<table>
<tr><td colspan="6">高雄市明誠中學 高三數學平時測驗　　日期：96.05.15</td></tr>
<tr><td rowspan="2">範圍</td><td rowspan="2">Book3　All</td><td>班級</td><td>普三　　班</td><td rowspan="2">姓名</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>座號</td><td></td></tr>
</table>

一、選擇題

1. 三階行列式$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}$可化簡爲

(A) $abc(a+b+c)$　(B) $(a-b)(b-c)(c-a)$　(C) $(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$　(D) $(a+b)(b+c)(c+a)(a+b+c)$　(E) $(a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca)$

【解答】(C)

【詳解】

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-c & b-c & c \\ a^2-c^2 & b^2-c^2 & c^2 \\ c-a & c-b & a+b \end{vmatrix} = (a-c)(b-c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & c \\ a+c & b+c & c^2 \\ -1 & -1 & a+b \end{vmatrix}$$

$\times(-1)$　　　　$\times(-1)$

$$= (a-c)(b-c)\begin{vmatrix} 1 & 0 & c \\ a+c & b-a & c^2 \\ -1 & 0 & a+b \end{vmatrix} = (a-c)(b-c)(b-a)\begin{vmatrix} 1 & c \\ -1 & a+b \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$$

2. 設實數 x，y，z 滿足 $x^2+y^2+z^2=1$，若 $x+y+z=k$，則

(A) k 的最大值爲$\sqrt{2}$　(B) k 的最小值爲 $-\sqrt{2}$　(C) k 有最大值時，$x=y=z=1$　(D) k 有最小值時，$x=y=z=\dfrac{-1}{\sqrt{3}}$　(E) k 無最大或最小值

【解答】(D)

【詳解】

由柯西不等式$(x^2+y^2+z^2)(1^2+1^2+1^2) \ge (x+y+z)^2$　$\Rightarrow$　$1\times 3 \ge k^2$　$\Rightarrow$　$-\sqrt{3} \le k \le \sqrt{3}$

當 k 有最大值$\sqrt{3}$時，$\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$ 且 $x+y+z=\sqrt{3}$，得 $x=y=z=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

當 k 有最小值$-\sqrt{3}$時，$\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$ 且 $x+y+z=-\sqrt{3}$，當 $x=y=z=\dfrac{-\sqrt{3}}{3}=\dfrac{-1}{\sqrt{3}}$，故選(D)

3. 光源放在點 $A(1，2，3)$，向球面 $S：(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=1$ 照射，則在 xy 平面上的射影區域面積爲

(A) 3π　(B) 4π　(C) 5π　(D) 6π　(E) 9π

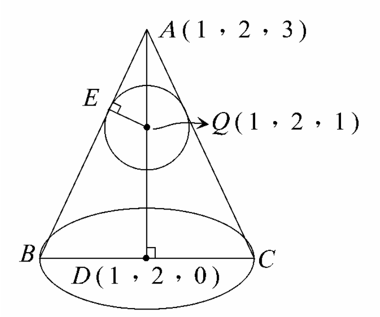
【解答】(A)

【詳解】

如下圖，其射影爲一個圓區域，中心爲 $D(1，2，0)$，$\overline{BC}$ 爲直徑

$\because$　$\overline{AD}=3$，$\overline{AQ}=2$，$\overline{QE}=1$，$\overline{AE}=\sqrt{3}$，而$\triangle AEQ \sim \triangle ADB$　$\therefore$　$\overline{BD}：\overline{QE}=\overline{AD}：\overline{AE}$

$\Rightarrow$　$\overline{BD}：1=3：\sqrt{3}$　$\Rightarrow$　$\overline{BD}=\sqrt{3}$　$\therefore$　所求面積 $=\pi(\sqrt{3})^2=3\pi$



4. 包含二平行直線$\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=3-z$與$x=\dfrac{y+1}{2}=1-z$的平面方程式爲

(A) $7x-y+5z-6=0$　(B) $7x+y-5z+6=0$　(C) $x+2y+3z-8=0$　(D) $4x+4y-5z-3=0$　(E) $x+2y-z-1=0$

【解答】(A)

【詳解】

$$\begin{cases} L_1：\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{-1} \\ L_2：\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{-1} \end{cases}$$

L_1過點$A(-1，2，3)$，L_2過點$B(0，-1，1)$，其方向向量$\vec{d}=(1，2，-1)$

$$\overrightarrow{AB}\times\vec{d}=(\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}，\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}，\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix})=(7，-1，5)$$

取平面E之法向量$\vec{n}=(7，-1，5)$且E過點$A(-1，2，3)$

則$E：7(x+1)-(y-2)+5(z-3)=0 \quad\Rightarrow\quad E：7x-y+5z-6=0$

5. 設相異兩點A，B都在直線$L_1：\begin{cases} 3x-y+z-7=0 \\ 2x+y-3z+14=0 \end{cases}$上，也都在直線$L_2：\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-b}{m}=\dfrac{z-c}{n}$上，$m$，$n$，$b$，$c\in R$，則$m+n$之值爲

(A) 5　(B) 6　(C) 11　(D) 16　(E) 17

【解答】(D)

【詳解】

$\overleftrightarrow{AB}=L_1=L_2$

$$\begin{array}{cccccc} 3 & -1 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 2 & 1 & -3 \end{array} \quad\Rightarrow\quad L_1\text{的方向向量爲}(2，11，5)$$

$\therefore\quad (2，11，5)=(2，m，n) \quad\Rightarrow\quad m=11，n=5 \quad\Rightarrow\quad m+n=16$

【註】　$\because\quad (1，b，c)\in L_2 \quad\therefore\quad (1，b，c)\in L_1$

$$\therefore\quad \begin{cases} 3-b+c-7=0 \\ 2+b-3c+14=0 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad b=2，c=6$$

6. 設x，$y\in R$，若$2x^2+3y^2=7$，且$3x-5y$的最大值爲K，則K的值 =

(A) $5\sqrt{\dfrac{11}{6}}$　(B) $6\sqrt{\dfrac{11}{6}}$　(C) $7\sqrt{\dfrac{11}{6}}$　(D) $8\sqrt{\dfrac{11}{6}}$　(E) $9\sqrt{\dfrac{11}{6}}$

【解答】(C)

【詳解】

由柯西不等式知$[(\sqrt{2}\,x)^2+(\sqrt{3}\,y)^2][(\dfrac{3}{\sqrt{2}})^2+(\dfrac{-5}{\sqrt{3}})^2]\geq(\sqrt{2}\,x\cdot\dfrac{3}{\sqrt{2}}+\sqrt{3}\,y\cdot\dfrac{-5}{\sqrt{3}})^2$

$\Rightarrow \quad (2x^2+3y^2)(\frac{9}{2}+\frac{25}{3}) \ge (3x-5y)^2 \quad \Rightarrow \quad 7\times\frac{77}{6} \ge (3x-5y)^2$

$\Rightarrow \quad -7\sqrt{\frac{11}{6}} \le 3x-5y \le 7\sqrt{\frac{11}{6}}$ ，得最大值 $K=7\sqrt{\frac{11}{6}}$

7. 設點 $A\,(a^2-2a+2，a^2+2a)$，$B\,(a^2+3，2a^2+5a-1)$，若 $\overrightarrow{AB}$ 的方向角爲 45°，則實數 a 之值爲(A) -2　(B) 1　(C) 2　(D) -1　(E) 3

【解答】(B)

【詳解】

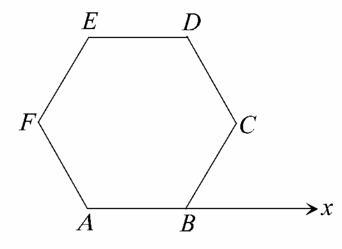
$\overrightarrow{AB}=(2a+1，a^2+3a-1)=(\overline{AB}\cos45°，\overline{AB}\sin45°)$

$\therefore \quad \cos45°=\frac{2a+1}{\overline{AB}}$，$\sin45°=\frac{a^2+3a-1}{\overline{AB}}$

相除　$\therefore \quad \frac{a^2+3a-1}{2a+1}=\tan45°=1 \quad \therefore \quad a^2+a-2=0 \quad \therefore \quad a=1$ 或 $a=-2$

由 $2a+1=\overline{AB}\cos45°>0 \quad \therefore$　取 $a=1$

8. (複選)如下圖，正六邊形 $ABCDEF$ 的邊長爲 2，則下列敘述何者正確？



(A) $\overrightarrow{BC}=(1，\sqrt{3})$　(B) $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{FE}$　(C) $\overrightarrow{CD}=(-1，\sqrt{3})$　(D)點 C 的坐標爲$(3，\sqrt{3})$　(E) $|-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{BC}|=2$

【解答】(A)(B)(C)

【詳解】

(A) $\overline{BC}=2$，$\overrightarrow{BC}$ 方向角爲 60°　$\therefore \quad \overrightarrow{BC}=(2\cos60°，2\sin60°)=(1，\sqrt{3})$

(B) $\because \quad \overline{BC}\,//\,\overline{FE}$，且 $\overline{BC}=\overline{FE}=2 \quad \therefore \quad \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{FE}$

(C) $\overline{CD}=2$，$\overrightarrow{CD}$ 方向角爲 120°　$\therefore \quad \overrightarrow{CD}=(2\cos120°，2\sin120°)=(-1，\sqrt{3})$

(D)當 $A(0，0)$時，$B(2，0) \quad \Rightarrow \quad C(2+1，0+\sqrt{3})=C(3，\sqrt{3})$，但 A 未必是原點

$\therefore$　點 C 的坐標未必爲$(3，\sqrt{3})$

(E) $-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}=(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA})+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{CF}$

$\therefore \quad |-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}|=\overline{CF}=2\,\overline{AB}=4$

9. (複選)設 a，b，c 表△ABC 三邊長，若 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}=0$，則△$ABC$ 爲

(A)等腰三角形　(B)銳角三角形　(C)直角三角形　(D)正三角形　(E)鈍角三角形

【解答】(A)(B)(D)

【詳解】

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}=0 \quad\Rightarrow\quad a^3+b^3+c^3-3abc=0 \quad\Rightarrow\quad (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=0$$

$\Rightarrow\quad (a+b+c)(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)=0$

$\Rightarrow\quad (a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]=0$

$\because\quad a$，b，c 表$\triangle ABC$的三邊長 $\quad\therefore\quad a+b+c>0$

$\therefore\quad (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0 \quad\Rightarrow\quad a=b=c \quad\therefore\quad \triangle ABC$ 為正三角形，故選(A)(B)(D)

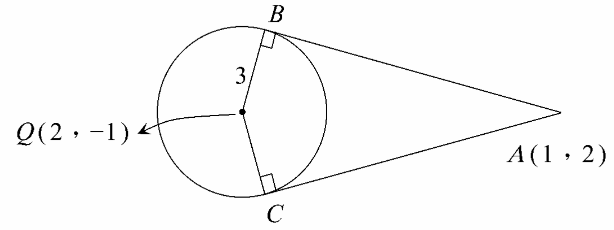
10. (複選)xy 平面上，過點 $A(1，2)$作圓 C：$x^2+y^2-4x+2y-4=0$ 的兩切線，切點為 B，C，則

(A) $\overline{AB}=1$ (B) $\overleftrightarrow{BC}$ 的方程式為 $x-3y+4=0$ (C) $\overline{BC}=\dfrac{3\sqrt{10}}{5}$ (D)$\triangle ABC$ 的面積為 $\dfrac{3}{10}$

(E)$\triangle ABC$ 的外接圓方程式為 $x^2+y^2-3x-y+1=0$

【解答】(A)(B)(C)(D)

【詳解】



(A) $\overline{AB}=\sqrt{1^2+2^2-4\times1+2\times2-4}=1$

(B)(E)$\triangle ABC$ 的外接圓 = 以 $\overline{AQ}$ 為直徑的圓

$\therefore$ 其方程式為$(x-2)(x-1)+(y+1)(y-2)=0$，即 $x^2+y^2-3x-y=0$

$\therefore\quad \overleftrightarrow{BC}$ ：$(x^2+y^2-3x-y)-(x^2+y^2-4x+2y-4)=0 \quad\Rightarrow\quad \overleftrightarrow{BC}$ ：$x-3y+4=0$

(C)$\because\quad d(Q；\overleftrightarrow{BC})=\dfrac{9}{\sqrt{10}} \quad\Rightarrow\quad \overline{BC}=2\sqrt{3^2-(\dfrac{9}{\sqrt{10}})^2}=\dfrac{6}{\sqrt{10}}=\dfrac{3\sqrt{10}}{5}$

(D)$\triangle ABC$ 面積 $=\dfrac{1}{2}\overline{BC}\,[d(A；\overleftrightarrow{BC})]=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3\sqrt{10}}{5}\times\dfrac{1}{\sqrt{10}}=\dfrac{3}{10}$

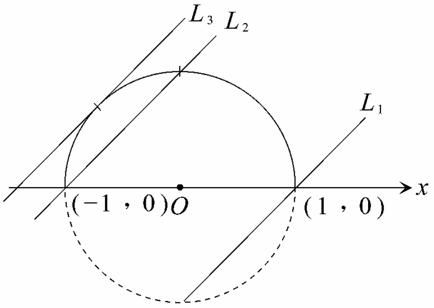
11. (複選)設曲線 $y=\sqrt{1-x^2}$ 與直線 $y=x+k$ 相交 n 個點，則

(A)當 $-\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$ 時，$n=2$ (B)當 $k>\sqrt{2}$ 或 $k<-1$ 時，$n=0$ (C)當 $1<k<\sqrt{2}$ 時，$n=2$

(D)當 $-1\le k<1$ 時，$n=1$ (E)當 $k=-\sqrt{2}$ 時，$n=1$

【解答】(B)(C)(D)

【詳解】



(1) $y=\sqrt{1-x^2} \quad\Leftrightarrow\quad x^2+y^2=1$，$y\ge0$，其圖形如上

(2) $y=x+k$ 過$(1，0)$ $\Rightarrow$ L_1：$y=x-1$；$y=x+k$ 過$(-1，0)$ $\Rightarrow$ L_2：$y=x+1$

$y=x+k$ 與 $y=\sqrt{1-x^2}$ 相切 $\Rightarrow$ L_3：$y=x+\sqrt{2}$（利用圓心到 $y=x+k$ 距離 = 半徑）

(3)當 $-1\le k<1$ 或 $k=\sqrt{2}$ 時，$n=1$，當 $1\le k<\sqrt{2}$ 時，$n=2$，當 $k>\sqrt{2}$ 或 $k<-1$ 時，$n=0$

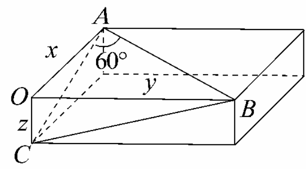
二、填充題)

1. 長方體的一頂點 O，以 O 為頂點的三邊為 $\overline{OA}$，$\overline{OB}$，$\overline{OC}$，若 $\overline{AB}=3$，$\overline{AC}=2$，$\angle BAC=60°$，則(1) $\overline{OA}^2$ =__________。 (2) $\overline{OB}^2$ =__________。 (3) $\overline{OC}^2$ =__________。 (4) O 到平面 ABC 的距離 =__________。

【解答】(1) 3 (2) 6 (3) 1 (4) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

【詳解】

長方體如下圖：



設 $\overline{OA}=x$，$\overline{OB}=y$，$\overline{OC}=z$，則 $\overline{AB}^2=x^2+y^2=9\cdots\cdots①$，$\overline{AC}^2=x^2+z^2=4\cdots\cdots②$

又 $\angle BAC=60°$，由餘弦定理得

$\overline{BC}^2=3^2+2^2-2\cdot3\cdot2\cos60°=9+4-6=7$ $\therefore$ $y^2+z^2=7\cdots\cdots③$

解①，②，③得 $x^2=3$，$y^2=6$，$z^2=1$

四面體 $OABC$ 的體積 $V=\dfrac{1}{3}\overline{OA}\cdot\triangle OBC=\dfrac{1}{6}\cdot\overline{OA}\cdot\overline{OB}\cdot\overline{OC}=\dfrac{1}{6}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}\cdot1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

另一方面，設 O 到平面 ABC 的距離 h

$V=\dfrac{1}{3}\cdot h\cdot\triangle ABC=\dfrac{1}{3}h\cdot\dfrac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{AC}\sin60°=\dfrac{\sqrt{3}}{2}h$（已知 $\overline{AB}=3$，$\overline{AC}=2$）

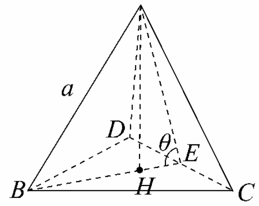
$\therefore$ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}h=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\Rightarrow$ $h=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

2. 若一個正四面體相鄰兩面的夾角為 θ，求 $\sin\theta$=__________。

【解答】$\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

【詳解】

$\overline{AB}=a$，$\overline{BE}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a=\overline{AE}$，$\overline{AH}=\sqrt{\dfrac{3}{4}a^2-\dfrac{1}{12}a^2}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}a$，$\sin\theta=\dfrac{\frac{\sqrt{6}}{3}a}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$



3. 設 $A(10，3，4)$，$B(4，5，3)$，點 P 在 x 軸上移動，點 Q 在 y 軸上移動，則 $\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}$ 的

最小值爲__________。

【解答】$5\sqrt{13}$

【詳解】

(1) $A(10，3，4)$到 x 軸的投影點爲 $C(10，0，0)$

$B(4，5，3)$到 y 軸的投影點爲 $D(0，5，0)$

(2)在 xy 平面上找到 $A'(10，-5，0)$，$B'(-5，5，0)$

使 A'，B' 都不在第一象限且 $\overline{A'C}\perp x$ 軸，$\overline{A'C}=\overline{AC}$ ；$\overline{B'D}\perp y$ 軸，$\overline{B'D}=\overline{BD}$

(3)$\because$ $\overline{AC}=\overline{A'C}$ ，$\overline{AC}\perp x$ 軸，$\overline{A'C}\perp x$ 軸 $\Rightarrow$ x 軸上任意點到 A，A' 都等距

同理，y 軸上任意點到 B，B' 都等距

(4)$\because$ $\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}=\overline{A'P}+\overline{PQ}+\overline{QB'}\geq\overline{A'B'}=5\sqrt{13}$ $\therefore$ 最小值爲 $5\sqrt{13}$

4.設 $A(3，-1，2)$，$B(2，1，1)$，若點 P 在 zx 平面上使$\triangle ABP$ 爲正三角形，則 P 點坐標爲__或__________。

【解答】$(1，0，3)$或$(4，0，0)$

【詳解】

$\because$ P 在 zx 平面上 $\therefore$ 設 $P(x，0，z)$，由 $\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{AB}$ 得

$$\sqrt{(x-3)^2+1+(z-2)^2}=\sqrt{(x-2)^2+1+(z-1)^2}=\sqrt{1+4+1}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}(x-3)^2+1+(z-2)^2=6\\(x-2)^2+1+(z-1)^2=6\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x^2+z^2-6x-4z=-8\cdots\cdots ①\\x^2+z^2-4x-2z=0\ \cdots\cdots ②\end{cases}$$

①－②得 $-2x-2z=-8$ $\Rightarrow$ $x+z=4$ $\therefore$ $z=4-x$ 代入②得

$x^2+(4-x)^2-4x-2(4-x)=0$ $\Rightarrow$ $x^2-5x+4=0$ $\Rightarrow$ $x=1$ 或 $x=4$

$\therefore$ $z=3$ 或 $z=0$，故 $P(1，0，3)$或 $P(4，0，0)$

5.坐標平面上三點 $A(2，-1)$，$B(-1，3)$，$C(3，2)$，若平面上一點 D 滿足 $\overrightarrow{CD}\,/\!/\,\overrightarrow{AB}$ 且 $\overrightarrow{BD}\perp\overrightarrow{AC}$，求 D 點坐標__________。

【解答】$(\frac{10}{3}，\frac{14}{9})$

【詳解】

設 D 之坐標爲$(x，y)$

$\overrightarrow{CD}=(x-3，y-2)$，$\overrightarrow{AB}=(-3，4)$，$\overrightarrow{BD}=(x+1，y-3)$，$\overrightarrow{AC}=(1，3)$

$\overrightarrow{CD}\,/\!/\,\overrightarrow{AB}$ $\Rightarrow$ $\frac{x-3}{-3}=\frac{y-2}{4}$，得 $4x+3y=18\cdots\cdots①$

$\overrightarrow{BD}\perp\overrightarrow{AC}$ $\Rightarrow$ $(x+1，y-3)\cdot(1，3)=0$，得 $x+3y=8\cdots\cdots②$

解①，② $\Rightarrow$ $D(x，y)=(\frac{10}{3}，\frac{14}{9})$

6. x，$y\in R$，已知 $x-2y=5$，求 $4x^2+9y^2$ 之最小值__________，並求當 $4x^2+9y^2$ 最小時，數對$(x，y)=$ __________。

【解答】36，$(\frac{9}{5}，\frac{-8}{5})$

【詳解】

由柯西不等式知$[(2x)^2+(3y)^2][(\frac{1}{2})^2+(\frac{-2}{3})^2]\geq(x-2y)^2$

$\Rightarrow\quad(4x^2+9y^2)\cdot\frac{25}{36}\geq 25\quad\Rightarrow\quad 4x^2+9y^2\geq 36$

即最小值爲 36，此時$\frac{2x}{\frac{1}{2}}=\frac{3y}{\frac{-2}{3}}\quad\Rightarrow\quad y=\frac{-8}{9}x$

已知$x-2y=5$，$x-2(\frac{-8}{9}x)=5$，得$x=\frac{9}{5}$，則$y=\frac{-8}{5}$

7. 直線 L 過點 $A(3，1)$且與直線ℓ：$x+\sqrt{3}y=3$ 夾角爲 60°，則 L 的方程式爲__________。

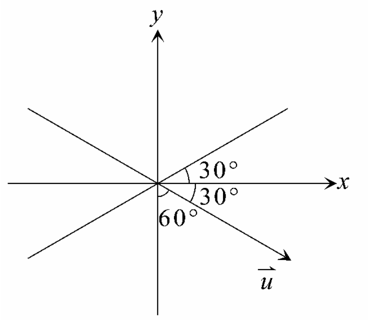
【解答】$x=3$ 或 $x-\sqrt{3}y=3-\sqrt{3}$

【詳解】

$\because\quad\ell$：$x+\sqrt{3}y=3$ 的方向向量$\vec{u}=(\sqrt{3}，-1)=2(\cos330°，\sin330°)$

所求直線 L 的斜角$\alpha=30°$或 90°　$\therefore\quad L$ 的斜率爲 $\tan\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$ 或不存在

$\because\quad L$ 過點 $A(3，1)$　$\therefore\quad L$ 的方程式爲 $x=3$ 或 $x-\sqrt{3}y=3-\sqrt{3}$



8. 過(4，5)且與二直線 L_1：$3x-4y-7=0$ 及 L_2：$12x-5y+6=0$ 成等角之直線方程式爲__________。

【解答】$9x-7y-1=0$ 或 $7x+9y-73=0$

【詳解】

L_1：$3x-4y-7=0\quad\Rightarrow\quad$ 取法向量$\overrightarrow{N_1}=(3，-4)$

L_2：$12x-5y+6=0\quad\Rightarrow\quad\overrightarrow{N_2}=(12，-5)$

設所求直線 L 之法向量爲$\vec{N}=(a，b)$，由 L 與 L_1，L_2 成等角

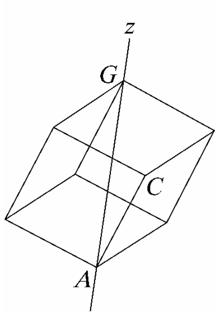
$\Rightarrow\quad\frac{|\vec{N}\cdot\overrightarrow{N_1}|}{|\vec{N}|\cdot|\overrightarrow{N_1}|}=\frac{|\vec{N}\cdot\overrightarrow{N_2}|}{|\vec{N}|\cdot|\overrightarrow{N_2}|}\quad\Rightarrow\quad|\overrightarrow{N_2}|\cdot|\vec{N}\cdot\overrightarrow{N_1}|=|\overrightarrow{N_1}|\cdot|\vec{N}\cdot\overrightarrow{N_2}|$

$\Rightarrow\quad 13|3a-4b|=5|12a-5b|\quad\Rightarrow\quad 13(3a-4b)=\pm5(12a-5b)$

$\Rightarrow\quad 7a+9b=0$ 或 $9a-7b=0\quad\Rightarrow\quad$ 取$\vec{N}=(9，-7)$或$(7，9)$

$\because\quad$ 過點(4，5)　$\Rightarrow\quad L$：$9x-7y-1=0$ 或 $7x+9y-73=0$

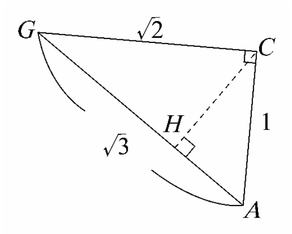
9. 如下圖，有一邊長爲 1 的正立方體，今置頂點 A 於空間坐標系中的原點(0，0，0)，置頂點 G 於正 z 軸上，則頂點 C 之 z 坐標爲__________。



【解答】$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

【詳解】

如下圖，$\cos A=\dfrac{\overline{AH}}{\overline{AC}}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AG}}$　∴　$\overline{AH}=\overline{AC}\cdot\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AG}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　∴　C 點之 z 坐標為 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$



10.颱風中心 P 在清晨 0 時位於 $A\,(3，-1)$，清晨 1 時已到 $B\,(2，1)$，若該颱風作等速直線行進，則清晨 6 時的颱風中心 P 之坐標為__________，若暴風半徑為 2 單位，則甲地$(-1，5)$在清晨__________時__________分進入暴風圈，又於__________時__________分脫離暴風圈。

【解答】$P(-3，11)$，清晨 2 時 24 分進入，清晨 4 時 0 分脫離

【詳解】

$\dfrac{x-3}{y+1}=-\dfrac{1}{2}$　⇒　$2x+y-5=0$，$\begin{cases}x=3-t\\ y=-1+2t\end{cases}$ （$t\in R$）

設 $P(3-t，-1+2t)$　⇒　$P(3-6，-1+12)=P\,(-3，11)$

又 d(甲，P) <2　⇒　$(4-t)^2+(6-2t)^2<4$　⇒　$\dfrac{12}{5}<t<4$

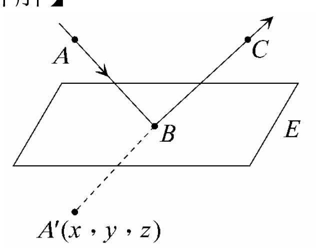
P 介於$(\dfrac{3}{5}，\dfrac{19}{5})$與$(-1，7)$之間

⇒　甲地在清晨 2 時 24 分進入暴風圈，又於清晨 4 時 0 分脫離

11.空間坐標系中，有一平面鏡 E，有一雷射光線經過點 $A(1，3，2)$射向鏡面 E 上的點 $B(0，1，0)$，反射又經過點 $C(-4，5，2)$，則平面 E 方程式為__________。

【解答】$x-4y-3z+4=0$

【詳解】



由光學原理，$\overleftrightarrow{BC}$ 之延長線會經過 A 關於平面 E 的對稱點 A'，且 $\overline{A'B}=\overline{AB}=3$

$\overrightarrow{BC}=(-4，4，2)$，則單位向量 $\vec{u}=\dfrac{\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|}=\dfrac{(-4，4，2)}{6}=(\dfrac{-2}{3}，\dfrac{2}{3}，\dfrac{1}{3})$

$\Rightarrow\quad \overrightarrow{A'B}=3\vec{u}=3\cdot(\dfrac{\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|})=3\cdot(\dfrac{-2}{3}，\dfrac{2}{3}，\dfrac{1}{3})=(-2，2，1)$

即$(-x，1-y，-z)=(-2，2，1)$，得 $A'(x，y，z)=(2，-1，-1)$

平面 E 之法向量爲 $\overrightarrow{AA'}=(1，-4，-3)$，又過 B 點$(0，1，0)$

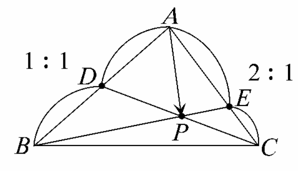
$\therefore\quad E：(x-0)-4(y-1)-3(z-0)=0$，即 $E：x-4y-3z+4=0$

12.$\triangle ABC$ 中，D 是 $\overline{AB}$ 中點，E 點在 $\overline{AC}$ 上，且 $\overline{AE}：\overline{EC}=2：1$，$\overline{CD}$ 與 $\overline{BE}$ 交於 P 點，

(1)設 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，求數對$(x，y)=$__________。 (2)求 $\overline{BP}：\overline{PE}=$__________。

【解答】(1) $(\dfrac{1}{4}，\dfrac{1}{2})$ (2) 3：1

【詳解】



(1) $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{2}y\overrightarrow{AE}$（$\because\quad \overline{AE}：\overline{EC}=2：1$）

$\because\quad B，P，E$ 三點共線 $\quad\therefore\quad x+\dfrac{3}{2}y=1$……①

$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}=2x\overrightarrow{AD}+y\overrightarrow{AC}$（$\because\quad \overline{AD}：\overline{DB}=1：1$）

$\because\quad D，P，C$ 三點共線 $\quad\therefore\quad 2x+y=1$……②

由①②得$(x，y)=(\dfrac{1}{4}，\dfrac{1}{2})$

(2)由(1)，$\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}\quad\Rightarrow\quad\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AE}$

$\Rightarrow\quad(\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{BA})=\dfrac{1}{4}(-\overrightarrow{BA})+\dfrac{3}{4}(\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{BA})\quad\Rightarrow\quad\overrightarrow{BP}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{BE}$

$\therefore\quad\overline{BP}：\overline{PE}=3：1$

13.平面上有二直線 $L_1：7x+6y-12=0$，$L_2：2x-9y+18=0$ 及一點 $A(-11，9)$，則

(1) $L_1，L_2$ 之交角平分線爲__________及__________。

(2)點 A 至 L_2 之距離 = __________。

【解答】(1) $x+3y-6=0，3x-y+2=0$ (2) $\sqrt{85}$

【詳解】

$L_1：7x+6y-12=0，L_2：2x-9y+18=0，A(-11，9)$

(1) $P(x，y)$爲 $L_1，L_2$ 交角之平分線上任一點

$\Rightarrow\quad d(P；L_1)=d(P；L_2)$（$d(P；L)$表點 P 至直線 L 之距離）

$\Rightarrow\quad\dfrac{|7x+6y-12|}{\sqrt{49+36}}=\dfrac{|2x-9y+18|}{\sqrt{4+81}}\quad\Rightarrow\quad 7x+6y-12=\pm(2x-9y+18)$

$\Rightarrow\quad 5x+15y-30=0$ 或 $9x-3y+6=0\quad\Rightarrow\quad x+3y-6=0$ 或 $3x-y+2=0$

(2) $d(A；L_2)=\dfrac{|-22-81+18|}{\sqrt{85}}=\dfrac{85}{\sqrt{85}}=\sqrt{85}$

14.已知兩平行線 L_1：$\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{-2}=z-3$，$L_2$：$\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+1}{-2}=z+2$，試求

(1) L_1，L_2的最短距離 ＝ __________。 (2)包含 L_1，L_2的平面方程式爲__________。

【解答】(1) $\sqrt{41}$ (2) $13x+14y+2z=21$

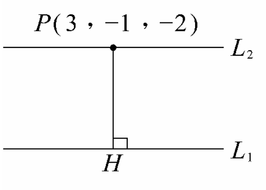
【詳解】

(1)設 $P(3，-1，-2)\in L_2$ 且 P 在 L_1 之垂足爲 H，則 $H(-1+2t，2-2t，3+t)$

$\overrightarrow{PH}=(-4+2t，3-2t，5+t)\perp L_1$ 之方向向量 $\vec{d}=(2，-2，1)$

$\overrightarrow{PH}\cdot\vec{d}=-8+4t-6+4t+5+t=0 \Rightarrow t=1$，得 $H(1，0，4)$

所求 $=d(L_1；L_2)=d(P；L_1)=\overline{PH}=\sqrt{4+1+36}=\sqrt{41}$

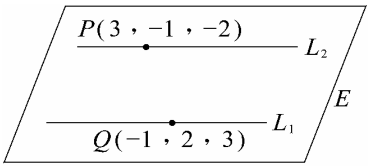


(2) $\overrightarrow{PQ}=(-4，3，5)$，$\vec{d}=(2，-2，1)$

則 $\overrightarrow{PQ}\times\vec{d}=\left(\begin{vmatrix}3 & 5\\ -2 & 1\end{vmatrix}，\begin{vmatrix}5 & -4\\ 1 & 2\end{vmatrix}，\begin{vmatrix}-4 & 3\\ 2 & -2\end{vmatrix}\right)=(13，14，2)$

取所求平面 E 之法向量 $\vec{n}=(13，14，2)$且 E 過 $P(3，-1，-2)$

則 E：$13(x-3)+14(y+1)+2(z+2)=0 \Rightarrow E$：$13x+14y+2z=21$



15.設 A 點在圓 $x^2+y^2=4$ 上移動，B 點在圓 $x^2+y^2=16$ 上移動，則所有 $\overline{AB}$ 中點所成圖形的面積 ＝__________。

【解答】8π

【詳解】

設 $A(2\cos\alpha，2\sin\alpha)$，$B(4\cos\beta，4\sin\beta)$，$\overline{AB}$ 中點 $P(x，y)$

則 $x=\dfrac{1}{2}(2\cos\alpha+4\cos\beta)=\cos\alpha+2\cos\beta$，$y=\dfrac{1}{2}(2\sin\alpha+4\sin\beta)=\sin\alpha+2\sin\beta$

$\Rightarrow x^2+y^2=(\cos\alpha+2\cos\beta)^2+(\sin\alpha+2\sin\beta)^2=5+4\cos(\alpha-\beta)$

$\because -1\le\cos(\alpha-\beta)\le 1 \quad \therefore 1\le x^2+y^2\le 9$，圖形面積 $=9\pi-\pi=8\pi$

16.包含二平行直線 $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+2}{-1}$ 及 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$ 之平面方程式爲__________。

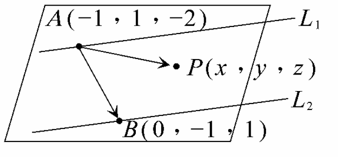
【解答】$x-7y-5z=2$

【詳解】

$\overrightarrow{AP}=(x+1，y-1，z+2)$，$\overrightarrow{AB}=(1，-2，3)$及方向向量 $\vec{d}=(2，1，-1)$共平面

故平行六面體體積爲 0 $\Rightarrow \left|\begin{vmatrix}x+1 & y-1 & z+2\\ 1 & -2 & 3\\ 2 & 1 & -1\end{vmatrix}\right|=0$

得平面方程式為 $x-7y-5z=2$



17.設 O-xyz 空間有四個點 $A(-2，-3，1)$，$B(-6，1，-5)$，$C(3，4，-3)$，$D(1，3，3)$，則 (1)點 D 與直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 之距離為＿＿＿＿＿。 (2)兩直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 與 $\overleftrightarrow{CD}$ 之距離為＿＿＿＿＿。

【解答】(1) 7　(2) 7

【詳解】

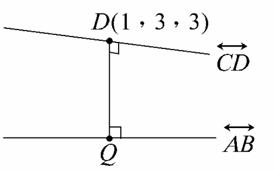
(1) $\overleftrightarrow{AB}$ ：$\begin{cases} x=-2-4t \\ y=-3+4t \\ z=1-6t \end{cases}$，$t\in R$，由 D 向 $\overleftrightarrow{AB}$ 作垂直線，其垂足為 Q，$\overline{DQ}$ 長即為所求

$\because$ $Q\in\overleftrightarrow{AB}$ $\therefore$ 令 $Q(-2-4t，-3+4t，1-6t)$，$\overrightarrow{DQ}=(-3-4t，-6+4t，-2-6t)$

又 $\overrightarrow{DQ}\perp(-4，4，-6)$ $\Rightarrow$ $12+16t-24+16t+12+36t=0$ $\Rightarrow$ $t=0$

$\therefore$ $Q=A=(-2，-3，1)$ $\Rightarrow$ $d(D；\overleftrightarrow{AB})=\overline{DQ}=\overline{DA}=\sqrt{9+36+4}=7$

(2)由(1)可知 $\overleftrightarrow{AD}$ 為 $\overleftrightarrow{AB}$ 及 $\overleftrightarrow{CD}$ 之公垂線 $\therefore$ $d(\overleftrightarrow{AB}；\overleftrightarrow{CD})=\overline{DQ}=\overline{DA}=7$



18.兩歪斜線 L_1：$\dfrac{x+5}{2}=\dfrac{y-5}{-1}=\dfrac{z+6}{3}$ 與 L_2：$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+7}{2}=\dfrac{z-3}{-1}$ 之最短距離為 m，公垂線方程式為 $\dfrac{x-h}{1}=\dfrac{y-2}{6}=\dfrac{z-k}{c}$，則(1) $m=$ ＿＿＿＿＿。 (2) $h+k+b+c=$ ＿＿＿＿＿。

【解答】(1) $3\sqrt{3}$　(2) 2

【詳解】

設公垂線與 L_1 及 L_2 分別交於 P，Q 兩點

則 $P(-5+2t，5-t，-6+3t)$，$Q(1+s，-7+2s，3-s)$

而 $\overrightarrow{PQ}=(6+s-2t，-12+2s+t，9-s-3t)$與 L_1 及 L_2 之方向向量 $\overrightarrow{d_1}=(2，-1，3)$及 $\overrightarrow{d_2}=(1，2，-1)$均垂直

$$\begin{cases} \overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{d_1}=0 \\ \overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{d_2}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 51-3s-14t=0 \\ -27+6s+3t=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=3 \\ s=3 \end{cases}，即\begin{cases} P(1，2，3) \\ Q(4，-1，0) \end{cases}$$

則 $m=\overline{PQ}=\sqrt{9+9+9}=3\sqrt{3}$，公垂線 $\overleftrightarrow{PQ}$ ：$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-3}{-1}$

$\Rightarrow$ $h=1$，$k=3$，$b=-1$，$c=-1$，即 $h+k+b+c=2$

19.(1)求直線 $\begin{cases} x+2y=1 \\ z=0 \end{cases}$ 的參數式為＿＿＿＿＿。

(2)求直線 $\begin{cases} x+2y=1 \\ z=0 \end{cases}$ 與原點(0，0，0)的距離為＿＿＿＿＿。

(3)求包含直線$\begin{cases}x+2y=1\\z=0\end{cases}$與過原點(0，0，0)的平面方程式爲＿＿＿＿＿＿＿＿。

【解答】(1)$\begin{cases}x=1-2t\\y=t\\z=0\end{cases}$，$t\in R$　(2)$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　(3) $z=0$

【詳解】

(1)由 L：$\begin{cases}x+2y=1\\z=0\end{cases}$，令 $y=t$ $\Rightarrow$ L：$\begin{cases}x=1-2t\\y=t\\z=0\end{cases}$，$t\in R$

(2)設 $P\in L$，則 $P(1-2t，t，0)$

$\overline{OP}=\sqrt{(1-2t)^2+t^2+0^2}=\sqrt{5t^2-4t+1}=\sqrt{5(t-\dfrac{2}{5})^2+\dfrac{1}{5}}$

當 $t=\dfrac{2}{5}$時，$\overline{OP}$ 有最小值$\sqrt{\dfrac{1}{5}}$，即 $d(O；L)=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

(3)包含 L：$\begin{cases}E_1：x+2y-1=0\\E_2：z=0\end{cases}$之平面 E，且過 $O(0，0，0)$

設 E：$z+k(x+2y-1)=0$……①

$O(0，0，0)$代入 E $\Rightarrow$ $0-k=0$ $\Rightarrow$ $k=0$ 代入①，得 E：$z=0$

20.點 $P(1，-1，0)$，直線 L：$x=2t$，$y=1+t$，$z=1+t$，$t\in R$，

(1)過 P 與 L 之平面方程式爲＿＿＿＿＿＿＿＿。　(2) P 在 L 之投影點爲＿＿＿＿＿＿＿＿。

【解答】(1) $x+3y-5z+2=0$　(2) $(-\dfrac{1}{3}，\dfrac{5}{6}，\dfrac{5}{6})$

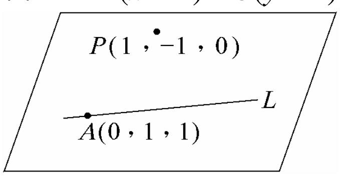
【詳解】

(1) $\overrightarrow{AP}=(1，-2，-1)$及 L 之方向向量 $\vec{d}=(2，1，1)$

$\overrightarrow{AP}\times\vec{d}=(\begin{vmatrix}-2&-1\\1&1\end{vmatrix}，\begin{vmatrix}-1&1\\1&2\end{vmatrix}，\begin{vmatrix}1&-2\\2&1\end{vmatrix})=(-1，-3，5)$

取平面 E 之法向量 $\vec{n}=(1，3，-5)$，且 E 過點 $P(1，-1，0)$

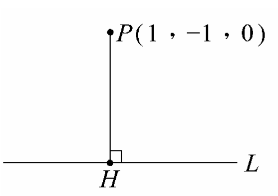
$\therefore$ E：$(x-1)+3(y+1)-5(z-0)=0$ $\Rightarrow$ E：$x+3y-5z+2=0$



(2)設 P 在 L 之投影點爲 H，則 $H(2t，1+t，1+t)$

$\overrightarrow{PH}=(2t-1，2+t，1+t)\perp\vec{d}=(2，1，1)$

$\overrightarrow{PH}\cdot\vec{d}=0$ $\Rightarrow$ $4t-2+2+t+1+t=0$ $\Rightarrow$ $t=\dfrac{-1}{6}$　$\therefore$ $H(-\dfrac{1}{3}，\dfrac{5}{6}，\dfrac{5}{6})$



21.L_1：$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{2-y}{-2}=\dfrac{z+13}{-2}$，$L_2$：$\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z+3}{-2}$之距離爲__________。

【解答】6

【詳解】

L_1上一點$P(1，2，-13)$，L_2的方向向量$\vec{v}=(1，2，-2)$與一點$A(2，-2，-3)$

$\overrightarrow{AP}=(-1，4，-10)$，$|\overrightarrow{AP}\times\vec{v}|=|(12，-12，-6)|=18$，$|\vec{v}|=3 \quad\Rightarrow\quad \dfrac{|\overrightarrow{AP}\times\vec{v}|}{|\vec{v}|}=6$

22.包含直線L：$\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{4}$的平面$E$，若與平面$F$：$2x-y+3z+7=0$垂直，則其方程式爲__________。

【解答】$10x-y-7z+25=0$

【詳解】

設平面E，F的法線向量各爲$\overrightarrow{n_1}$，$\overrightarrow{n_2}$，取$\overrightarrow{n_2}=(2，-1，3)$

$\because\quad E\perp F \quad\Rightarrow\quad \overrightarrow{n_1}\perp\overrightarrow{n_2} \qquad \because\quad L\subset E \quad\Rightarrow\quad \overrightarrow{n_1}\perp L$，$L$的方向向量爲$(3，2，4)$

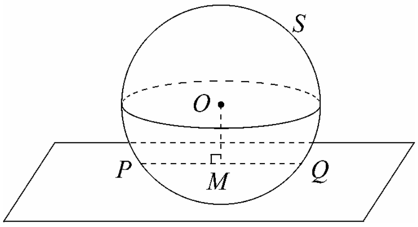
$$\left|\begin{array}{cccccc} 2 & -1 & 3 & 2 & -1 & 3 \\ & \times & \times & \times & & \\ 3 & 2 & 4 & 3 & 2 & 4 \end{array}\right| \qquad \therefore\quad \overrightarrow{n_2}，L\text{的公垂向量}\overrightarrow{n_1}=(10，-1，-7)$$

E：$10x-y-7z=-25$（$\because$　點$(-1，1，2)\in L \quad\Rightarrow\quad (-1，1，2)\in E$）

23.設$A(1，-1，-2)$，$B(1，2，1)$，通過A與B的平面E與球面S：$x^2+y^2+z^2=2$截出的所有圓中，面積最小值 = __________，此時平面E的方程式爲__________。

【解答】$\dfrac{1}{2}\pi$，$2x+y-z-3=0$

【詳解】



$\overrightarrow{AB}=(0，3，3)=3(0，1，1)$，直線$AB$的方程式$\begin{cases} x=1 \\ y=-1+t \\ z=-2+t \end{cases}$代入$x^2+y^2+z^2=2$

$1+(-1+t)^2+(-2+t)^2=2 \quad\Rightarrow\quad t^2-3t+2=0 \quad\Rightarrow\quad (t-1)(t-2)=0 \quad\Rightarrow\quad t=1，2$

$\therefore$　直線AB與球面S的交點爲$P(1，0，-1)$，$Q(1，1，0)$，$\overline{PQ}$中點$M(1，\dfrac{1}{2}，-\dfrac{1}{2})$

則包含A，B的平面E與OM垂直時，截圓面積最小，此圓即以$\overline{PQ}$爲直徑的圓

(1)設最小圓的半徑r，則$r^2=(\dfrac{1}{2}\overline{PQ})^2=(\dfrac{1}{2}\sqrt{2})^2=\dfrac{1}{2} \quad\therefore$　圓面積爲$\dfrac{1}{2}\pi$

(2)平面E以$\overrightarrow{OM}=(1，\dfrac{1}{2}，-\dfrac{1}{2})$爲法向量且過$A(1，-1，-2)$

$\therefore$　E的方程式爲$(x-1)+\dfrac{1}{2}(y+1)-\dfrac{1}{2}(z+2)=0$，即$2x+y-z-3=0$

【說明】

①直線 AB 與球面不相交時，沒有最小圓。

②通過 A，B 之平面 E 與球面所交最大圓爲球的大圓，即平面 E 通過球心時所截出的圓。

24.$\triangle ABC$ 之三邊 $\overline{AB}=3$，$\overline{BC}=5$，$\overline{CA}=4$，又平面上一點 P，且 $x\overrightarrow{PA}+y\overrightarrow{PB}+z\overrightarrow{PC}=\vec{0}$，其中 x，y，$z\in N\cup\{0\}$，x，y，z 互質，

(1)若 P 爲$\triangle ABC$ 之內心，則$(x，y，z)=$ ＿＿＿＿＿。

(2)若 P 爲$\triangle ABC$ 之垂心，則$(x，y，z)=$ ＿＿＿＿＿。

(3)若 P 爲$\triangle ABC$ 之外心，則$(x，y，z)=$ ＿＿＿＿＿。

(4)若 P 爲$\triangle ABC$ 之重心，則$(x，y，z)=$ ＿＿＿＿＿。

【解答】(1) (5，4，3)　(2) (1，0，0)　(3) (0，1，1)　(4) (1，1，1)

【詳解】

(1) $a=\overline{BC}=5$，$b=\overline{AC}=4$，$c=\overline{AB}=3$

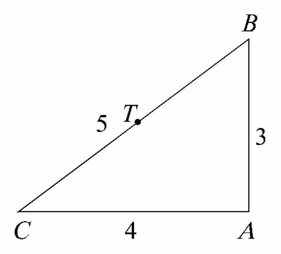
I 爲內心　$\Rightarrow$　$a\triangle IAB：a\triangle IBC：a\triangle ICA=3：5：4$

$\Rightarrow$　$5\overrightarrow{IA}+4\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}$　$\Rightarrow$　$x=5$，$y=4$，$z=3$

(2)$\triangle ABC$ 爲一直角三角形，$\angle A=90°$，斜邊 $\overline{BC}$

如下圖：$\triangle ABC$ 之垂心 $H=A$，$\triangle ABC$ 之外心爲斜邊之中點 T

H 爲$\triangle ABC$ 之垂心　$\Rightarrow$　$\overrightarrow{HA}=\vec{0}$　$\Rightarrow$　$x=1$，$y=0$，$z=0$



(3) T 爲$\triangle ABC$ 之外心　$\Rightarrow$　$\overrightarrow{TB}+\overrightarrow{TC}=\vec{0}$　$\Rightarrow$　$x=0$，$y=1$，$z=1$

(4)$\because$　P 爲$\triangle ABC$ 之重心　$\Rightarrow$　$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}$　$\Rightarrow$　$x\overrightarrow{PA}+y\overrightarrow{PB}+z\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ ……①

已知 $x\overrightarrow{PA}+y\overrightarrow{PB}+z\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ ……②

由①，②相減　$\therefore$　$(x-y)\overrightarrow{PB}+(x-z)\overrightarrow{PC}=\vec{0}$

但 $\overrightarrow{PB}\nparallel\overrightarrow{PC}$　$\therefore$　$x-y=0$，$x-z=0$　$\Rightarrow$　$x=y=z$

但 x，y，$z\in N\cup\{0\}$，x，y，z 互質　$\therefore$　$x=y=z=1$

25.設點 $A(5，6，7)$在 xy 平面，yz 平面，zx 平面之投影點分別爲 B，C，D，則四面體 $ABCD$ 之體積 $=$＿＿＿＿＿。（四面體體積 $=\dfrac{1}{3}\times$底面積$\times$高）

【解答】35

【詳解】

$B(5，6，0)$，$C(0，6，7)$，$D(5，0，7)$　$\Rightarrow$　$\overrightarrow{BC}=(-5，0，7)$，$\overrightarrow{BD}=(0，-6，7)$

$\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}=(42，35，30)$　$\Rightarrow$　$\triangle BCD=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}|=\dfrac{1}{2}\sqrt{3889}$

含 B、C、D 三點的平面 E：$42x+35y+30z=420$

$\therefore$　$d(A，E)=\dfrac{|42\cdot5+35\cdot6+30\cdot7-420|}{\sqrt{42^2+35^2+30^2}}=\dfrac{210}{\sqrt{3889}}$

$\therefore$ $ABCD$ 之體積$=\dfrac{1}{3}\triangle BCD \cdot d(A，E)=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\sqrt{3889}\cdot\dfrac{210}{\sqrt{3889}}=35$

26.空間相交二直線 L_1：$\begin{cases}12x-5y-4z=41\\4x-y-4z=13\end{cases}$，$L_2$：$x=1+4t$，$y=1+2t$，$z=-3+4t$，$t\in R$，則 L_1，L_2 所決定之平面方程式為__________。

【解答】$7x-2y-6z-23=0$

【詳解】

$\begin{cases}L_1\text{之方向向量}\overrightarrow{d_1}=(12，-5，-4)\times(4，-1，-4)=(16，32，8)\\L_2\text{之方向向量}\overrightarrow{d_2}=(4，2，4)\end{cases}\Rightarrow\ \overrightarrow{d_1}\times\overrightarrow{d_2}=\left(\begin{vmatrix}32&8\\2&4\end{vmatrix}，\right.$

$\left.\begin{vmatrix}8&16\\4&4\end{vmatrix}，\begin{vmatrix}16&32\\4&2\end{vmatrix}\right)=(112，-32，-96)$

取所求平面 E 之法向量 $\vec{n}=(7，-2，-6)$ 且平面 E 過點 $(1，1，-3)$

$\Rightarrow$ E：$7(x-1)-2(y-1)-6(z+3)=0$，得 E：$7x-2y-6z-23=0$