高雄市明誠中學 高三數學平時測驗 日期：96.04.24					
範圍	Book1 all	班級	普三 班	姓名	
		座號			

一、選擇題

1. 若 $a_{n+1} \geq a_n$，$\forall n \in N$，則稱數列$<a_n>$為增數列。已知$<\dfrac{an+b}{cn+d}>$為增數列，其中 a，b，c，d 均為正數，則(A) $bd \geq ac$ (B) $ac \geq bd$ (C) $bc \geq ad$ (D) $ad \geq bc$ (E) $ab \geq cd$

【解答】(D)

【詳解】

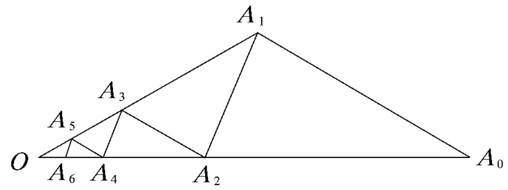
$\because$ $<\dfrac{an+b}{cn+d}>$為增數列 $\therefore$ $\dfrac{a(n+1)+b}{c(n+1)+d} \geq \dfrac{an+b}{cn+d}$，$\forall n \in N$

$\therefore$ $[a(n+1)+b](cn+d) \geq [c(n+1)+d](an+b)$

即 $acn(n+1)+ad(n+1)+bcn+bd \geq acn(n+1)+bc(n+1)+adn+bd$

$\therefore$ $adn+ad+bcn \geq bcn+bc+adn \Rightarrow ad \geq bc$

2. 在下圖中，$\triangle OA_0A_1$是一底角為 30°而腰長為 1 的等腰三角形。已知$\angle OA_1A_2 = 30°$，線段$\overline{A_0A_1}$，$\overline{A_2A_3}$，$\overline{A_4A_5}$，…互相平行，且線段$\overline{A_1A_2}$，$\overline{A_3A_4}$，$\overline{A_5A_6}$，…也互相平行。試問：



(1)比值$\overline{A_1A_2}$ ： $\overline{A_0A_1}$ 等於多少？

(A)$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ (B)$\dfrac{1}{2}$ (C)$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (D)$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (E)$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(2) $\overline{A_0A_1}$，$\overline{A_1A_2}$，$\overline{A_2A_3}$，$\overline{A_3A_4}$，…，$\overline{A_{n-1}A_n}$，…的長度之和等於多少？

(A)$\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$ (B)$\dfrac{2}{2-\sqrt{3}}$ (C) 2 (D)$\dfrac{2}{2-\sqrt{2}}$ (E)$\dfrac{4}{4-\sqrt{3}}$

(3)$\triangle A_1A_2A_3$的面積為何？

(A)$\dfrac{1}{16}$ (B)$\dfrac{3\sqrt{3}}{16}$ (C)$\dfrac{\sqrt{2}}{8}$ (D)$\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$ (E)$\dfrac{\sqrt{3}}{18}$

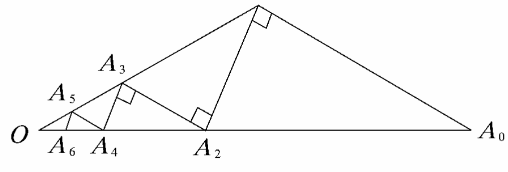
(4)三角形$\triangle A_1A_2A_3$，$\triangle A_3A_4A_5$，$\triangle A_5A_6A_7$，…，$\triangle A_{2n-1}A_{2n}A_{2n+1}$，…的面積之和等於多少？

(A)$\dfrac{\sqrt{3}}{16}$ (B)$\dfrac{\sqrt{3}}{12}$ (C)$\dfrac{3\sqrt{3}}{7}$ (D)$\dfrac{\sqrt{2}}{6}$ (E)$\dfrac{3\sqrt{3}}{16}$

【解答】(1) (D) (2) (A) (3) (E) (4) (A)

【詳解】

如下圖



在$\triangle OA_0A_1$中　∵　$\angle A_1OA_0=\angle A_1A_0O=30°$　∴　$\angle OA_1A_0=120°$

∵　$\angle OA_1A_2=30°$　∴　$\angle A_2A_1A_0=90°$，其次，因爲$\overline{A_0A_1}$，$\overline{A_2A_3}$，$\overline{A_4A_5}$，…互相平行且線段$\overline{A_1A_2}$，$\overline{A_3A_4}$，$\overline{A_5A_6}$，…也互相平行，則得

$\overline{A_1A_2}=\overline{A_1A_0}\tan 30°=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$\overline{A_2A_3}=\overline{A_1A_2}\tan 30°=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{1}{3}$

$\overline{A_3A_4}=\overline{A_2A_3}\tan 30°=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$，$\overline{A_4A_5}=\overline{A_3A_4}\tan 30°=\dfrac{1}{3\sqrt{3}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{1}{9}$

⋮

於是可得

(1) $\overline{A_1A_2}:\overline{A_0A_1}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}:1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

(2) $\overline{A_0A_1}+\overline{A_1A_2}+\overline{A_2A_3}+\overline{A_3A_4}+\cdots+\overline{A_{n-1}A_n}+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}(\dfrac{1}{\sqrt{3}})^{k-1}=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{\sqrt{3}}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$

(3) $\triangle A_1A_2A_3=\dfrac{1}{2}\overline{A_1A_2}\times\overline{A_2A_3}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{18}$

(4)首先因爲$\triangle A_1A_2A_3\sim\triangle A_3A_4A_5\sim\triangle A_5A_6A_7\sim\cdots\sim$
$\triangle A_{2n-1}A_{2n}A_{2n+1}\sim\cdots$

而公比 $r=\dfrac{\triangle A_3A_4A_5}{\triangle A_1A_2A_3}=(\dfrac{\overline{A_3A_4}}{\overline{A_1A_2}})^2=(\dfrac{\frac{1}{3\sqrt{3}}}{\frac{1}{\sqrt{3}}})^2=\dfrac{1}{9}$

故所求的面積爲$\triangle A_1A_2A_3+\triangle A_3A_4A_5+\triangle A_5A_6A_7+\cdots+\triangle A_{2n-1}A_{2n}A_{2n+1}+\cdots$

$=\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{3}}{18}\cdot(\dfrac{1}{9})^{k-1}=\dfrac{\sqrt{3}}{18}\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{9}}=\dfrac{\sqrt{3}}{16}$

3. 設平面上的 n 條直線最多可把平面分割成 a_n 個區域，則下列何者正確？

(A) $a_3=6$　(B) $a_5=15$　(C) $a_n=a_{n-1}+n$　(D) $a_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

【解答】(C)

【詳解】

一條直線把平面分割成 2 個區域　∴　$a_1=2$

當 n 條直線把平面分割成 a_n 個區域時，若再加一條直線，則這直線和原來 n 條直線各有一個交點，共得 n 個交點，這 n 個交點把新加的直線分成 $n+1$ 段，每一段表一個區域被這段分成兩個區域，所以新加這條直線，則增加 $n+1$ 個區域

故 $a_{n+1}=a_n+n+1$

由 $a_{n+1}=a_n+n+1$

∴　$a_{n+1}-a_n=n+1$

即　$a_2-a_1=2$

$a_3-a_2=3$

$a_4-a_3=4$

⋮

$$
\begin{array}{l}
+)\quad a_n - a_{n-1} = n \\
\hline
\quad a_n - a_1 = 2 + 3 + 4 + \cdots + n
\end{array}
$$

$a_n = 2 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = 2 + \dfrac{(2+n)(n-1)}{2} = \dfrac{n^2+n+2}{2}$

(A) $a_3 = \dfrac{3^2+3+2}{2} = 7 \neq 6$，故(A)不正確　(B) $a_5 = \dfrac{5^2+5+2}{2} = 16 \neq 15$，故(B)不正確

(C) $a_n = a_{n-1} + n$，故(C)正確　(D) $a_n = \dfrac{n^2+n+2}{2} \neq \dfrac{n(n+1)}{2}$，故(D)不正確

4. 設α，β為 $x^2 + 6x + 4 = 0$ 之二根，則$(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 =$？

(A) -2　(B) -4　(C) -6　(D) -8　(E) -10

【解答】(E)

【詳解】

$\because$ α，β是 $x^2 + 6x + 4 = 0$ 之二根　$\therefore$ $\alpha + \beta = -6$，$\alpha\beta = 4$ $\Rightarrow$ $\alpha < 0$，$\beta < 0$

$\therefore$ $(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 = \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha}\ \sqrt{\beta} = (\alpha + \beta) - 2\sqrt{\alpha\beta} = (-6) - 2\sqrt{4} = -6 - 4 = -10$

5. 設 a，b，$c \in R$ 且 $a \neq 0$，$f(x) = ax^2 + bx + c$，$\delta = b^2 - 4ac$，若$\forall x \in R$，$f(x)$恆大於 0，則

(A) $a > 0$，$\delta > 0$　(B) $a < 0$，$\delta < 0$　(C) $a > 0$，$\delta < 0$　(D) $a < 0$，$\delta > 0$　(E)以上皆非

【解答】(C)

【詳解】$f(x) = ax^2 + bx + c > 0$，$\forall x \in R$ 恆成立　$\Leftrightarrow$　$a > 0$ 且 $b^2 - 4ac < 0$

6. 設函數$f(x)$滿足$f(x) + 1 = f(x+1)$，$f(1) = 10$，若$f(n) = 351$，則 $n =$

(A) 341　(B) 342　(C) 343　(D) 344　(E) 345

【解答】(B)

【詳解】

$$
\begin{array}{l}
f(1) + 1 = f(2) \\
f(2) + 1 = f(3) \\
f(3) + 1 = f(4) \\
\quad\vdots \\
+)\, f(n-1) + 1 = f(n) \\
\hline
f(1) + (n-1) = f(n)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
\therefore\ 10 + (n-1) = 351 \\
\therefore\ n = 342
\end{array}
$$

7. 級數 $1 + \underbrace{2+2}_{2個} + \underbrace{3+3+3}_{3個} + \underbrace{4+4+4+4}_{4個} + \cdots + \underbrace{n+n+\cdots+n}_{n個} + \cdots$，其前 100 項的和為

(A) 945　(B) 932　(C) 919　(D) 906　(E) 893

【解答】(A)

【詳解】

(1)設第 100 項為 k

則 $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + (k-1) < 100$ $\Rightarrow$ $\dfrac{1}{2}(k-1)k < 100$ $\Rightarrow$ $k^2 - k - 200 < 0$

$\Rightarrow$ $(k - \dfrac{1+\sqrt{801}}{2})(k - \dfrac{1-\sqrt{801}}{2}) < 0$ $\Rightarrow$ $\dfrac{1-\sqrt{801}}{2} < k < \dfrac{1+\sqrt{801}}{2} \doteqdot 14.\cdots$

$\therefore$ $k = 14$

(2)前 100 項的和為 $1 + \underbrace{2+2}_{2個} + \underbrace{3+3+3}_{3個} + \cdots + \underbrace{13+\cdots+13}_{13個} + \underbrace{14+\cdots+14}_{9個}$

$= 1^2 + 2^2 + \cdots + 13^2 + 14 \times 9 = 819 + 126 = 945$

【註】$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$

8. (複選)設 a，b，q，r 均爲整數，且 $a > b > 0$，記號$(x，y)$表示整數 x，y 的最大公因數，記號$[x，y]$表示整數 x，y 的最小公倍數，且 $a = bq + r$，則下列各敘述何者不爲真？

(A)若$(a，b) = 1$，則$[a，b] = ab$　(B) $[a，b] = \dfrac{ab}{(a，b)}$　(C) $(a，b) = (b，r)$

(D) $(a，b) = (q，r)$　(E) $[a，b] \geq ab$

【解答】(D)(E)

【詳解】

由$(a，b)[a，b] = |ab|$　$\because$　$a > b > 0$　$\therefore$　$(a，b)[a，b] = ab$

(A)$\because$　$(a，b) = 1$　$\therefore$　$[a，b] = ab$ 爲真

(B)$[a，b] = \dfrac{ab}{(a，b)}$爲真

(C)$\because$　$a = bq + r$　$\therefore$　由歐幾里得輾轉相除法原理知$(a，b) = (b，r)$爲真

(D)不真，如 $35 = 10 \times 3 + 5$　$\Rightarrow$　$(35，10) = (10，5) = 5$，但$(35，10) \neq (3，5)$

(E)不真，如 $a = 6$，$b = 4$，$[6，4] = 12 < 6 \times 4$

9. (複選)桌上放有編號分別爲 1 到 200 的卡片共 200 張，若甲從中拿走了編號爲 6 的倍數的卡片，乙再從剩下的卡片中拿走編號爲 4 的倍數的卡片，下列何者爲真？

(A)編號 100 的卡片在乙手上　(B)編號 60 的卡片在乙手上　(C)編號 150 的卡片還在桌上

(D)甲拿走的卡片比乙多　(E)桌上剩下的卡片超過 120 張

【解答】(A)(E)

【詳解】

(A)對。100 爲 4 的倍數，所以在乙手上

(B)錯。60 雖爲 4 和 6 的倍數，但甲先取，故在甲手上

(C)錯。150 的卡片在甲手上

(D)錯。甲拿走$[\dfrac{200}{6}] = 33$ 張卡片，乙拿走$[\dfrac{200}{4}] - [\dfrac{200}{12}] = 50 - 16 = 34$ 張卡片

故甲拿走之卡片比乙少

(E)對。桌上剩下卡片張數爲 $200 - ([\dfrac{200}{4}] + [\dfrac{200}{6}] - [\dfrac{200}{12}]) = 133 > 120$

10. (複選)若 a，b，c 均是有理數之二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ 有兩根爲α，β，則下列何者正確？

(A) $ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)(x-\beta)$　(B)兩根爲α，β必皆是有理數　(C)兩根的和$\alpha + \beta$必是有理數　(D)兩根的積$\alpha\beta$必是有理數

【解答】(A)(C)(D)

【詳解】

(A)對。$\because$　二根爲α，β　$\therefore$　$ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)(x-\beta)$

(B)錯。$ax^2 + bx + c = 0$ 之二根爲$\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

若 $b^2 - 4ac$ 不爲完全平方數，則兩根爲α，β不是有理數

(C)對。$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$爲有理數

(D)對。$\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$爲有理數

11. (複選)平面坐標系中，下列敘述何者正確？

(A)點 $P(x_0,y_0)$對 x 軸的對稱點爲$(-x_0,y_0)$　(B)點 $P(x_0,y_0)$對 y 軸的對稱點爲$(x_0,-y_0)$　(C)點 $P(x_0，y_0)$對原點的對稱點爲$(-x_0，-y_0)$　(D)點 $P(x_0，y_0)$對直線 $y=x$ 的對稱點爲$(y_0，x_0)$　(E)點 $P(x_0，y_0)$對直線 $y=-x$ 的對稱點爲$(-y_0，-x_0)$

【解答】(C)(D)(E)

【詳解】

(A)點 $P(x_0，y_0)$對 x 軸的對稱點爲$(x_0，-y_0)$

(B)點 $P(x_0，y_0)$對 y 軸的對稱點爲$(-x_0，y_0)$

(C)點 $P(x_0，y_0)$對原點的對稱點爲$(-x_0，-y_0)$

(D)點 $P(x_0，y_0)$對直線 $y=x$ 的對稱點爲$(y_0，x_0)$

(E)點 $P(x_0，y_0)$對直線 $y=-x$ 的對稱點爲$(-y_0，-x_0)$

12. (複選)設 $A=\{3，4，\{3\}，\{3，4\}，5\}$，則下列敘述何者是正確的？

(A) $3\in A$　(B) $\{3\}\in A$　(C) $\{3，4\}\in A$　(D) $\{\{3，4\}\}\subset A$　(E) $\{4，5\}\in A$

【解答】(A)(B)(C)(D)

【詳解】

集合 A 中有 5 個元素，其中包含三個自然數 3，4，5 及二個集合$\{3\}$，$\{3，4\}$，

3，$\{3\}$，$\{3，4\}$均爲其元素，故(A)，(B)，(C)均爲正確

$\{3，4\}$爲其元素，故$\{\{3，4\}\}\subset A$，故(D)爲正確

4，5 爲其元素，故$\{4，5\}\subset A$，故(E)爲不正確

13. (複選)一元二次方程式 $x^2+2kx-k+6=0$，$k\in R$ 的兩根均爲負根，則 k 可能爲下列哪一個值？(A) $\dfrac{3}{2}$　(B) -5　(C) $\dfrac{7}{3}$　(D) $\sqrt{10}$　(E) $2-\sqrt{3}$

【解答】(C)(D)

【詳解】

$\because$　$x^2+2kx-k+6=0$ 的兩根均爲負

$$\therefore \begin{cases}(2k)^2-4(-k+6)\ge 0\\ -2k<0\\ -k+6>0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}k\ge 2\text{或}k\le -3\\ k>0\\ k<6\end{cases}$$

$\Rightarrow$　$2\le k<6$　$\therefore$　其中 $k=\dfrac{7}{3}$ 及 $\sqrt{10}$ 滿足 k 之範圍，故選(C)(D)

14. (複選)設 $a，b\in R$，若多項式 $f(x)=(x-6)^{30}+ax+b$ 可析出 $x-5$ 與 $x-7$ 兩個因式，則

(A) $a=0$　(B) $b=-1$　(C) $x-6$ 除 $f(x)$之餘式爲 -1　(D) $x-4$ 除 $f(x)$之餘式爲 1027

(E) $x-8$ 除 $f(x)$之餘式爲 $f(4)$

【解答】(A)(B)(C)(E)

【詳解】

(1) $f(x)$有 $x-5$，$x-7$ 兩個因式

$\therefore$　$f(5)=0$，$f(7)=0$

$\therefore\quad 5a+b+1=0$，$7a+b+1=0\quad\therefore\quad a=0$，$b=-1$

(2)$\therefore\quad x-6$ 除 $f(x)$ 餘式為 $f(6)=6a+b=-1$

$x-4$ 除 $f(x)$ 餘式為 $f(4)=2^{30}+4a+b=2^{30}-1\neq 1027$

$x-8$ 除 $f(x)$ 餘式為 $f(8)=2^{30}+8a+b=2^{30}-1=f(4)$

15. (複選)下列各數列何者一定收斂？

(A) $a_n=\dfrac{1}{n}$ (B) $b_n=ar^{n-1}$ (C) $c_n=(-1)^n$ (D) $d_n=7+(-\dfrac{1}{2})^n$ (E) $e_n=\dfrac{3^n+2^n}{6^n}$

【解答】(A)(D)(E)

【詳解】

(A)正確：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$，收斂 (B)錯誤：$b_n=ar^{n-1}$，當 $|r|\leq 1$ 時才收斂，否則發散

(C)錯誤：$<c_n>=<-1$，1，-1，1，$\cdots>$，發散 (D)正確：$\lim\limits_{n\to\infty}[7+(-\dfrac{1}{2})^n]=7$

(E)正確：$\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{3^n+2^n}{6^n})=\lim\limits_{n\to\infty}[\dfrac{\frac{(3^n+2^n)}{6^n}}{\frac{6^n}{6^n}}]=\dfrac{0+0}{1}=0$，收斂

二、填充題

1. 設 $x\in Z$，若 x^4+x^2+1 為質數，則 $x=$__________，此質數為__________。

【解答】± 1，3

【詳解】

$\because\quad x^4+x^2+1=(x^2+1-x)(x^2+1+x)$

$x^2-x+1=1\quad\Rightarrow\quad x=0$，1（0 不合），$x^2+x+1=1\quad\Rightarrow\quad x=0$，$-1$（0 不合）

$\Rightarrow\quad x=\pm 1$，$p=3$

2. $|2x+5|+|2x-1|=6$ 之解集合為__________。

【解答】$\dfrac{-5}{2}\leq x\leq\dfrac{1}{2}$

【詳解】

$|2x+5|+|2x-1|=|2x+5|+|1-2x|\geq|2x+5+1-2x|=6$

此時$(2x+5)(1-2x)\geq 0$，即$(2x+5)(2x-1)\leq 0\quad\Rightarrow\quad\dfrac{-5}{2}\leq x\leq\dfrac{1}{2}$

3. 不論 k 為任何實數，直線 L_k：$x+y-11+k(x-y+5)=0$ 恆過一定點 P，

(1)此定點 P 的坐標為__________。

(2)如果直線 L_k 與 y 軸平行，則 $k=$ __________。

(3)如果三直線：L_k，x 軸及 $y=x$ 不能圍成一三角形，則 k 可能值為__________。

【解答】(1) (3，8) (2) 1 (3)$\dfrac{11}{5}$，-1

【詳解】

(1) L_k：$x+y-11+k(x-y+5)=0$ 恆成立，則$\begin{cases}x+y-11=0\\x-y+5=0\end{cases}$，得$\begin{cases}x=3\\y=8\end{cases}$，即定點 $P(3$，$8)$

(2) L_k：$(k+1)x+(1-k)y+(5k-11)=0$，若 $L_k\parallel y$ 軸，則斜率$\dfrac{k+1}{k-1}$不存在，得 $k=1$

(3) L_k，x 軸，$y=x$ 三直線之斜率分別爲 $\dfrac{k+1}{k-1}$，0，1

①若 L_k // x 軸，則 $k+1=0$，得 $k=-1$

②若 L_k // $y=x$，則 $\dfrac{k+1}{k-1}=1 \quad \Rightarrow \quad$ 無解

③若 L_k 通過 x 軸及 $y=x$ 之交點(0，0)，則 $k=\dfrac{11}{5}$，此時三直線交於一點，不能構成三角形

由①，②，③可知 $k=-1$，$\dfrac{11}{5}$ 時，L_k，x 軸及 $y=x$ 不能圍成一三角形

4. $i=\sqrt{-1}$，求 $1+2i+3i^2+4i^3+\cdots+100i^{99}$ 之和爲__________。

【解答】$-50(1+i)$

【詳解】

$$\begin{array}{rl} S = & 1+2i+3i^2+4i^3+\cdots+99i^{98}+100i^{99} \\ -)\ iS = & \quad i+2i^2+3i^3+\cdots\cdots\cdots+99i^{99}+100i^{100} \\ \hline (1-i)\,S = & (1+i+i^2+i^3+\cdots\cdots\cdots+i^{99})-100i^{100} \end{array}$$

$(1-i)S=\dfrac{1-i^{100}}{1-i}-100 \quad \Rightarrow \quad (1-i)S=-100 \quad \Rightarrow \quad S=\dfrac{-100}{1-i}=-50(1+i)$

5. 一數列寫成 1，$\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{2}{1}$，$\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{2}{2}$，$\dfrac{3}{1}$，$\dfrac{1}{4}$，$\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{3}{2}$，$\dfrac{4}{1}$，$\dfrac{1}{5}$，$\dfrac{2}{4}$，$\dfrac{3}{3}$，$\dfrac{4}{2}$，$\dfrac{5}{1}$，…，按此規則推算下去，則 $\dfrac{7}{10}$ 應是第__________項。

【解答】127

【詳解】

(1)此數列分子與分母之和爲 2，3，4，…者各有 1，2，3，…個，而 $\dfrac{7}{10}$ 的分子與分母之和爲 17

(2)此數列至分子分母之和爲 16 者共有 $1+2+3+\cdots+15=120$ 項

第 121 項起，依序爲 $\dfrac{1}{16}$，$\dfrac{2}{15}$，$\dfrac{3}{14}$，$\dfrac{4}{13}$，$\dfrac{5}{12}$，$\dfrac{6}{11}$，$\dfrac{7}{10}$，$\dfrac{8}{9}$，$\dfrac{9}{8}$，…

$\therefore \quad \dfrac{7}{10}$ 爲第 127 項

6. 使 $(360)^n$ 整除 120！的正整數 n 最大值是__________。

【解答】28

【詳解】

$(360)^n \mid 120! \quad \Rightarrow \quad (2^{2n}\times 3^{2n}\times 5^n) \mid 2^{116}\times 3^{58}\times 5^{28}\times\cdots$

$$\left(\begin{array}{l} \text{其中 } 116=[\frac{120}{2}]+[\frac{120}{2^2}]+[\frac{120}{2^3}]+[\frac{120}{2^4}]+[\frac{120}{2^5}]+[\frac{120}{2^6}] \\ \qquad 58=[\frac{120}{3}]+[\frac{120}{3^2}]+[\frac{120}{3^3}]+[\frac{120}{3^4}] \\ \qquad 28=[\frac{120}{5}]+[\frac{120}{5^2}] \end{array}\right)$$

即 $3n\le 116$，$2n\le 58$ 且 $n\le 28$，得 $n\le 28$，故 n 最大值爲 28

7. 設 $x\in N$，$x>1$，且 x 除 135，278，395 所得的餘數均相等，則 $x=$__________。

【解答】13

【詳解】

設共同餘數為 r，則 $x\mid(135-r)$，$x\mid(278-r)$，$x\mid(395-r)$

由 $x\mid(135-r)$，$x\mid(278-r)$ $\Rightarrow$ $x\mid(278-r)-(135-r)$ $\therefore$ $x\mid143$

$x\mid(135-r)$，$x\mid(395-r)$ $\Rightarrow$ $x\mid(395-r)-(135-r)$ $\therefore$ $x\mid260$

又 $x\mid(278-r)$，$x\mid(395-r)$ $\Rightarrow$ $x\mid(395-r)-(278-r)$ $\therefore$ $x\mid117$

$\therefore$ $x\mid(143，260，117)$ $\because$ $(143，260，117)=13$ $\therefore$ $x\mid13$

$\because$ $x>1$ $\therefore$ $x=13$

8. 設 $a\in N$，$a\le400$，a 與 60 的最大公因數為 6 的 a 共有＿＿＿＿＿個。

【解答】26

【詳解】

設 $a=6k$，則 $1\le6k\le400$ $\Rightarrow$ $1\le k\le600$，$k\in N$

$(a，60)=(6k，60)=6$ $\Rightarrow$ $(k，10)=1$

k 共有 $66-([\frac{66}{2}]+[\frac{66}{5}]-[\frac{66}{10}])=66-(33+13-6)=26$

故 a 共有 26 個

9. 設正實數 a 的小數部分為 b，已知 $a^2+b^2=38$，則 a 之整數部分為＿＿＿＿＿。

【解答】6

【詳解】

$\because$ $0\le b<1$ $\therefore$ $0\le b^2<1$

即 $0\le38-a^2<1$ $\Rightarrow$ $37<a^2\le38$ $\Rightarrow$ $\sqrt{37}<a\le\sqrt{38}$ $\therefore$ a 的整數部分為 6

【註】$\therefore$ $a=6+b$，而 $a^2+b^2=38$

$\therefore$ $b=-3\pm\sqrt{10}$，取 $b=-3+\sqrt{10}$（$\because$ $0\le b<1$） $\therefore$ $a=3+\sqrt{10}$

10.設 $n\in N$ 且 $1\le n\le240$，則滿足$(n，240)=10$ 的 n 有＿＿＿＿＿個。

【解答】8

【詳解】

設 $n=10k$ $\because$ $1\le n\le240$ $\therefore$ $1\le k\le24$

由$(n，240)=(10k，240)=10$，得$(k，24)=1$

則 k 之個數為 $24-([\frac{24}{2}]+[\frac{24}{3}]-[\frac{24}{6}])=24-16=8$

即滿足$(n，240)=10$ 的 n 有 8 個

11.a 是正實數，a 的小數部分是 b，$a^2+b^2=40$，則 $a=$ ＿＿＿＿＿。

【解答】$3+\sqrt{11}$

【詳解】

$0<b<1$ $\Rightarrow$ $0<b^2<1$

$\because$ $a^2+b^2=40$ $\Rightarrow$ $a^2=39.\cdots$，故 $a=6.\cdots$

設 $a=6+b$，則 $a^2+b^2=40$ $\Rightarrow$ $(6+b)^2+b^2=40$ $\Rightarrow$ $b^2+6b-2=0$

$\therefore$ $b=\dfrac{-6\pm\sqrt{44}}{2}=-3\pm\sqrt{11}$（負不合）

取 $b=-3+\sqrt{11}$，則 $a=6+b=3+\sqrt{11}$

12.若 a，b，q_1，q_2，q_3 均為正整數，且合於下列條件

①$a=bq_1+8472$；②$b=8472q_2+444$；③$8472=444q_3+36$，則 a，b 的最大公因數為＿＿＿＿。

【解答】12

【詳解】

$\because \quad a = bq_1 + 8472 \quad \therefore \quad (a，b) = (b，8472)$……①

$\because \quad b = 8472q_2 + 444 \quad \therefore \quad (b，8472) = (8472，444)$……②

$\because \quad 8472 = 444q_3 + 36 \quad \therefore \quad (8472，444) = (444，36)$……③

$\xRightarrow{由①，②，③} \quad (a，b) = (444，36) = 12$

13.若多項式 $x^3 + 4x^2 + 5x - 3$ 除以 $f(x)$之商式爲 $x + 2$，餘式爲 $2x - 1$，則 $f(x) =$__________。

【解答】$x^2 + 2x - 1$

【詳解】

由除法定理知 $x^3 + 4x^2 + 5x - 3 = f(x)(x + 2) + 2x - 1 \quad \therefore \quad f(x)(x + 2) = x^3 + 4x^2 + 3x - 2$

除以 $x + 2$ 得 $f(x) = (x^3 + 4x^2 + 3x - 2) \div (x + 2) = x^2 + 2x - 1$

14.設 $A = \{x \mid x \in R，2 < x < 5\}$，$B = \{x \mid x \in R，2 \le |2x + 1| \le 7\}$，則

(1) $B =$ __________。 (2) $B - A =$ __________。

【解答】(1) $B = \{x \mid x \in R，-4 \le x \le -\frac{3}{2}$ 或 $\frac{1}{2} \le x \le 3\}$

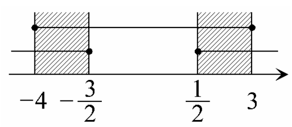
(2) $B - A = \{x \mid x \in R，-4 \le x \le -\frac{3}{2}$ 或 $\frac{1}{2} \le x \le 2\}$

【詳解】

(1)① $|2x + 1| \ge 2 \quad \Rightarrow \quad 2x + 1 \ge 2$ 或 $2x + 1 \le -2 \quad \Rightarrow \quad x \ge \frac{1}{2}$ 或 $x \le -\frac{3}{2}$

② $|2x + 1| \le 7 \quad \Rightarrow \quad -7 \le 2x + 1 \le 7 \quad \Rightarrow \quad -4 \le x \le 3$

由①∩②知 $B = \{x \mid x \in R，-4 \le x \le -\frac{3}{2}$ 或 $\frac{1}{2} \le x \le 3\}$



(2) $B - A = \{x \mid x \in R，-4 \le x \le -\frac{3}{2}$ 或 $\frac{1}{2} \le x \le 2\}$

15.設 a，b 爲二實數，二集合 $A = \{(x，y) \mid ax - 2y = 8\}$，$B = \{(x，y) \mid x + by = 5\}$，若 $A \cap B = \{(2，1)\}$，則數對$(a，b) =$__________。

【解答】(5，3)

【詳解】

$A \cap B = \{(2，1)\}$

$\Rightarrow \quad (2，1) \in A \quad \Rightarrow \quad x = 2，y = 1$ 滿足 $ax - 2y = 8 \quad \Rightarrow \quad$ 代入 $2a - 2 = 8 \quad \Rightarrow \quad a = 5$

同理：$2 + b = 5 \quad \Rightarrow \quad b = 3$

16.最大公因數問題：

把 2987 和 725 的最大公因數表成 $2987m + 725n$ 之形式，其中 $m，n \in Z$，則

(1) (2987，725) =__________。（即 2987 與 725 的最大公因數）

(2)在滿足 $2987m + 725n = (2987，725)$之 m，n 中，求 $m^2 + n^2$ 的最小値 =__________。

【解答】(1) 29 (2) 1153

【詳解】

4	2987	725	8
	2900	696	
3	87	29	
	87		
	0		

(1)由輾轉相除法原理得(2987，725) = 29

(2)由(1)可知 $29 = 725 - 8\times 87 = 725 - 8(2987 - 4\times 725) = 2987\times(-8) + 725\times 33$

$\Rightarrow \quad m = -8$，$n = 33$

則 $m^2 + n^2 = 8^2 + 33^2 = 1153$

17.設α，β爲 $x^2 - 4x + 1 = 0$ 之二根，則$\sqrt{\alpha^2+1}+\sqrt{\beta^2+1}$之值爲__________。

【解答】$2\sqrt{6}$

【詳解】

$$\begin{cases}\alpha^2-4\alpha+1=0\\ \beta^2-4\beta+1=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha^2+1=4\alpha\\ \beta^2+1=4\beta\end{cases}，又\begin{cases}\alpha+\beta=4\\ \alpha\beta=1\end{cases}（\alpha>0，\beta>0）$$

$\therefore \quad \sqrt{\alpha^2+1}+\sqrt{\beta^2+1}=\sqrt{4\alpha}+\sqrt{4\beta}=2(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})$

$(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=(\alpha+\beta)+2\sqrt{\alpha\beta}=4+2=6 \quad\Rightarrow\quad (\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})=\sqrt{6}$（$\because\ \alpha>0，\beta>0$）

故所求 $=2(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})=2\sqrt{6}$

18.設 $x\in R$，$[x]$表不大於 x 的最大整數，令 $f(x)=[\sqrt{x}]$，$x>0$，

(1) $x\in N$，使 $f(x)=k$ 之自然數 x 有__________個。

(2) $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(100)$之值=__________。

【解答】(1) $2k+1$ 個　(2) 625

【詳解】

(1)$\because\ f(x)=[\sqrt{x}]$

欲使 $f(x)=k\in N$，即$[\sqrt{x}]=k \quad\Rightarrow\quad k\le\sqrt{x}<k+1 \quad\Rightarrow\quad k^2\le x<(k+1)^2$

$\because\ x\in N \quad \therefore\ x$ 共有$(k+1)^2-k^2=2k+1$ 個

即 $x=k^2$，k^2+1，k^2+2，…，k^2+2k，共 $2k+1$ 個

(2) $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+\cdots+f(100)$

$=f(1)+f(2)+f(3)+f(2^2)+f(2^2+1)+\cdots+f(3^2)+\cdots+f(10^2)$

$=\underbrace{1+1+1}_{3個}+\underbrace{2+2+2+2+2}_{5個}+\underbrace{3+3+3+3+3+3+3}_{7個}+\cdots+\underbrace{9+\cdots+9}_{19個}+10$

$=(3\times1+5\times2+7\times3+\cdots+19\times9)+10$

$=\sum_{k=1}^{9}(2k+1)\cdot k+10=\sum_{k=1}^{9}(2k^2+k)+10=2\sum_{k=1}^{9}k^2+\sum_{k=1}^{9}k+10$

$=2\times\dfrac{1}{6}\times9\times10\times19+\dfrac{1}{2}\times9\times10+10=570+45+10=625$

19.在 1 與 999 之間，插入 n 項，使其成爲一等差數列，試求數列總和超過 10000 時，最小自然數 n 值爲__________。

【解答】19

【詳解】

等差數列：1，b_1，b_2，…，b_n，999，共$(n+2)$項，總和=$\dfrac{(n+2)(1+999)}{2}>10000$

$n > 18$，所以最小自然數 n 為 19

20.數列 1，2，2，3，3，3，4，4，4，4，…中，其前 100 項之和為________。

【解答】945

【詳解】

(1)，(2，2)，(3，3，3)，(4，4，4，4)，…

第 n 組之末項為原數列之第 $1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$項

$n = 13$ 時，$\frac{1}{2}\cdot 13\cdot 14 = 91$，$100 - 91 = 9$ $\therefore$ 第 100 項位在第 14 組內之第 9 項

$\therefore$ $S_{100} = 1 + 2\times 2 + 3\times 3 + \cdots + 13\times 13 + 14\times 9 = \frac{1}{6}\cdot 13\cdot 14\cdot 27 + 126 = 945$

21.將 10^6 元以定期儲蓄存款方式存入銀行一年，年利率為 6%，按月複利計息，已知$(1 + 0.5\%)^{12} = 1.061678$，則一年期滿可得本利和為________元。

【解答】1061678

【詳解】

(1) $6\% \div 12 = 0.5\%$

(2)一個月後本利和為 $10^6(1 + 0.5\%)$，二個月後本利和為 $10^6(1 + 0.5\%)^2$，…

12 個月後，本利和為 $10^6(1 + 0.5\%)^{12} = 1.061678\times 10^6 = 1061678$（元）

22.(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n + 4^n}{3^{n+1} + 4^{n+1}} =$ ________。 (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2 - 1}{n^2 + 101} =$ ________。

【解答】(1) $\frac{1}{4}$ (2) 2

【詳解】

$$(1)\lim_{n\to\infty}\frac{3^n + 4^n}{3^{n+1} + 4^{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(\frac{3}{4})^n + 1}{3\cdot(\frac{3}{4})^n + 4} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}[(\frac{3}{4})^n + 1]}{\lim\limits_{n\to\infty}[3\cdot(\frac{3}{4})^n + 4]} = \frac{1}{4}$$

$$(2)\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2 - 1}{n^2 + 101} = \lim_{n\to\infty}\frac{2 - \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{101}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(2 - \frac{1}{n^2})}{\lim\limits_{n\to\infty}(1 + \frac{101}{n^2})} = \frac{2}{1} = 2$$

23.不等式 $2 < |x - 1| < 9$ 之解為________。

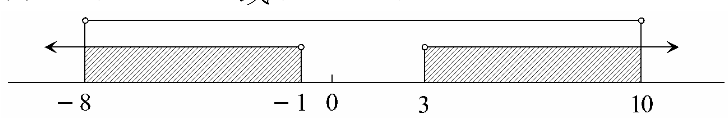
【解答】$-8 < x < -1$ 或 $3 < x < 10$

【詳解】

$2 < |x - 1| < 9 \Rightarrow |x - 1| > 2$ 且 $|x - 1| < 9$

$\Rightarrow$ $x - 1 > 2$ 或 $x - 1 < -2$；$-9 < x - 1 < 9$ $\Rightarrow$ $x > 3$ 或 $x < -1$；$-8 < x < 10$

$\therefore$ $-8 < x < -1$ 或 $3 < x < 10$



24.設 $a \in R$，若 $3x^2 + (a + i)x + 2i - 6 = 0$ 有實根，則 a 之值為________。

【解答】3

【詳解】

設方程式之實根爲α，代入原方程式成立

$\therefore\quad 3\alpha^2+(a+i)\alpha+2i-6=0 \quad\Rightarrow\quad (3\alpha^2+a\alpha-6)+(\alpha+2)i=0$

$\therefore\quad \alpha+2=0$，$3\alpha^2+a\alpha-6=0 \quad\therefore\quad \alpha=-2$，$a=3$

25.L 爲過 $A(2，1)$且與 L_1：$2x-y=0$，L_2：$2x+y=0$ 各交於 P，Q 之直線，若 A 爲 $\overline{PQ}$ 的中點，則 L 之方程式爲__________。

【解答】$y=8x-15$

【詳解】

令 $P(a，2a)$，則 Q 可由中點公式得$(4-a，2-2a)$，又 Q 在 L_2 上

$\therefore\quad 2(4-a)+(2-2a)=0 \quad\Rightarrow\quad a=\dfrac{5}{2} \quad\Rightarrow\quad P(\dfrac{5}{2}，5)$，$Q(\dfrac{3}{2}，-3)$，則 L：$y=8x-15$

26.試求$\dfrac{1}{5}+\dfrac{1+3}{5^2}+\dfrac{1+3+9}{5^3}+\cdots+\dfrac{1+3+\cdots+3^{n-1}}{5^n}+\cdots=$__________。

【解答】$\dfrac{5}{8}$

【詳解】

$$\frac{1}{5}+\frac{1+3}{5^2}+\frac{1+3+9}{5^3}+\cdots+\frac{1+3+\cdots+3^{n-1}}{5^n}+\cdots=\frac{1}{5}+\frac{1+3}{5^2}+\frac{1+3+3^2}{5^3}+\cdots+\frac{1+3+\cdots+3^{n-1}}{5^n}+\cdots$$

其一般項$=\dfrac{1+3+\cdots+3^{k-1}}{5^k}=\dfrac{\frac{1\cdot(3^k-1)}{3-1}}{5^k}=\dfrac{1}{2}[(\dfrac{3}{5})^k-(\dfrac{1}{5})^k]$

$\therefore\quad$ 原式 $=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2}[(\frac{3}{5})^k-(\frac{1}{5})^k]=\frac{1}{2}(\frac{\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{5}}-\frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}})=\frac{1}{2}(\frac{3}{2}-\frac{5}{4})=\frac{5}{8}$

27.一等差數列中，首項$=1000$，公差$=-3$，則前幾項和最大？______________

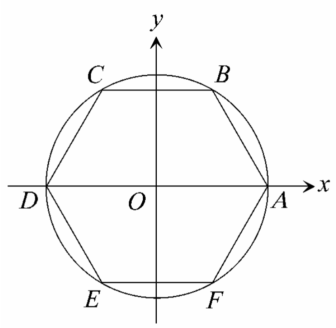
【解答】334

【詳解】

S_n 達最大，則 $a_n\ge 0$ 取最大 n，$a_n=1000+(n-1)(-3)=-3n+1003\ge 0$

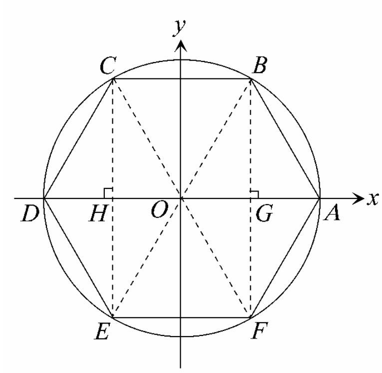
$\Rightarrow\quad -3n\ge -1003 \quad\Rightarrow\quad n\le 334\dfrac{1}{3} \quad\therefore\quad n$ 最大爲 334，故前 334 項和爲最大

28.在複數平面上，六邊形 $ABCDEF$ 是以原點 O 爲圓心，1 爲半徑之圓的內接正六邊形，如圖所示，若點 A 代表之複數爲 1，試求各頂點 B，C，D，E，F 所代表之複數。



【解答】$B(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i)$，$C(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i)$，$D(-1+0i)$，$E(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i)$，$F(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i)$

【詳解】



$\because$ 圓的半徑爲 1 $\therefore$ $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=\overline{OD}=\overline{OE}=\overline{OF}=1$

又 $ABCDEF$ 爲圓的內接正六邊形，如圖 $\therefore$ $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DE}=\overline{EF}=\overline{FA}=1$

$\because$ $\triangle OAB$ 爲正三角形 $\therefore$ $\overline{OG}=\dfrac{1}{2}$；$\overline{BG}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow$ $\overline{FG}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$；$\overline{OH}=\dfrac{1}{2}$；$\overline{CH}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$；$\overline{EH}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore$ A，B，C，D，E，F 各頂點坐標爲

$A(1，0)$，$B(\dfrac{1}{2}，\dfrac{\sqrt{3}}{2})$，$C(-\dfrac{1}{2}，\dfrac{\sqrt{3}}{2})$，$D(-1，0)$，$E(\dfrac{-1}{2}，\dfrac{-\sqrt{3}}{2})$，$F(\dfrac{1}{2}，-\dfrac{\sqrt{3}}{2})$

故各頂點所表的複數分別爲 $A(1+0i)$，$B(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i)$，$C(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i)$，$D(-1+0i)$，$E(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i)$，$F(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i)$

29.若 $\alpha x^3+\beta x^2-47x-15$ 能析出 $3x+1$ 與 $2x-3$ 之因式，試求：α，β 及第三因式。

【解答】$\alpha=24$，$\beta=2$，第三因式爲 $4x+5$

【詳解】

$(3x+1)(2x-3)=6x^2-7x-3$

整除，可以利用升次排列

$$
\begin{array}{r|llll}
 & 5+ & 4x & & \\
\hline
-3-7x+6x^2 & -15-47x+ & & \beta x^2+ & \alpha x^3 \\
 & -15-35x+ & & 30x^2 & \\
\hline
 & & -12x+ & (\beta-30)x^2+ & \alpha x^3 \\
 & & -12x- & 28x^2+ & 24x^3 \\
\hline
 & & & (\beta-2)x^2+ & (\alpha-24)x^3=0
\end{array}
$$

$\therefore$ $\alpha=24$，$\beta=2$，第三因式爲 $4x+5$

30.勘定方程式 $12x^3-8x^2-21x+14=0$ 的實根分別在哪些連續整數之間？

【解答】在 -2 與 -1，0 與 1，1 與 2 之間各有一實根

【詳解】

令 $f(x)=12x^3-8x^2-21x+14$

$f(-3)=12\cdot(-27)-8\cdot 9+21\cdot 3+14<0$

$f(-2)=12\cdot(-8)-8\cdot 4+21\cdot 2+14<0$

$f(-1)=12(-1)-8+21+14>0$，$f(0)=14>0$

$f(1)=12-8-21+14<0$，$f(2)=12\cdot 8-8\cdot 4-21\cdot 2+14>0$

$\because$ $f(-2)f(-1)<0$，$f(0)f(1)<0$，$f(1)f(2)<0$ 且 $f(x)=0$ 最多有三實根

故在 -2 與 -1，0 與 1，1 與 2 之間各有一實根

31.若對任意實數 x，$(a^2-1)x^2+(a-1)x+1>0$ 恆成立，求 a 的範圍。

【解答】$a<\dfrac{-5}{3}$ 或 $a\geq 1$

【詳解】

對任意實數 x，$(a^2-1)x^2+(a-1)x+1>0$ 恆成立的充要條件為

$a^2-1>0$ 且 $D=(a-1)^2-4(a^2-1)<0$

$\therefore$ $(a-1)(a+1)>0$ 且 $(a-1)(3a+5)>0$

$\Rightarrow$ （$a<-1$ 或 $a>1$）且（$a<\dfrac{-5}{3}$ 或 $a>1$）

$\Rightarrow$ $a<\dfrac{-5}{3}$ 或 $a>1$，又 $a=1$ 時，原式 $1>0$ 成立

故所求為 $a<\dfrac{-5}{3}$ 或 $a\geq 1$