高雄市明誠中學 高三數學平時測驗 日期：96.05.01					
範圍	Book2 All	班級	普三 班	姓名	
		座號			

一、選擇題

1. $2x+2\log_{10}(2+10^{-x})-\log_{10}(\frac{1}{4}+10^{x}+10^{2x})$可化簡爲下列何種形式：

(A) $2\cdot 10^{x}$ (B) $x\cdot\log_{10}\frac{1}{4}$ (C) $2\log_{10}2$ (D) 1 (E) $2x+10^{2x}$

【解答】(C)

【詳解】

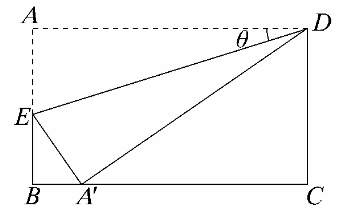
$2x+2\log_{10}(2+10^{-x})-\log_{10}(\frac{1}{4}+10^{x}+10^{2x})=\log_{10}10^{2x}+\log_{10}(2+10^{-x})^{2}-\log_{10}(\frac{1}{2}+10^{x})^{2}$

令 $t=10^{x}>0$，原式 $=\log_{10}\dfrac{t^{2}(2+\frac{1}{t})^{2}}{(\frac{1}{2}+t)^{2}}=\log_{10}\dfrac{(2t+1)^{2}}{(\frac{1}{2}+t)^{2}}=\log_{10}\dfrac{4(t+\frac{1}{2})^{2}}{(\frac{1}{2}+t)^{2}}=\log_{10}4=2\log_{10}2$

2.將一張長方形紙 $ABCD$ 沿著 $\overline{DE}$ 摺起來，使 A 點落在 $\overline{BC}$ 邊上 A' 處（如圖所示）。若摺角爲θ，寬 $\overline{AB}$ 是 6 吋，則摺痕 $\overline{DE}$ 的長度爲

(A) $3\sec^{2}\theta\csc\theta$ (B) $6\sin\theta\sec\theta$ (C) $3\sec\theta\csc\theta$

(D) $6\sec\theta\csc^{2}\theta$ (E) $3\sin\theta\sec\theta$



【解答】(A)

【詳解】

如圖，因爲$\triangle ADE\cong\triangle A'DE$，故$\angle ADE=\angle A'DE=\theta$，所以$\angle A'DC=\frac{\pi}{2}-2\theta$。

故所求摺痕 $\overline{DE}$ 的長度爲 $\overline{DE}=\overline{A'D}\sec\theta$

$=\overline{CD}\sec(\frac{\pi}{2}-2\theta)\sec\theta=6\sec(\frac{\pi}{2}-2\theta)\sec\theta=\dfrac{6}{\sin 2\theta\cos\theta}=\dfrac{6}{2\sin\theta\cos^{2}\theta}=3\sec^{2}\theta\csc\theta$

3. $\sqrt{3}\tan20°+\sqrt{3}\tan10°+\tan20°\tan10°=$ (A) $\sqrt{3}$ (B) $-\sqrt{3}$ (C) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (D) 1 (E) -1

【解答】(D)

【詳解】

$\tan30°=\tan(20°+10°)\Rightarrow\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\tan20°+\tan10°}{1-\tan20°\tan10°}\Rightarrow\sqrt{3}\tan20°+\sqrt{3}\tan10°+\tan20°\tan10°=1$

4. θ 不是象限角且 $\tan\theta>0$，$\sec\theta<0$，則點 $P(\cos\theta，\sin\theta)$在

(A)第一象限 (B)第二象限 (C)第三象限 (D)第四象限 (E)兩坐標軸上

【解答】(C)

【詳解】

(1) $\tan\theta>0$，$\sec\theta<0$ $\Rightarrow$ θ 在第三象限

(2)$\therefore$ $\sin\theta<0$，$\cos\theta<0$ $\Rightarrow$ 點 $P(\cos\theta，\sin\theta)$在第三象限

5. 設 $-540°\le x\le 540°$，則滿足 $\cos^{89}x+\cos^{2000}6x+\cos^{365}7x=3$ 的 x 值共有

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5 個

【解答】(C)
【詳解】

$$\begin{array}{rl} & -1 \le \cos^{89}x \le 1 \\ & 0 \le \cos^{2000}6x \le 1 \\ +) & -1 \le \cos^{365}7x \le 1 \\ \hline \end{array}$$

$\therefore\ \cos^{89}x+\cos^{2000}6x+\cos^{365}7x\le 3$

已知 $\cos^{89}x+\cos^{2000}6x+\cos^{365}7x=3$

$\therefore\ \cos^{89}x=1$，$\cos^{2000}6x=1$，$\cos^{365}7x=1 \Rightarrow \cos x=1$，$\cos 6x=\pm 1$，$\cos 7x=1$

$\because\ -540^\circ\le x\le 540^\circ \Rightarrow x=-360^\circ$，$0^\circ$，$360^\circ$共 3 個

6. 複數平面上，滿足 $z^{13}=7+8i$ 的一切複數 z 的圖形爲
(A)一直線　(B)一個圓　(C)一點　(D)正 13 邊形　(E)13 個點

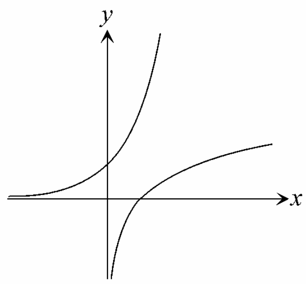
【解答】(E)
【詳解】

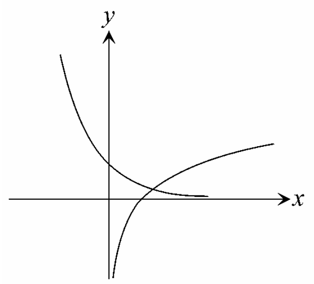
$z^{13}=7+8i=\sqrt{113}\,(\cos\theta+i\sin\theta)$，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$　$\therefore\ \alpha=\sqrt[26]{113}(\cos\dfrac{\theta}{13}+i\sin\dfrac{\theta}{13})$ 爲其一根

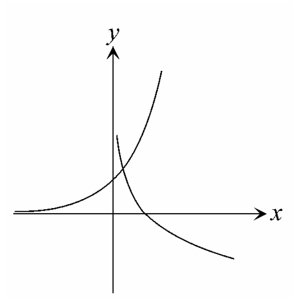
$\therefore\ z^{13}=7+8i$ 的 13 個根爲α，$\alpha\omega$，$\alpha\omega^2$，…，$\alpha\omega^{12}$（$\omega=\cos\dfrac{2\pi}{13}+i\sin\dfrac{2\pi}{13}$）

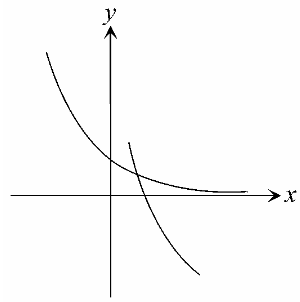
此 13 個根在複數平面的圖形爲正 13 邊形的 13 個頂點

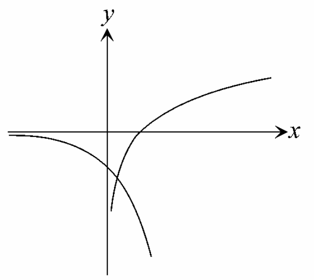
7.（複選）設 $a>0$ 且 $a\ne 1$ 將 $y=a^x$ 與 $y=\log_a x$ 的圖形畫在 xy 坐標平面上，下列何者可能爲其圖形？

(A)


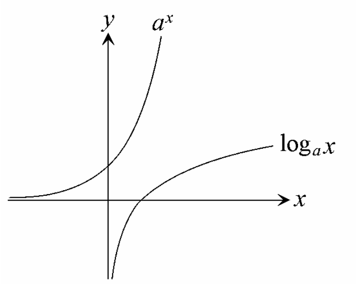
(B)


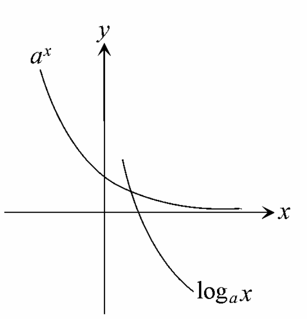
(C)


(D)


(E)


【解答】(A)(D)
【詳解】
(A) $a>1$ 時　　　　(B) $0<a<1$ 時

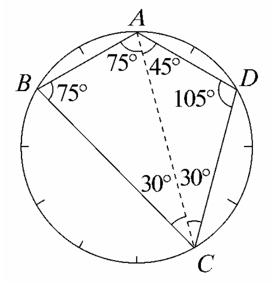




8. （複選）圓內切四邊形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}=\overline{AD}=2$，$\angle C=60°$，$\angle D=105°$，下列何者正確？
(A) $\overline{BD}=2\sqrt{3}$　(B)此圓半徑$=2$　(C) $\overline{AC}=\sqrt{6}-\sqrt{2}$　(D) $\angle ACB=30°$　(E) $\angle CAD=45°$

【解答】(A)(B)(D)(E)

【詳解】



(A) $\overline{BD}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{AD}^2-2\overline{AB}\cdot\overline{AD}\cdot\cos 120°}=\sqrt{4+4+4}=2\sqrt{3}$

(B) $R=\dfrac{\overline{BD}}{2\sin A}=\dfrac{2\sqrt{3}}{2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=2$

(C) $\dfrac{2}{\sin 30°}=\dfrac{\overline{AC}}{\sin 105°}$　$\Rightarrow$　$\overline{AC}=\dfrac{2}{\dfrac{1}{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=\sqrt{6}+\sqrt{2}$

9. （複選）若△ABC 中，a，b，c 分別爲$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 的對邊，則下列敘述何者正確？
(A)若 $\sin^2 A+\sin^2 B=\sin^2 C$，則$\angle C=90°$　(B)若 $\sin A=\dfrac{1}{2}$，則$\angle A=30°$
(C)若 $\cos A<0$，則$\angle A$ 是鈍角　(D) $\sin A+\sin B>\sin C$
(E)若 $c=\sqrt{2}$，$b=1$，$\angle B=30°$，則$\angle C=45°$

【解答】(A)(C)(D)

【詳解】

(A)由正弦定理　$\Rightarrow$　$(\dfrac{a}{2R})^2+(\dfrac{b}{2R})^2=(\dfrac{c}{2R})^2$　$\Rightarrow$　$a^2+b^2=c^2$　$\therefore$　$\angle C=90°$

(B) $\sin A=\dfrac{1}{2}$，則$\angle A=30°$ 或 $150°$

(C) $\cos A<0$，則$\dfrac{\pi}{2}\angle A<\pi$　$\therefore$　$\angle A$ 是鈍角

(D) $a+b>c$　$\Rightarrow$　$\dfrac{a}{2R}+\dfrac{b}{2R}>\dfrac{c}{2R}$　$\Rightarrow$　$\sin A+\sin B>\sin C$

(E)由正弦定理$\dfrac{1}{\sin 30°}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sin C}$　$\Rightarrow$　$\sin C=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　$\therefore$　$\angle C=45°$或 $135°$

10. （複選）θ 是第二象限角，則 $\dfrac{\theta}{3}$ 可能是第幾象限角？

(A)第一象限　(B)第二象限　(C)第三象限　(D)第四象限　(E) $\dfrac{\theta}{3}$ 可能不是象限角

【解答】(A)(B)(D)

【解 1】

$\because$　θ 是第二象限角

$\therefore$　$n(360°)+90°<\theta<n(360°)+180°$，$n\in Z$　$\therefore$　$(120°)n+30°<\dfrac{\theta}{3}<(120°)n+60°$

(1)當 $n=3k$，$k\in Z$ 時，$(360°)k+30°<\dfrac{\theta}{3}<(360°)k+60°$　$\Rightarrow$　$\dfrac{\theta}{3}$ 在第一象限

(2)當 $n=3k+1$，$k\in Z$ 時，$(360°)k+150°<\dfrac{\theta}{3}<(360°)k+180°$　$\Rightarrow$　$\dfrac{\theta}{3}$ 在第二象限

(3)當 $n=3k+2$，$k\in Z$ 時，$(360°)k+270°<\dfrac{\theta}{3}<(360°)k+300°$　$\Rightarrow$　$\dfrac{\theta}{3}$ 在第四象限

二、填充題

1. 利用 $\log 3=0.4771$，$\log 7=0.8451$，

解方程式 $3^x+3^{x+1}+3^{x+2}+3^{x+3}=7^x+7^{x+1}+7^{x+2}+7^{x+3}$，則 $7^x\div 3^x=$ __________；若取三位有效數字（第四位四捨五入），可得 $x=$__________。

【解答】$\dfrac{1}{10}$；-2.72

【詳解】

(1) $3^x+3^{x+1}+3^{x+2}+3^{x+3}=7^x+7^{x+1}+7^{x+2}+7^{x+3}$

$\Rightarrow$　$3^x+3\cdot 3^x+9\cdot 3^x+27\cdot 3^x=7^x+7\cdot 7^x+49\cdot 7^x+343\cdot 7^x$

$\Rightarrow$　$40\cdot 3^x=400\cdot 7^x$　$\Rightarrow$　$7^x\div 3^x=\dfrac{40}{400}=\dfrac{1}{10}$

(2)由 $\dfrac{7^x}{3^x}=\dfrac{1}{10}$　$\Rightarrow$　$\log\dfrac{7^x}{3^x}=\log\dfrac{1}{10}$　$\Rightarrow$　$x(\log 7-\log 3)=-1$

$\Rightarrow$　$x=\dfrac{-1}{\log 7-\log 3}=\dfrac{-1}{0.8451-0.4771}=\dfrac{-1}{0.3680}=-2.72$

2. 解不等式 $\log_{0.1}(x^2-4)-\log_{0.1}(x+2)<0$，得__________。

【解答】$x>3$

【詳解】

$\log_{0.1}(x^2-4)-\log_{0.1}(x+2)<0$，$\begin{cases}x^2-4>0\\x+2>0\end{cases}$　$\Rightarrow$　$x>2$　$\Rightarrow$　$\log_{0.1}\dfrac{x^2-4}{x+2}<\log_{0.1}1$

$\because$　$0<0.1<1$　$\Rightarrow$　$\dfrac{x^2-4}{x+2}>1$　$\Rightarrow$　$\dfrac{(x+2)(x-2)}{x+2}>1$　$\Rightarrow$　$x-2>1$　$\Rightarrow$　$x>3$

$\therefore$　$x>3$

3. 純小數 $(\dfrac{1}{6})^n$ 於小數點後第 15 位才開始出現不為 0 的數字，則正整數 n 之值 $=$ __________。

【解答】18 或 19

【詳解】

$(\frac{1}{6})^n$ 於小數點後第 15 位開始出現不爲 0 的數字 $\Rightarrow$ $\log(\frac{1}{6})^n$ 的首數 $=-15$

$\therefore$ $-15<\log(\frac{1}{6})^n<-14$ $\Rightarrow$ $-15<n(-0.3010-0.4771)<-14$

$\Rightarrow$ $\frac{14}{0.7781}<n<\frac{15}{0.7781}$

$\Rightarrow$ $17.99<n<19.27$ $\therefore$ $n=18$ 或 19 （$\because$ $n\in N$）

4. 無窮等比級數 $1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\cdots$ 之和爲 S，其首 n 項的和爲 S_n，則滿足條件 $|S-S_n|<3^{-12}$ 的最小自然數 $n=$ ＿＿＿＿＿。

【解答】36

【詳解】

$S=1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\cdots=\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=3$，$S_n=1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\cdots+(\frac{2}{3})^{n-1}=\frac{1\cdot[1-(\frac{2}{3})^n]}{1-\frac{2}{3}}=3[1-(\frac{2}{3})^n]$

$\Rightarrow$ $|S-S_n|=3\cdot(\frac{2}{3})^n<3^{-12}$ $\Rightarrow$ $(\frac{2}{3})^n<3^{-13}$ $\Rightarrow$ $n\cdot(\log2-\log3)<(-13)\log3$

$\Rightarrow$ $n(0.3010-0.4771)<(-13)\times0.4771$ $\Rightarrow$ $n>35.\cdots$ $\Rightarrow$ n 最小爲 36

5. 若 $f(x)=2\log(x-1)-\log(x-2)$，$x>2$，則當 $x=$ ＿＿＿＿時，$f(x)$有最小值 $=$ ＿＿＿＿。

【解答】3；log4

【詳解】

$f(x)=2\log(x-1)-\log(x-2)$，$x>2=\log(x-1)^2-\log(x-2)=\log\frac{(x-1)^2}{x-2}$

$\because$ $\frac{(x-1)^2}{x-2}=\frac{[(x-2)+1]^2}{x-2}=(x-2)+2+\frac{1}{(x-2)}\geq2\sqrt{(x-2)\cdot\frac{1}{(x-2)}}+2=4$（$\because$ $x>2$）

$\therefore$ $f(x)$有最小值 $=\log4$，又「=」成立時，$x-2=\frac{1}{x-2}$ $\Rightarrow$ $(x-2)^2=1$

$\Rightarrow$ $x-2=\pm1$ $\Rightarrow$ $x=3$ 或 $x=1$（不合），故當 $x=3$ 時，$f(x)$有最小值 $=\log4$

6. 設 x，y，$z>1$，$a>0$，已知 $\log_x a=40$，$\log_y a=60$，$\log_{xyz}a=8$，則 $\log_z a=$ ＿＿＿＿＿。

【解答】12

【詳解】

$\log_x a=40$ $\Rightarrow$ $x^{40}=a$ $\Rightarrow$ $x=a^{\frac{1}{40}}$，$\log_y a=60$ $\Rightarrow$ $y^{60}=a$ $\Rightarrow$ $y=a^{\frac{1}{60}}$

$\log_{xyz}a=8$ $\Rightarrow$ $(xyz)^8=a$ $\Rightarrow$ $(a^{\frac{1}{40}}\cdot a^{\frac{1}{60}}\cdot z)^8=a$ $\Rightarrow$ $a^{\frac{1}{5}+\frac{2}{15}}\cdot z^8=a$ $\Rightarrow$ $z^8=a^{1-\frac{1}{5}-\frac{2}{15}}=a^{\frac{2}{3}}$

$\Rightarrow$ $z=(a^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{8}}=a^{\frac{1}{12}}$ $\therefore$ $\log_z a=\log_{a^{\frac{1}{12}}}a=\frac{1}{\frac{1}{12}}\log_a a=12$

7. 若 a，b，c，d，e 均爲不等於 1 的正數，且 $a^2=c^3$，$c^2=e^5$，
則 $\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c d\cdot\log_d e$ 之值 $=$ ＿＿＿＿＿。

【解答】$\frac{4}{15}$

【詳解】

$$\begin{cases}a^2=c^3\\c^2=e^5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^4=c^6\\c^6=e^{15}\end{cases}\Rightarrow a^4=e^{15}\Rightarrow e=a^{\frac{4}{15}}$$

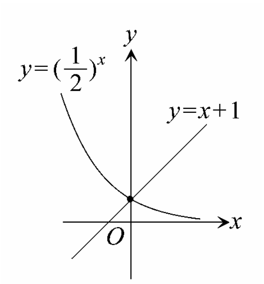
$\therefore\ \log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c d\cdot\log_d e=\log_a e=\log_a a^{\frac{4}{15}}=\dfrac{4}{15}$

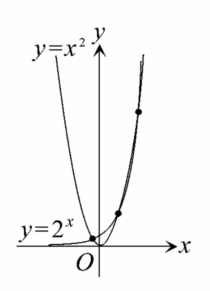
8. 方程式的實根個數：

(1)方程式$(\dfrac{1}{2})^x=x+1$的實根共有__________個。(2)方程式$x^2=2^x$的實根共有________個。

【解答】(1) 1　(2) 3

【詳解】





9. 設$f(x)=\dfrac{2^x+2^{-x}}{2^x-2^{-x}}$，$x\in R$，若$f(a)=4$，$f(b)=3$，則

(1)$f(2a)=$ __________。　(2)$f(a+b)=$ __________。

【解答】(1)$\dfrac{17}{8}$　(2)$\dfrac{13}{7}$

【詳解】

$\because\ f(x)=\dfrac{2^x+2^{-x}}{2^x-2^{-x}}=\dfrac{2^{2x}+1}{2^{2x}-1}\Rightarrow 2^{2x}=\dfrac{f(x)+1}{f(x)-1}$

$\therefore\ 2^{2a}=\dfrac{f(a)+1}{f(a)-1}=\dfrac{4+1}{4-1}=\dfrac{5}{3}$，$2^{2b}=\dfrac{f(b)+1}{f(b)-1}=\dfrac{3+1}{3-1}=2$

$\therefore\ (1)f(2a)=\dfrac{2^{4a}+1}{2^{4a}-1}=\dfrac{(\frac{5}{3})^2+1}{(\frac{5}{3})^2-1}=\dfrac{17}{8}$，$(2)f(a+b)=\dfrac{2^{2a+2b}+1}{2^{2a+2b}-1}=\dfrac{\frac{5}{3}\times2+1}{\frac{5}{3}\times2-1}=\dfrac{13}{7}$

10.$m\in N$，已知將2^{-19}以有限小數表示得$0.a_1a_2a_3\cdots a_m$，其中$a_i\in\{0，1，2，\cdots，9\}$，$i=1，2，\cdots，m$，$a_m\neq0$，則數對$(m，a_m)=$ __________。

【解答】(19，5)

【詳解】

$2^{-19}=(\dfrac{1}{2})^{19}=(\dfrac{5}{10})^{19}=\dfrac{5^{19}}{10^{19}}$　$\because$　5^{19}之個位數爲 5　$\therefore$　$a_m=5$

$\because\ \dfrac{a}{10}=0.a\Rightarrow\dfrac{a}{10^{19}}=0.\overbrace{00\cdots0a}^{19位}$，$a\in\{0，1，2，\cdots，9\}$

而$5^{19}<10^{19}$　$\therefore$　$2^{-19}=0.\overbrace{a_1a_2\cdots a_m}^{19位}\Rightarrow m=19$

11.設$x^2-(\tan\theta+\cot\theta)x+1=0$有一根爲$3-\sqrt{2}$，則$\sin\theta\cos\theta$之值爲__________。

【解答】$\dfrac{4+\sqrt{2}}{12}$

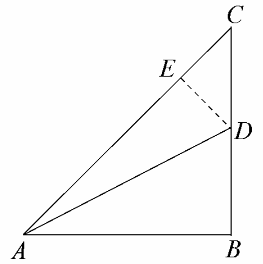
【詳解】

設另一根爲α　∴　兩根之積$(3-\sqrt{2})\alpha=1$　∴　$\alpha=\dfrac{1}{3-\sqrt{2}}=\dfrac{3+\sqrt{2}}{7}$

∴　兩根之和 $=\tan\theta+\cot\theta=(3-\sqrt{2})+\dfrac{3+\sqrt{2}}{7}$

$\Rightarrow$　$\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}=\dfrac{24-6\sqrt{2}}{7}$　$\Rightarrow$　$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{7}{24-6\sqrt{2}}=\dfrac{4+\sqrt{2}}{12}$

12 設等腰$\triangle ABC$中，$\angle B=90°$，若D是$\overline{BC}$的中點，則$\tan\angle BAD=$ ____，又$\tan\angle CAD=$ ____。



【解答】$\dfrac{1}{2}$；$\dfrac{1}{3}$

【詳解】

如右上圖所示：在$\triangle ABC$中，$\overline{AB}=\overline{BC}$，而$\angle B=90°$，故$\overline{AC}=\sqrt{2}\overline{BC}$

過D作$\overline{DE}\perp\overline{AC}$，令其垂足爲$E$，已知$D$爲$\overline{BC}$中點，故知

$\overline{DE}=\overline{EC}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\overline{CD}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\overline{BC}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}\overline{AC}=\dfrac{1}{4}\overline{AC}$

又$\overline{AE}=\overline{AC}-\overline{EC}=\overline{AC}-\dfrac{1}{4}\overline{AC}=\dfrac{3}{4}\overline{AC}$

$\tan\angle BAD=\dfrac{\overline{BD}}{\overline{AB}}=\dfrac{\frac{1}{2}\overline{BC}}{\overline{AB}}=\dfrac{1}{2}$，$\tan\angle CAD=\dfrac{\overline{DE}}{\overline{AE}}=\dfrac{\frac{1}{4}\overline{AC}}{\frac{3}{4}\overline{AC}}=\dfrac{1}{3}$

13.無窮級數$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\cos 30°)^{n-1}$的和爲 __________。

【解答】$4+2\sqrt{3}$

【詳解】

因爲$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\cos 30°)^{n-1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\dfrac{\sqrt{3}}{2})^{n-1}=\dfrac{1}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{2}{2-\sqrt{3}}=\dfrac{2\cdot(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})\cdot(2+\sqrt{3})}=4+2\sqrt{3}$

故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\cos 30°)^{n-1}=4+2\sqrt{3}$

14.化簡下列各值：

(1)$\dfrac{1}{1+\sin^3\theta}+\dfrac{1}{1+\cos^3\theta}+\dfrac{1}{1+\tan^3\theta}+\dfrac{1}{1+\cot^3\theta}+\dfrac{1}{1+\sec^3\theta}+\dfrac{1}{1+\csc^3\theta}=$__________。

(2) $2(1-\tan^4\theta)\cos^2\theta+2\sin^2\theta\sec^2\theta=$__________。

【解答】(1) 3　(2) 2

【詳解】

(1)原式 $=\dfrac{1}{1+\sin^3\theta}+\dfrac{1}{1+\cos^3\theta}+\dfrac{1}{1+\tan^3\theta}+\dfrac{1}{1+\frac{1}{\tan^3\theta}}+\dfrac{1}{1+\frac{1}{\cos^3\theta}}+\dfrac{1}{1+\frac{1}{\sin^3\theta}}$

$=\dfrac{1}{1+\sin^3\theta}+\dfrac{1}{1+\cos^3\theta}+\dfrac{1}{1+\tan^3\theta}+\dfrac{\tan^3\theta}{1+\tan^3\theta}+\dfrac{\cos^3\theta}{1+\cos^3\theta}+\dfrac{\sin^3\theta}{1+\sin^3\theta}$

$=\dfrac{1+\sin^3\theta}{1+\sin^3\theta}+\dfrac{1+\cos^3\theta}{1+\cos^3\theta}+\dfrac{1+\tan^3\theta}{1+\tan^3\theta}=1+1+1=3$

(2)原式$=2(1+\tan^2\theta)(1-\tan^2\theta)\cos^2\theta+2\sin^2\theta\cdot\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

$=2\sec^2\theta(1-\tan^2\theta)\cos^2\theta+2(\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta})^2=2(1-\tan^2\theta)+2\tan^2\theta=2$

15.設 θ，ϕ 爲銳角，若 $\theta+\phi=90°$，則 $\sin\theta\cos\phi+\cos\theta\sin\phi=$ ＿＿＿＿＿ 。

【解答】1

【詳解】

$\because\ \theta+\phi=90°\quad\therefore\ \phi=90°-\theta$，故由餘角公式得知

$\sin\theta\cos\phi+\cos\theta\sin\phi=\sin\theta\cos(90°-\theta)+\cos\theta\sin(90°-\theta)$

$=\sin\theta\sin\theta+\cos\theta\cos\theta=\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

16.設 $t\in R$，$2^{2x}-t\cdot 2^{x+1}-2t+3=0$ 有相異二實根，求 t 之範圍爲＿＿＿＿＿ 。

【解答】$1<t<\dfrac{3}{2}$

【詳解】

$(2^x)^2-2t\cdot 2^x-(2t-3)=0$，令 $2^x=y\quad\therefore\ y^2-2ty-(2t-3)=0$ 有相異二正根

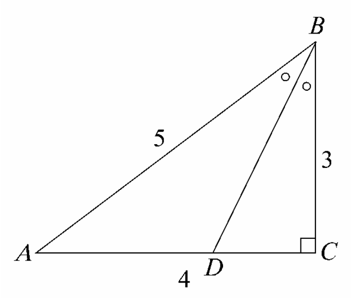
$\therefore$ 判別式$\triangle=t^2+(2t-3)>0\ \Rightarrow\ (t+3)(t-1)>0\ \Rightarrow\ t<-3$ 或 $t>1$

二根之和 $=2t>0\ \Rightarrow\ t>0$，二根之積 $=-(2t-3)>0\ \Rightarrow\ 2t-3<0\ \Rightarrow\ t<\dfrac{3}{2}$

故 $1<t<\dfrac{3}{2}$

17.$\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=5$，$\overline{BC}=3$，$\overline{CA}=4$，$\angle B$ 的分角線交 $\overline{AC}$ 於 D，則

(1) $\cos B=$ ＿＿＿＿＿ 。 (2) $\tan\angle DBC=$ ＿＿＿＿＿ 。



【解答】(1)$\dfrac{3}{5}$ (2)$\dfrac{1}{2}$

【詳解】

(1)$\triangle ABC$ 中，$\overline{BC}^2+\overline{CA}^2=9+16=25=\overline{AB}^2$

$\therefore\ \angle C=90°\ \Rightarrow\ \cos B=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\dfrac{3}{5}$

(2)$\because\ \overline{BD}$ 爲$\angle B$ 之分角線 $\therefore\ \overline{AD}:\overline{DC}=\overline{AB}:\overline{BC}=5:3$

$\Rightarrow\ \overline{CD}=4\times\dfrac{3}{8}=\dfrac{3}{2}$，故 $\tan\angle DBC=\dfrac{\overline{CD}}{\overline{BC}}=\dfrac{\frac{3}{2}}{3}=\dfrac{1}{2}$

18.在$\triangle ABC$ 中，$a=2$，$c=1$，若$\triangle ABC$ 的面積最大，試求此時 b 邊的長。＿＿＿＿＿＿

【解答】$b=\sqrt{5}$

【詳解】

令 $s=\dfrac{1}{2}(a+b+c)=\dfrac{1}{2}(b+3)$，其中 $1<b<3$。由海龍（Heron）面積公式知：

$\triangle=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{\dfrac{b+3}{2}\cdot\dfrac{b-1}{2}\cdot\dfrac{3-b}{2}\cdot\dfrac{b+1}{2}}$

$=\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{4}\sqrt{-b^4+10b^2-9}=\dfrac{1}{4}\sqrt{16-(b^2-5)^2}\le 1$

故當 $b^2=5$，即 $b=\sqrt{5}$ 時，$\triangle ABC$ 有最大面積 1

19.若 θ 是第二象限角，則 $\dfrac{\theta}{3}$ 可能為第幾象限角？

【解答】一、二、四

【詳解】

因為 θ 是第二象限角，所以 $2k\pi+\dfrac{\pi}{2}<\theta<2k\pi+\pi$，$k\in Z$ $\Rightarrow$ $\dfrac{2k\pi}{3}+\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{\theta}{3}<\dfrac{2k\pi}{3}+\dfrac{\pi}{3}$

由於 k 為整數，因此

①當 $k=3n$ 時，則 $2n\pi+\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{\theta}{3}<2n\pi+\dfrac{\pi}{3}$，故 $\dfrac{\theta}{3}$ 為第一象限角

②當 $k=3n+1$ 時，則 $2n\pi+\dfrac{5\pi}{6}<\dfrac{\theta}{3}<2n\pi+\pi$，故 $\dfrac{\theta}{3}$ 為第二象限角

③當 $k=3n+2$ 時，則 $2n\pi+\dfrac{3\pi}{2}<\dfrac{\theta}{3}<2n\pi+\dfrac{5\pi}{3}$，故 $\dfrac{\theta}{3}$ 為第四象限角

n 為整數，綜合①②及③的討論，可知：$\dfrac{\theta}{3}$ 可能為第一、二、四象限角