2=16+9=25$ $\Rightarrow$ $c=5$

令$\overline{PF_1}=m$，$\overline{PF_2}=n$，則 $|m-n|=2a=8$

由餘弦定理得$(2c)^2=m^2+n^2-2mn\cos60°=m^2+n^2-mn$

$=(m-n)^2+mn$

$\therefore$ $100=64+mn$ $\Rightarrow$ $mn=36$，故△F_1PF_2之面積 $=\dfrac{1}{2}mn\sin60°=\dfrac{1}{2}\cdot36\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=9\sqrt{3}$

4.一雙曲線與橢圓$\dfrac{(x-1)^2}{9}+\dfrac{(y+2)^2}{4}=1$共焦點，且貫軸長為 2，求雙曲線上任一點到其二漸近線距離乘積。

【解答】$\dfrac{4}{5}$

【詳解】

(1)雙曲線Γ 與橢圓$\dfrac{(x-1)^2}{9}+\dfrac{(y+2)^2}{4}=1$ 共焦點

設Γ 之方程式為$\dfrac{(x-1)^2}{9-t}+\dfrac{(y+2)^2}{4-t}=1$ $\Rightarrow$ $\dfrac{(x-1)^2}{9-t}-\dfrac{(y+2)^2}{t-4}=1$

貫軸長 $=2\sqrt{9-t}=2$ $\Rightarrow$ $9-t=1$ $\Rightarrow$ $t=8$ $\therefore$ Γ ：$(x-1)^2-\dfrac{(x+2)^2}{4}=1$

(2) Γ 上任一點到二漸近線的距離乘積 $=\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}=\dfrac{1\times4}{1+4}=\dfrac{4}{5}$

5.已知 $\log2=0.3010$，$\log3=0.4771$，試求滿足不等式

$1-\frac{1}{3}C_1^n+(-\frac{1}{3})^2C_2^n+(-\frac{1}{3})^3C_3^n+\cdots+(-\frac{1}{3})^nC_n^n<\frac{1}{5000}$，最小正整數 n 之值爲何？

【解答】22

【詳解】

$\because\ (1+x)^n=C_0^n+C_1^nx+C_2^nx^2+\cdots+C_n^nx^n$

令 $x=-\frac{1}{3}$ 得

$(1-\frac{1}{3})^n=C_0^n+C_1^n(-\frac{1}{3})+C_2^n(-\frac{1}{3})^2+\cdots+C_n^n(-\frac{1}{3})^n$

$\Rightarrow\ (\frac{2}{3})^n=1-\frac{1}{3}C_1^n+(-\frac{1}{3})^2C_2^n+(-\frac{1}{3})^3C_3^n+\cdots+(-\frac{1}{3})^nC_n^n$

$\Rightarrow\ (\frac{2}{3})^n<\frac{1}{5000}\ \Rightarrow\ n\log\frac{2}{3}<\log\frac{1}{5000}\ \Rightarrow\ n(\log2-\log3)<\log2-\log10000$

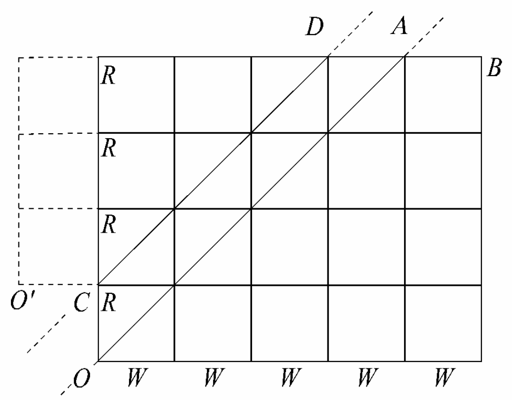
$\Rightarrow\ n(0.301-0.4771)<0.301-4\ \Rightarrow\ n(-0.1761)<-3.6990\ \Rightarrow\ n>\frac{3.699}{0.1761}=21.005$

$\Rightarrow\ n\geq22$，故最小正整數 n 之值 $=22$

6.一袋中有 4 紅球，5 白球，自袋中每次取出一球，取出不放回，取完爲止。若袋中每一球被取中機會均等，試求在取球過程中，紅球個數不多於白球個數的機率？

【解答】$\frac{1}{3}$

【詳解】



如上圖，自袋中每次取一球，取完爲止，其方法數與自 O 點取捷徑走到 B 點相同

故其樣本數爲 $\frac{9\,!}{4\,!\,5\,!}=126$，其中穿過 $\overline{OA}$ 線至達 B 點的走法

即表示取球過程中紅球個數多於白球個數的情況

因爲，取捷徑自 O 點出發，穿過 $\overline{OA}$ 至 $\overline{CD}$ 線的走法與自 O' 出發，走到 $\overline{CD}$ 成對稱

故自 O 走捷徑穿過 $\overline{OA}$，再走到 B 點的走法與自 O' 走捷徑到 B 方法相同

取球過程中，紅球個數多於白球個數的取法有 $\frac{9\,!}{3\,!\,6\,!}=84$

故所求機率 $1-\frac{84}{126}=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

7.設Γ：$y=|x^2-4|$，L：$y=x+k$，若Γ，L 相交於一點，則 $k=$？

【解答】-2

【詳解】

Γ：$y=\begin{cases}x^2-4，x^2-4\geq 0\\4-x^2，x^2-4\leq 0\end{cases}$ $\Rightarrow$ Γ：$y=\begin{cases}x^2-4，x\geq 2\text{或}x\leq -2\\4-x^2，-2\leq x\leq 2\end{cases}$

L：$y=x+k$ 表斜率為 1 之直線，過(2，0)時，僅有一交點 $\therefore$ $0=2+k$ $\Rightarrow$ $k=-2$