高雄市明誠中學 高三數學複習測驗　　日期：95.09.11					
範圍	Book1　Chap3 數列級數	班級	普三　　班	姓名	
		座號			

一、選擇題 (每題 5 分)

1、(E)　等差級數 $(-28)+(-25)+(-22)+\cdots+(29)$ 可表為

(A) $\sum_{k=1}^{19}(3k-1)$　(B) $\sum_{k=1}^{20}(3k-1)$　(C) $\sum_{k=-9}^{10}(3k-31)$　(D) $\sum_{k=1}^{19}(3k-31)$　(E) $\sum_{k=1}^{20}(32-3k)$

$\boxed{解析}$：此數列共 $\dfrac{29-(-28)}{3}+1=20$ 項，$\therefore \sum_{k=1}^{20}(32-3k)=29+26+\cdots+(-28)$

2、(B)　設 a, b, c, d 四正數成 G.P.，若 $a+b=8$，$c+d=72$，則公比為

(A)2 (B)3 (C)4 (D)6 (E)以上皆非

$\boxed{解析}$：設公比為 r　$\therefore a+ar=8, ar^2+ar^3=72$　$\therefore r^2=9, r=\pm3$ (-3 不合)

3、(D)　試問有多少個正整數 n 使得 $\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n}+\cdots+\dfrac{10}{n}$ 為整數？

(A)1 個　(B)2 個　(C)3 個　(D)4 個　(E)5 個

$\boxed{解析}$：$\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n}+\cdots+\dfrac{10}{n}=\dfrac{1}{n}(1+2+\cdots+10)=\dfrac{55}{n}$

$\because n|55\in\mathbb{Z}$ 且 $n\in\mathbb{N}$，$\therefore n=1,5,11,55$，即 n 有 4 個。故答案為(D)。

4、(BCD)　(複選)已知一等比數列，$a_3=9,\ a_6=-\dfrac{9}{8}$ 則 (A)公比為 -2　(B)首項為 36 (C) $a_9=\dfrac{9}{64}$

(D)對任何自然數 n，$S_n>0$ 恆成立　(E) $\sum_{k=1}^{\infty}a_k=12$

$\boxed{解析}$：$\begin{cases} ar^5=-\dfrac{9}{8} \\ ar^2=9 \end{cases}$ $\therefore r^3=-\dfrac{1}{8}$　$\therefore r=-\dfrac{1}{2},\ a=36$

$$a_9=a_6\cdot(-\frac{1}{2})^3=\frac{9}{64},\quad S_n=\frac{36\cdot\left[1-(-\frac{1}{2})^n\right]}{1-(-\frac{1}{2})}=24\left[1-(-\frac{1}{2})^n\right]>0,\quad \sum_{k=1}^{\infty}a_k=24$$

5、(全)　(複選)假設實數 a_1,a_2,a_3,a_4 是一個等差數列，且滿足 $0<a_1<2$ 及 $a_3=4$。若定義 $b_n=2^{a_n}$，則以下哪些選項是對的？ (A) b_1，b_2，b_3，b_4 是一個等比數列

(B) $b_1<b_2$　(C) $b_2>4$　(D) $b_4>32$　(E) $b_2\times b_4=256$

$\boxed{解析}$：設公差為 d，則 $a_1=4-2d$，$a_2=4-d$，$a_3=4$，$a_4=4+d$

又 $\because 0<a_1<2\Rightarrow 0<4-2d<2\Rightarrow -4<-2d<-2\Rightarrow 2>d>1$

(1) $b_1, b_2, b_3, b_4\Rightarrow 2^{a_1}, 2^{a_2}, 2^{a_3}, 2^{a_4}\Rightarrow 2^{4-2d}, 2^{4-d}, 2^4, 2^{4+d}$，公比為 2^d 的等比數列

(2) $\because d>1\ \Rightarrow 2^d>2^1$，$\therefore \dfrac{b_2}{b_1}=\dfrac{2^{4-d}}{2^{4-2d}}=2^d>2>1$，又 $b_n>0\Rightarrow b_2>b_1$

(3) $\because 2>d\ \Rightarrow 2^2>2^d\ \Rightarrow \dfrac{1}{4}<\dfrac{1}{2^d}$，$\therefore b_2=2^{4-d}=2^4\times\dfrac{1}{2^d}=16\times\dfrac{1}{2^d}>16\times\dfrac{1}{4}=4$。

(4) $b_4=2^{4+d}=2^4\times2^d=16\times2^d>16\times2=32$ ($\because 2^d>2$)。

(5) $b_2\times b_4=2^{4-d}\times2^{4+d}=2^8=256$。

故應選(A)(B)(C)(D)(E)。

6、(CE) (複選)有一個 101 項的等差數列$a_1, a_2, a_3,\cdots,a_{101}$，其和爲 0，且 $a_{71}=71$。問下列選項那些正確？ (A) $a_1+a_{101}>0$ (B) $a_2+a_{100}<0$ (C) $a_3+a_{99}=0$ (D) $a_{51}=51$ (E) $a_1<0$

$\boxed{\text{解析}}$：由已知：$\dfrac{(a_1+a_{101})}{2}\times 101=0\Rightarrow a_1+a_{101}=0$

若 d 爲公差 $a_2+a_{100}=(a_1+d)+(a_{101}-d)=a_1+a_{101}=0$

同理 $a_3+a_{99}=0$ ，而且中間項 $a_{51}=0$ ，又 $a_{71}=71\Rightarrow$ 後半段爲正，前半段爲負

故選(C)(E)

7、(CDE) (複選)已知一等差數列，各項依次爲$-5, -2, 1,\cdots, 298$ 則下列何者正確？

(A)公差爲 -3 (B)此數列共有 100 項 (C)第 20 項爲 52 (D)此數列各項和爲 14943 (E)第 37 項才開始超過 100

$\boxed{\text{解析}}$：$d=(-2)-(-5)=3$, 項數 $=\dfrac{298-(-5)}{3}+1=102$

$a_{20}=(-5)+19\times 3=52$, $S_{102}=\dfrac{(-5+298)\times 102}{2}=14943$

$a_{36}=(-5)+35\times 3=100$

8、(BCE) (複選)下列何者爲真？ (A) $<2\times 3^n>$ 爲收斂數列 (B) $<1001+(\frac{-1}{3})^n>$ 爲收斂數列

(C) $<\dfrac{2n+1}{2^n}>$ 爲收斂數列 (D) $<\dfrac{3^n+(-4)^n}{3^n-(+4)^n}>$ 爲收斂數列 (E) $<\dfrac{1}{n^3}>$

$\boxed{\text{解析}}$：$\lim\limits_{n\to\infty}2\times 3^n=\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left[1001+(-\frac{1}{3})^n\right]=1001$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{2^n}=0$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+(-4)^n}{3^n-(4)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\frac{3}{4})^n+(-1)^n}{(\frac{3}{4})^n-1^n}$ ，但$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ 發散，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^3}=0$

9、(BE) (複選)下列各無窮級數中，何者爲收斂？

(A) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(1.5)^k$ (B) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\frac{\pi}{7})^{k-1}$ (C) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{5^k}{4^k}$ (D) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}3$ (E) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{3^{k+1}}{6^k}$

$\boxed{\text{解析}}$：無窮等比級數收斂之條件爲$-1<$ 公比<1 ，$\dfrac{\pi}{7}\doteqdot 0.45<1$，故答案爲(B)(E)。

10、(CE) (複選)已知無窮等比級數和等於$\dfrac{9}{2}$ ，其第二項爲-2。試求此級數$t_1+t_2+t_3+t_4+t_5+t_6+\cdots$, (A)$t_1=8$ (B)$t_3=1$ (C)$t_4=-\dfrac{2}{9}$ (D)$t_5=\dfrac{1}{24}$ (E)$t_6=\dfrac{-2}{81}$

$\boxed{\text{解析}}$：$\dfrac{a}{1-r}=\dfrac{9}{2}$, $ar=-2$ $\therefore r(1-r)=-\dfrac{4}{9}$ ，$r=\dfrac{4}{3}$ 不合(或)$-\dfrac{1}{3}$

$a=6$ $\therefore t_3=\dfrac{2}{3}$, $t_4=-\dfrac{2}{9}$, $t_5=\dfrac{2}{27}$, $t_6=-\dfrac{2}{81}$

二、填充題 (每題 10 分)

1、若小芬於今年初存入 100000 元，年利率爲 5%，以複利計算且每年計息一次，則 10 年期滿後，她可領回______________元。($1.05^{10}\doteqdot 1.63$)

$\boxed{\text{答案}}$：163000

解析：本利和$=100000\times(1+5\%)^{10}=100000\times1.05^{10}=163000$（元）。

2、兩個等差數列，首 n 項和的比爲$(2n+3):(3n-8)$則第 11 項之比爲＿＿＿＿＿。

答案：$9:11$

解析：$S_n:S'_n=(2n+3):(3n-8)$，$a_{11}:a'_{11}=21\cdot a_{11}:21\cdot a'_{11}=S_{21}:S'_{21}=45:55=9:11$

3、已知數列a_n收斂，且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n+(-2)^n a_n}{3-(-2)^n}=4$，則$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=$＿＿＿＿，又$\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{-2}{3})^n a_n=$＿＿＿＿。

答案：$-4,\ 0$

解析：令$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha,\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n+(-2)^n a_n}{3-(-2)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\frac{1}{2})^n+a_n}{3(-\frac{1}{2})^n-1}=-\alpha=4\quad\therefore\alpha=-4$

又$\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{-2}{3})^n\cdot a_n=\lim\limits_{n\to\infty}(-\dfrac{2}{3})^n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0\times(-4)=0$

4、將循環小數化爲分數(1)$3.\overline{471}=$＿＿＿＿＿，(2)$3.4\overline{71}=$＿＿＿＿＿。

答案：(1)$3\dfrac{471}{999}$　　(2)$3\dfrac{467}{990}$

解析：(1)$3.\overline{471}=3\dfrac{471}{999}$　　(2)$3.4\overline{71}=3+\dfrac{(471-4)}{990}=3\dfrac{467}{990}$

5、試求下列無窮級數的和(1)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n+(-2)^{n+2}}{4^n}=$＿＿＿＿＿。

(2)$\dfrac{1}{2\cdot4}+\dfrac{1}{3\cdot5}+\cdots+\dfrac{1}{n\cdot(n+2)}+\cdots\cdots=$＿＿＿＿＿。

答案：$\dfrac{5}{3}$；$\dfrac{5}{12}$

解析：(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n+(-2)^{n+2}}{4^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{4^n}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-2)^{n+2}}{4^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\dfrac{3}{4})^n+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\dfrac{-2}{4})^n\cdot2^2$

$$=[\frac{3}{4}+(\frac{3}{4})^2+(\frac{3}{4})^3+\cdots]+4[\frac{-1}{2}+(\frac{-1}{2})^2+(\frac{-1}{2})^3+\cdots]=\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}}+4\frac{\frac{-1}{2}}{1-(-\frac{1}{2})}=\frac{5}{3}$$

(2)原式$=\sum\dfrac{1}{k(k+2)}=\dfrac{1}{2}\sum\dfrac{2}{k(k+2)}=\dfrac{1}{2}[\sum(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+2})]$

$$=\frac{1}{2}[\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\cdots]=\frac{1}{2}[\frac{1}{2}+\frac{1}{3}]=\frac{5}{12}$$

6、試求$\sum\limits_{k=1}^{n}(1+2+3+\cdots+k)=$＿＿＿＿＿。

答案：$\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$

解析：$\sum\limits_{k=1}^{n}(1+2+3+\cdots+k)=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k(k+1)}{2}=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}k(k+1)$

$$=\frac{1}{2}[1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+n(n+1)]=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

7、用單位長的不銹鋼條焊接如下圖系列的四面體鐵架，圖中的小圈圈「。」表示焊接點，

圖 E_1 有兩層共 4 個焊接點，圖 E_2 有三層共 10 個焊接點，圖 E_3 有四層共 20 個焊接點。試問依此規律，推算圖 E_5 有六層共多少焊接點？______個。

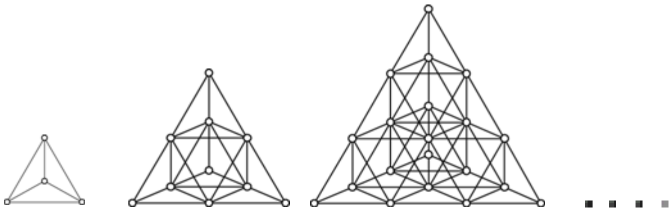


圖 E_1　圖 E_2　圖 E_3

答案：56 個

解析：設 a_i 表圖 E_i 的焊接點，由圖形觀察：

$a_1=\underbrace{1}_{(第一層)}+\underbrace{3}_{(第二層)}=4$

$a_2=\underbrace{1}_{(第一層)}+\underbrace{3}_{(第二層)}+\underbrace{6}_{(第三層)}=10$

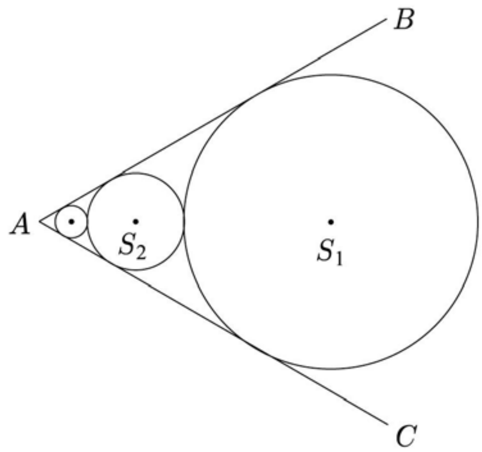
$a_3=1+3+6+10=20$

$a_4=1+3+6+10+15=35$

$a_5=1+3+6+10+15+21=56$

$\therefore$ E_5 的焊接點數為 56。

8、如圖，$\angle BAC=60^\circ$，設最大圓為S_1，若有無窮多個圓$S_1,S_2,S_3,\cdots,S_n,\cdots$彼此相切且與$\angle BAC$的兩邊$\overline{AB}$，$\overline{AC}$相切，若$S_1$的面積為$80\pi$，則此無窮多個圓面積和為______。



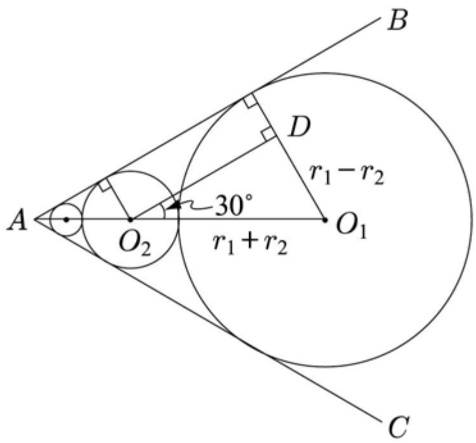
答案：90π

解析：在$\triangle O_1O_2D$中，$\overline{O_1O_2}=2\overline{O_1D}$

$\therefore r_1+r_2=2(r_1-r_2)\Rightarrow \dfrac{r_2}{r_1}=\dfrac{1}{3}$

$\therefore r=\dfrac{S_2}{S_1}=\dfrac{\pi r_2^2}{\pi r_1^2}=(\dfrac{r_2}{r_1})^2=\dfrac{1}{9}$，

$\therefore$面積和為 $S_1+S_2+\cdots=\dfrac{80\pi}{1-\dfrac{1}{9}}=90\pi$。



9、設$\langle a_n\rangle$為等差數列，若$S_n=10,S_{3n}=42$，求$S_{2n}=$______。

答案：24

解析：$\because S_n,S_{2n}-S_n,S_{3n}-S_{2n}$成等差數列

令$S_{2n}=x$，$\therefore 10,x-10,42-x$成等差數列

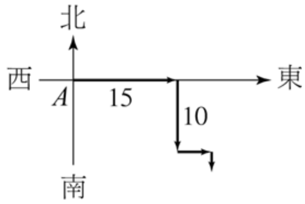
$\therefore 2(x-10)=10+42-x$

$\therefore x=24$。

10、智凱自 A 點出發向東走 15 公尺後向南走 10 公尺再向東走$\dfrac{20}{3}$公尺，再向南走$\dfrac{40}{9}$公尺，如此繼續走下去每次向東或向南都走前一次距離的$\dfrac{2}{3}$則(1)向東方向一共走了________

公尺，(2)最後停留的位置與原出發點的距離為________公尺。

答案：(1)27(2)$9\sqrt{13}$

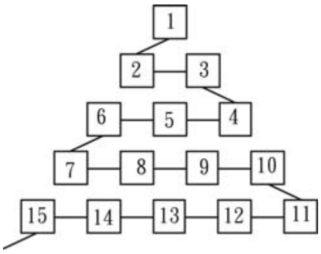


解析：(1)向東走 $15+\dfrac{20}{3}+\dfrac{80}{27}+\cdots=\dfrac{15}{1-\dfrac{4}{9}}=27$

(2)向南走 $10+\dfrac{40}{9}+\dfrac{160}{81}+\cdots=\dfrac{10}{1-\dfrac{4}{9}}=18$

最後位置與原出發點之距離為 $\sqrt{27^2+18^2}=9\sqrt{13}$

11、下圖是從事網路工作者經常用來解釋網路運作的蛇形模型：



數字1出現在第1列；數字2,3出現在第2列；數字6,5,4(從左至右)出現在第3列；數字7,8,9,10出現在第4列；依此類推。試問第99列，從左至右算，第67個數字為______。

答案：4884

解析：第 1 列有 1 個數，第 2 列有 2 個數，⋯，第 k 列有 k 個數，⋯，因此到第 98 列為止，

共有 $1+2+\cdots+98=\dfrac{99\times 98}{2}=4851$ 個數，又第 99 列有 99 個數，但是它是由右而左算，

故由左至右算的第 67 個數字為 $4851+(99-67+1)=4884$

12、一等差數列共 33 項，前 3 項之和為 69，後 3 項之和為 204，(1)求 $a_{32}=$______，(2)求首項 $=$______。

答案：$\dfrac{43}{2},\ \dfrac{3}{2}$

解析：$a_{31}+a_{32}+a_{33}=204,\ \therefore a_{32}=68=a+31d$

$a_1+a_2+a_3=69,\ \therefore a_2=23=a+d$

故 $30d=45,\ \therefore d=\dfrac{3}{2},\ \therefore a_1=21.5=\dfrac{43}{2}$

13、假設某鎮每年的人口數逐年成長，且成一等比數列，已知此鎮十年前有 25 萬人，現在有 30 萬人，那麼二十年後，此鎮人口應有______萬人。(求到小數點後一位)

答案：43.2

解析：設 10 年前人口為首項 $a,\ \ a=25$，公比為 r

由已知：現有人口 $30=25\times r^{10}\Rightarrow r^{10}=\dfrac{30}{25}=\dfrac{6}{5}$

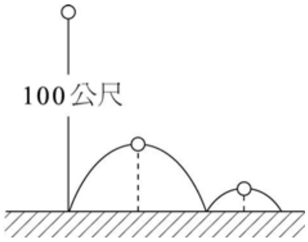
則 20 年後人口為 $a\times r^{30}=25\times(r^{10})^3=25\times(\dfrac{6}{5})^3=43.2$ (萬)

14、一皮球從 100 公尺的高處落下，每次返跳的高度為其落下時高度的 $\dfrac{1}{3}$ 倍，則至靜止時，此球所經的距離為______公尺。

答案：200

解析：所經過的距離為

$$100+2[100\times\frac{1}{3}+100\times(\frac{1}{3})^2+\cdots]=100+2\times\frac{\frac{100}{3}}{1-\frac{1}{3}}=100+100=200（公尺）。$$



15、等差數列，首項為 130，公差 -6

(1)第 n 項起始為負數，則 $n=$______。(2)加到第 n 項之和為負數，則 n 之最小值為______。

答案：(1)23

(2)45

解析：(1) $a=130,\ d=-6,\ a_n=130+(n-1)(-6)<0$

$$6(n-1)>130,\ n-1>\frac{130}{6},\ n>\frac{136}{6}=22\frac{2}{3}\quad \therefore n=23$$

(2) $S_n=\dfrac{n[260+(n-1)(-6)]}{2}<0\quad \therefore 260+(n-1)(-6)<0$

$$\therefore 6(n-1)>260, \therefore n>\frac{130}{3}+1=44\frac{1}{3}, \therefore n=45$$

16、設某一無窮等比級數之和為 24，其各項之平方和為 96，則此級數之首項為______，公比為______。

答案：$\dfrac{48}{7};\dfrac{5}{7}$

解析：設首項為 a，公比為 $r\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{a}{1-r}=24\cdots\cdots①\\ \dfrac{a^2}{1-r^2}=96\cdots\cdots②\end{cases}$，由$\dfrac{②}{①}$，得 $\dfrac{a}{1+r}=\dfrac{96}{24}=4\cdots\cdots③$

由$\dfrac{③}{①}$得 $\dfrac{1-r}{1+r}=\dfrac{4}{24}=\dfrac{1}{6}$，$6-6r=1+r$，$r=\dfrac{5}{7}$，代入①得 $a=24\times\dfrac{2}{7}=\dfrac{48}{7}$。

17、求 $7.1+0.073+0.00073+0.0000073+\cdots$ 之和為______(以分數表示之)，又將總和化為小數時，小數點後第 347 位數字為______。

答案：$7\dfrac{86}{495}$, 3

解析：$7.1+0.073+0.00073+\cdots=7.1\overline{73}=7+\dfrac{173-1}{990}=7\dfrac{86}{495}$

小數點後第 347 位數字為 “3”

18、有一個無窮等比級數，其和為 $\dfrac{3}{4}$，其各項平方和為 $\dfrac{3}{8}$，已知公比為一有理數，則當公比以最簡分數表示時，其分母為______。

答案：5

解析：令首項為 a，公比為 r

$\therefore \begin{cases} \dfrac{a}{1-r}=\dfrac{3}{4}\cdots\cdots① \\ \dfrac{a^2}{1-r^2}=\dfrac{3}{8}\cdots\cdots② \end{cases}$，由$\dfrac{②}{①}$得$\dfrac{a}{1+r}=\dfrac{1}{2}\cdots\cdots③$，由$\dfrac{③}{①}$得$\dfrac{1-r}{1+r}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow r=\dfrac{1}{5}$，$\therefore$分母爲 5。

19、將自然數按下列規律排列，每一列比前一列多一個數，如下表所示：

第1列	1
第2列	2,3
第3列	4,5,6
第4列	7,8,9,10
$\cdots$	$\cdots$

試問第 100 列第 3 個數是_______。

答案：4953

解析：第 1 列至第 99 列的數共有$1+2+3+\cdots+99=\dfrac{99\times 100}{2}=4950$（個），

$\therefore$第 100 列的第 3 個數是 4953。

20、已知一等差數列，首項爲 12，且前 6 項之和與前 19 項之和相等，求此數列之公差爲_____。

答案：-1

解析：$\because S_6=S_{19}$ $\therefore a_7+a_8+\cdots+a_{19}=0$ $\therefore 13\times a_{13}=0$ $\therefore a_{13}=0$，則$12+12d=0, \therefore d=-1$。

21、設無窮等比級數$\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{20}+\dfrac{1}{100}+\cdots$的和爲$S$，前$n$項之和爲$S_n$

(1)試求此級數之和$S=$______。 (2)試求此等比級數前n項之和$S_n=$______。

(3)若$\left|S-S_n\right|<\dfrac{1}{10^5}$，則 n 的最小值爲______。

答案：(1)$\dfrac{5}{16}$ (2)$\dfrac{5}{16}(1-(\dfrac{1}{5})^n)$ (3) 7

解析：(1) $a=\dfrac{1}{4},\ r=\dfrac{1}{5}$ $\therefore S=\dfrac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{5}}=\dfrac{5}{16}$ (2) $S_n=\dfrac{\frac{1}{4}\left[1-(\frac{1}{5})^n\right]}{1-\frac{1}{5}}=\dfrac{5}{16}(1-(\dfrac{1}{5})^n)$

(3)$\left|S-S_n\right|=\dfrac{5}{16}(\dfrac{1}{5})^n<\dfrac{1}{10^5}$ $\therefore 5^n>\dfrac{5}{16}\times 10^5$ $\therefore 5^n>5^6\times 2$ $\therefore n=7$

22、$\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}=$______。

答案：$\sqrt{n+1}-1$

解析：$\dfrac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}=\sqrt{k}-\sqrt{k-1}$

$$\therefore \sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}=\sum_{k=2}^{n+1}(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})$$

$$=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\sqrt{n+1}-1$$

23、設$a,b\in\mathbb{R}$，若$\dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{2^2}+\dfrac{a}{2^3}+\dfrac{b}{2^4}+\cdots+\dfrac{a}{2^{2n-1}}+\dfrac{b}{2^{2n}}+\cdots=3$，求$2a+b=$______。

答案：9

$\boxed{解析}$：原式$\Rightarrow (\frac{a}{2}+\frac{a}{2^3}+\frac{a}{2^5}+\cdots)+(\frac{b}{2^2}+\frac{b}{2^4}+\cdots)=3$，$\therefore \dfrac{\frac{a}{2}}{1-\frac{1}{4}}+\dfrac{\frac{b}{4}}{1-\frac{1}{4}}=3$，

$\therefore \frac{2}{3}a+\frac{b}{3}=3 \Rightarrow 2a+b=9$。

24、求$6+66+666+\cdots+\underbrace{666\cdots66}_{n個6}$之和為________________。

$\boxed{答案}$：$\dfrac{2(10^{n+1}-9n-10)}{27}$

$\boxed{解析}$：$6+66+666+\cdots+\underbrace{666\cdots66}_{n個6}=\frac{6}{9}(9+99+999+\cdots+\underbrace{999\cdots99}_{n個9})$

$=\frac{2}{3}[(10-1)+(10^2-1)+\cdots+(10^n-1)]=\frac{2}{3}[(10+10^2+\cdots+10^n)-n]$

$=\frac{2}{3}[\frac{10(10^n-1)}{10-1}-n]=\frac{2(10^{n+1}-9n-10)}{27}$。

25、設有一複數等比數列，首項為 $1+2i$，第二項為 $3+i$，則此數列前五項之和為______。

$\boxed{答案}$：$6-13i$

$\boxed{解析}$：$r=\frac{3+i}{1+2i}=\frac{(3+i)(1-2i)}{5}=1-i$

$S_5=a(1+r+r^2+r^3+r^4)=(1+2i)\cdot\left[\frac{1\cdot(1-(1-i)^5)}{1-(1-i)}\right]=\frac{(1+2i)\cdot(5-4i)}{i}=\frac{13+6i}{i}=6-13i$

26、無窮等比級數$(\sqrt{3}+1)+(\sqrt{3}-1)+(3\sqrt{3}-5)+\cdots$則其公比為__________，又其總和為__________。

$\boxed{答案}$：$2-\sqrt{3},\ 2+\sqrt{3}$

$\boxed{解析}$：公比$=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\frac{4-2\sqrt{3}}{2}=2-\sqrt{3}$ $\because \left|2-\sqrt{3}\right|<1$，$\therefore$總和為

$\frac{\sqrt{3}+1}{1-(2-\sqrt{3})}=\frac{4+2\sqrt{3}}{2}=2+\sqrt{3}$

27、一等差數列，加到第 n 項之和$S_n=n^2+3n$，則 $a_{10}=$________，又公差 $=$ ______。

$\boxed{答案}$：22, 2

$\boxed{解析}$：$\because S_n=n^2+3n,\ \therefore a_1=S_1=4$

$a_{10}=S_{10}-S_9=130-108=22$

$a_2=S_2-S_1=10-4=6,\ \therefore d=2$

28、設$\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{-2x}{3(x+1)}$，則$x=$________。

$\boxed{答案}$：$-\frac{1}{2}$

$\boxed{解析}$：$\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}$收斂$\Leftrightarrow -1<公比=x<1$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}=\frac{-2x}{3(x+1)}\Rightarrow 2x^2-5x-3=0$，$\therefore x=-\frac{1}{2}$或 3（不合）。

29、在數列$\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{4},\cdots,$中

(1)$\frac{3}{7}$爲第______項，(2)第 126 項是______(不可約分)。

$\boxed{\text{答案}}$：(1)24　　(2)$\frac{6}{16}$

$\boxed{\text{解析}}$：(1)$(1+2+3+4+5+6)+3=24$

(2)$1+2+\cdots+k\le 126$, k之最大爲 15, $1+2+\cdots+15=120$，∴第 126 項爲$\frac{6}{16}$。

30、一無窮等比級數之和爲 3，前二項之和爲$\frac{8}{3}$，又知首項大於 3，則此級數的首項爲_____，公比爲_____。

$\boxed{\text{答案}}$：$4,\ -\frac{1}{3}$

$\boxed{\text{解析}}$：$\frac{a}{1-r}=3$......①　　$a+ar=\frac{8}{3}$.......②

②÷①　$(1+r)(1-r)=\frac{8}{9}$　　$\therefore r=\pm\frac{1}{3}$，若$r=\frac{1}{3},a=2$(不合)，若$r=-\frac{1}{3},a=4$(合)

31、某次網球比賽共有 128 位選手參加，採單淘汰制，每輪淘汰一半的選手，剩下一半的選手進入下一輪。在第 1 輪被淘汰的選手可獲得 1 萬元，在第 2 輪被淘汰的選手可獲得 2 萬元，在第 k 輪被淘汰的選手可獲得2^{k-1}萬元，而冠軍則可獲得 128 萬元。試問全部比賽獎金共______萬元？

$\boxed{\text{答案}}$：576

$\boxed{\text{解析}}$：

	第一輪	第二輪	第三輪	第四輪	第五輪	第六輪	第七輪
獎金=	$\underset{(\text{淘汰人數})}{2^6}\cdot\underset{(\text{獎金})}{1}+$	$2^5\cdot 2^{2-1}+$	$2^4\cdot 2^{3-1}+$	$2^3\cdot 2^{4-1}+$	$2^2\cdot 2^{5-1}+$	$2^1\cdot 2^{6-1}+$	$\underset{(\text{亞軍})}{1\cdot 2^{7-1}}+\underset{(\text{冠軍})}{2^7}$

$=2^6\times 7+2^7=576$

32、設 $a, b, c\in\{0,1,2,\cdots,9\}$，若$\frac{158}{990}<0.\overline{abc}<\frac{145}{900}$，則 $b=$_______, $c=$_______。

$\boxed{\text{答案}}$：6, 0

$\boxed{\text{解析}}$：$\frac{158}{990}=0.1\overline{59}$

$\frac{145}{900}=0.16\overline{1}$

$0.159595959\cdots\cdots\therefore a=1$

$0.abcabcabc\cdots\cdots\therefore b=6$

$0.161111111\cdots\cdots\therefore c=0$

33、求 $0.22+0.0202+0.002002+\cdots$之和爲______。

$\boxed{\text{答案}}$：$\frac{8}{33}$

$\boxed{\text{解析}}$：$0.22+0.0202+0.002002+\cdots=2[(0.1+0.01+0.001+\cdots)+(0.01+0.0001+0.000001+\cdots)]$

$=2\times\left[\frac{0.1}{1-0.1}+\frac{0.01}{1-0.01}\right]=2\times\left[\frac{1}{9}+\frac{1}{99}\right]=\frac{8}{33}$

34、有兩個等差數列 $<a_n> = <0,\ 7,\ 14,\ 21,\cdots,\ 994>$，$<b_n> = <1,\ 5,\ 9,\ 13,\cdots,\ 1001>$ 由這兩個數列中取出全部共同項，由小而大依序排列，得另一數列 $<c_n>$ 共有 k 項，則(1)求 c_1 之值爲______，(2) $c_1+c_2+\cdots+c_k$ 之和 $=$ ______。

$\boxed{\text{答案}}$：(1)21(2)17395

$\boxed{\text{解析}}$：$0+7(m-1)=1+4(k-1),\ m,k\in\mathbb{Z}$

$7m-7=4k-3,\ 7m=4k+4=4(k+1)$ ，取 $k=6,\ m=4$ 爲最小値

$\therefore c_1=7\times(4-1)=21$

$<c_n>$ 的公差爲 28，$\therefore$末項爲 $c_{35}=21+34\times28=97$ ，$\therefore$和 $=\frac{35(42+34\times28)}{2}=17395$

35、無窮級數 $0.04+0.0044+0.000444+\cdots+\overbrace{0.00\cdots0}^{n\text{個}}\overbrace{44\cdots4}^{n\text{個}}$ 之和爲_________。

$\boxed{\text{答案}}$：$\frac{40}{891}$

$\boxed{\text{解析}}$：令

$$\begin{aligned} S&=0.04+0.0044+0.000444+\cdots \\ -)0.1S&=0.004+0.00044+\cdots \\ \hline 0.9S&=0.04+0.0004+0.000004+\cdots \\ &=\frac{0.04}{1-0.01}=\frac{4}{99} \end{aligned}$$

$\therefore S=\frac{40}{891}$

36、設 C_1 爲單位圓，T_1 爲 C_1 之內接正三角形，C_2 爲 T_1 之內切圓，T_2 爲 C_2 之內接正三角形，依此類推。令 a_i 表 T_i 之面積，則 $\sum_{i=1}^{5}a_i=$________。(請化至最簡)

$\boxed{\text{答案}}$：$\frac{1023}{1024}\sqrt{3}$

$\boxed{\text{解析}}$：T_1 之邊長 $\sqrt{3}$ ，T_1 之面積 $a_1=\frac{3\sqrt{3}}{4}$ ，T_2 之邊長 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，T_2 之面積 $a_2=\frac{3\sqrt{3}}{16},\cdots$

得 $\sum_{i=1}^{5}a_i=\frac{3\sqrt{3}}{4}\left[1+\frac{1}{4}+(\frac{1}{4})^2+(\frac{1}{4})^3+(\frac{1}{4})^4\right]=\frac{1023}{1024}\sqrt{3}$

37、有一條繩子長爲 9 公分，切取其中的三分之二作成一正三角形的周長，令其所圍面積爲 S_1 ；從剩餘的三分之一再切取三分之二做成第二個正三角形的周長，令其所圍面積爲 S_2；如此繼續下去，可得 $S_3,\ S_4,\ S_5,\ \cdots,\ S_n,\cdots\cdots$，求 $S_1+S_2+S_3+\cdots+S_n+\cdots\cdots$ =____________。

$\boxed{\text{答案}}$：$\frac{9\sqrt{3}}{8}$

$\boxed{\text{解析}}$：S_1 邊長 $9\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=2\Rightarrow S_1=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot2^2=\sqrt{3}$

S_2 邊長 $(9\times\frac{1}{3})\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\Rightarrow\frac{S_2}{S_1}=(\frac{\cancel{2}/3}{\cancel{2}})^2=(\frac{1}{3})^2$

$$S_1+S_2+S_3+\ \cdots\ +S_n+\cdots\cdots=\frac{\sqrt{3}}{1-(\frac{1}{3})^2}=\frac{9\sqrt{3}}{8}$$

38、觀察下列 3 × 3 與 4 × 4 方格中的數字規律

1	2	3
1	2	2
1	1	1

1	2	3	4
1	2	3	3
1	2	2	2
1	1	1	1

如果在 10 × 10 的方格上，仿上面規律填入數字，則所填入的 100 個數字之總和爲________，又此 100 個數字中 “4” 一共寫了________次。

答案：$21\sum_{k=1}^{10}k-2\sum_{k=1}^{10}k^2$, 13

解析：$1\times 19+2\times 17+3\times 15+\cdots+10\times 1=\sum_{k=1}^{10}k(21-2k)=21\sum_{k=1}^{10}k-2\sum_{k=1}^{10}k^2$

$=21\times\frac{10\times 11}{2}-2\times\frac{10\times 11\times 21}{6}=1155-770=385$，故 4 一共有 13 個。

39、試求無窮級數 $\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{3\times 5}+\frac{1}{5\times 7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\cdots$ 之和爲______。

答案：$\frac{1}{2}$

解析：$S_n=\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{3\times 5}+\frac{1}{5\times 7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$

$=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+1})$ $S=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2}$

40、設 $a_1,a_2,\cdots a_{50}$ 是從–1,0,1 這三個整數中取值的數列。若 $a_1+a_2+\cdots+a_{50}=9$ 且 $(a_1+1)^2+(a_2+1)^2+\cdots+(a_{50}+1)^2=107$，則 $a_1,a_2,\cdots,a_{50}$ 當中有幾項是 0？答：______項。

答案：11

解析：

$(a_1+1)^2+(a_2+1)^2+\cdots+(a_{50}+1)^2=107$

$(a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_{50}^2)+2(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{50})+50=107$

由 $a_1+a_2+\cdots+a_{50}=9\Rightarrow(a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_{50}^2)+2\times 9+50=107$

$\Rightarrow a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_{50}^2=39$，即 $a_1,a_2,\cdots a_{50}$ 中有 39 個爲–1 或 1，另 11 個爲 0。

41、設 $a_n=\frac{3^{n+1}}{(2x-1)^{n-1}}$ 則

(1)數列$\langle a_n\rangle$收斂時，x的範圍爲______，(2) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收斂時，x的範圍爲______。

答案：(1) $x\geq 2$ 或 $x<-1$　　(2) $x>2$ 或 $x<-1$

解析：數列收斂，$-1<\frac{3}{2x-1}\leq 1,\ \frac{3}{2x-1}=1\quad\therefore x=2$

$\left|\frac{3}{2x-1}\right|<1\quad\therefore|2x-1|>3,\quad 2x-1>3\text{或}2x-1<-3\Rightarrow x>2\text{或}x<-1$，$\therefore x\geq 2\text{或}x<-1$

級數收斂之條件為 $-1<\dfrac{3}{2x-1}<1 \Rightarrow x>2$ 或 $x<-1$

42、一等比數列，首項為 3，末項為 192，和為 $381+189\sqrt{2}$ ，則其公比為______。

答案：$\sqrt{2}$

解析：$a=3,\ a_n=192$ ，$S_n=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}=\dfrac{r\cdot a_n-a}{r-1}$ ，$381+189\sqrt{2}=\dfrac{192r-3}{r-1},\ \therefore r=\sqrt{2}$

43、一等比級數之公比為 r，設其前 n 項和為 S_n，已知 $S_{10}=5,\ S_{20}=15$ ，則 $S_{40}=$______，又 $r^{10}=$______。

答案：75, 2

解析：$S_{10}=\dfrac{a(r^{10}-1)}{r-1}=5$

$$S_{20}=\frac{a(r^{20}-1)}{r-1}=15 \quad \therefore \frac{r^{20}-1}{r^{10}-1}=3 \quad \therefore r^{10}+1=3 \quad \therefore r^{10}=2$$

$$\frac{a}{r-1}=5 \quad \therefore S_{40}=\frac{a(r^{40}-1)}{r-1}=5\times(2^4-1)=75$$

44、試求無窮等比級數 $3072-1536+768-384+\cdots$ 之和。

答案：首項為 $a=3072$ ，公比為 $r=\dfrac{-1536}{3072}=-\dfrac{1}{2}$ ，總和為 $\dfrac{a}{1-r}=\dfrac{3072}{1-(-\frac{1}{2})}=2048$

45、設 $n\in\mathbb{N}, 6^n$ 之一切正因數和為 a_n，則 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{6^n}=$ ？

答案：$6^n=2^n\times 3^n$ 其正因數和 $a_n=(2^0+2^1+\cdots+2^n)(3^0+3^1+\cdots+3^n)$ ，$a_n=(\dfrac{2^{n+1}-1}{2-1})(\dfrac{3^{n+1}-1}{3-1})$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{6^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}(2^{n+1}-1)(3^{n+1}-1)}{2^n\times 3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}(2-\frac{1}{2^n})(3-\frac{1}{3^n})=3$$

46、求無窮級數 $5+\dfrac{7}{3}+\cdots+\dfrac{2k+3}{3^{k-1}}+\cdots$ 之和。

答案：令 $S_n=5+\dfrac{7}{3}+\cdots+\dfrac{2k+3}{3^{k-1}}+\cdots+\dfrac{2n+3}{3^{n-1}}$

$$-)\ \frac{1}{3}S_n=\frac{5}{3}+\frac{7}{9}+\cdots+\frac{2(k-1)+3}{3^{k-1}}+\frac{2k+3}{3^k}+\cdots+\frac{2(n-1)+3}{3^{n-1}}+\frac{2n+3}{3^n}$$

$$\frac{2}{3}S_n=5+\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\cdots+\frac{2}{3^{k-1}}+\cdots+\frac{2}{3^{n-1}}-\frac{2n+3}{3^n}$$

$$\frac{2}{3}S_n=5+\frac{\frac{2}{3}\left[1-(\frac{1}{3})^{n-1}\right]}{1-\frac{1}{3}}-\frac{2n+3}{3^n}$$

$$S_n=\frac{15}{2}+\frac{3}{2}\left[1-(\frac{1}{3})^{n-1}\right]-\frac{3}{2}\times(\frac{2n+3}{3^n}) \text{，} S=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{15}{2}+\frac{3}{2}=9$$

47、甲先生參加臺灣銀行零存整付的存款，其辦法規定，每三個月為一期，每一期的第一天存款 10000 元，按年利率 12%計算，每三個月複利一次，五年期滿，問期滿時共可領回多少元？(不足一元者四捨五入) $(1.03)^{20}=1.806,\ (1.03)^{19}=1.753$

答案：

$$10000\times(1+3\%)^{20}+10000\times(1+3\%)^{19}+\cdots+10000\times(1+3\%)^{1}$$
$$=10000\times(1+3\%)\times\frac{1-(1+3\%)^{20}}{1-(1+3\%)}$$
$$=10000\times(1.03)\times\frac{(1.03)^{20}-1}{0.03}=10300\times\frac{1.806-1}{0.03}\doteq 276727$$

48、試求等比級數$\sum_{n=1}^{15}8$的和。

答案：$\sum_{n=1}^{15}8=8+8+8+8+8+8+8+8+8+8+8+8+8+8+8=8\times15=120$。

49、已知一無窮等比級數的和為 4，第二項為 -3，求其首項及公比？又若此級數前 n 項的和為 S_n，且 $|4-S_n|<\frac{1}{1000}$，求 n 的最小值？

答案：首項 $a_1=6$；公比 $r=-\frac{1}{2}$；n 的最小值 $=12$

50、設有一等比數列之首項為 3，公比為 5，若第 m 項加到第 n 項之和為 11625，且 $m<n$

則(1) (　　) $m=$ (A)3　(B)4　(C)5　(D)6　(E)7。

(2) (　　) $n=$ (A)3　(B)4　(C)5　(D)6　(E)7。

答案：(1) (B)　(2) (D)

解析：(1) $a_m+\cdots+a_n=3\times5^{m-1}+\cdots+3\times5^{n-1}=\frac{3\times5^{m-1}\times(5^{n-m+1}-1)}{5-1}=11625$

$\therefore 5^{m-1}(5^{n-m+1}-1)=5^3\times2^2\times31\ \therefore 5^{m-1}=5^3$，故 $m=4$。

(2) $5^{n-m+1}-1=124, \therefore 5^{n-m+1}=125$，$n-m+1=3, \therefore n=6$

51、某一無窮等比級數之和為 28，其各項之平方和為 112，則此級數之

(1) (　　) 首項為 (A)4　(B)6　(C)7　(D)12　(E)14。

(2) (　　) 公比為 (A)$\frac{1}{2}$　(B)$\frac{1}{3}$　(C)$\frac{2}{3}$　(D)$\frac{1}{4}$　(E)$\frac{3}{4}$。

答案：(1) (C)　(2) (E)

解析：(2) $\frac{a}{1-r}=28,\ a^2+a^2r^2+a^2r^4+\cdots=\frac{a^2}{1-r^2}=112$

$\therefore \frac{a}{1+r}=4\quad \therefore \frac{1+r}{1-r}=7\quad \therefore r=\frac{3}{4}\quad \therefore a=7$