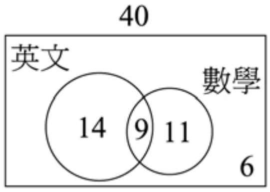
1、 某次考試，全班 40 人中英文不及格的有 17 人，數學不及格的有 20 人，兩科皆及格的有 9 人，則數學及格英文不及格的有____人，兩科皆不及格的有___人。




答案：11 ; 6

解析：如右圖

英文及格的人數為 $40-17=23$

數學及格的人數為 $40-20=20$

數學及格且英文不及格的人數為 11（人）

數學及英文皆不及格的人數為 $40-14-9-11=6$（人）。

2、 求下列函數的定義域

(1) $y=\dfrac{x-3}{(x+1)(x-2)}$ 之定義域為______　　(2) $y=\sqrt{|x|-1}$ 之定義域為______

答案：(1) $x\neq 2$ 且 $x\neq -1$　　(2) $x\geq 1$ 或 $x\leq -1$

解析：

(1)分母不為 0，$x\neq 2$ 且 $x\neq -1$

(2)根號內必須非負，$|x|-1\geq 0$　$\therefore |x|\geq 1$　$\therefore x\geq 1$ 或 $x\leq -1$

3、設 $a, b, c\in\mathbb{N}$ 且 $a:b:c=$ 8 : 12 : 9 又 gcd($a$,$b$,$c$) + lcm($a$,$b$,$c$) = 803 則 gcd($a$,$b$,$c$) = ______，又 $a=$______。

答案：11,88

解析：設 $a=8k,\ b=12k,\ c=9k$

$$\begin{array}{r|lll} k & 8k & 12k & 9k \\ \hline 4 & 8 & 12 & 9 \\ \hline 3 & 2 & 3 & 9 \\ \hline & 2 & 1 & 3 \end{array}$$

$\therefore$ gcd($a$,$b$,$c$) = $k$；　lcm($a$,$b$,$c$) = $k\times 4\times 3\times 2\times 1\times 3=72k$，

$k+72k=803$　$\therefore k=11$，故 $a=8\times 11=88$

4、 二直線 $L_1:\ kx-2y=3k-2,L_2:\ 3x+(k-5)y=25-6k$,

(1)當 $k=$______時，$L_1 // L_2$，　　(2)當 $k=$______時，$L_1=L_2$，

(3)當 $k\neq$______時，$L_1$與$L_2$相交，　　(4)當 $k=$______時，$L_1\perp L_2$。

答案：(1)2　(2)3　(3)2, 3　(4) –10

解析：(1) (2) $\dfrac{k}{3}=\dfrac{-2}{k-5}\Rightarrow k^2-5k+6=0\Rightarrow k=2$ 或 3

$k=2, L_1: 2x-2y=4, L_2: 3x-3y=13$(平行)

$k=3, L_1: 3x-2y=7, L_2: 3x-2y=7$(重合)

(3) $L_1$ 與 $L_2$ 相交，則 $\dfrac{k}{3}\neq\dfrac{-2}{k-5}\therefore k\neq 2$ 且 $k\neq 3$

(4) $L_1\perp L_2$, $(-\dfrac{k}{-2})\times(-\dfrac{3}{k-5})=-1\Rightarrow 3k-2(k-5)=0$　$\therefore k=-10$

5、 設一直線經過$(2,-3)$且在兩軸上之截距乘積為 3，則其直線方程式為______。

答案：$x+\frac{y}{3}=1,\ -\frac{x}{2}-\frac{2y}{3}=1$

解析：設$L:\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,\ \frac{2}{a}+\frac{-3}{b}=1$，又$ab=3$

$$\begin{cases}\frac{2}{a}+\frac{-3}{b}=1\\ ab=3\ \Rightarrow b=\frac{3}{a}\Rightarrow\frac{2}{a}+\frac{-3}{\frac{3}{a}}=1\Rightarrow\frac{2}{a}+\frac{-a}{1}=1\Rightarrow a^2+a-2=0\Rightarrow(a+2)(a-1)=0\end{cases}$$

$a=1,-2\Rightarrow b=3,-\frac{3}{2}$，得$(a,b)=(1,3)$或$(-2,-\frac{3}{2})$

$\therefore L$為$\frac{x}{1}+\frac{y}{3}=1$或$\frac{x}{-2}+\frac{-2y}{3}=1$

6、 設$a\in\mathbb{R}$，若方程式$x^2+(3a+2-i)x+(2a-i)=0$有實根，試求$a=$______，另一虛根為______。

答案：$-1$；$2+i$

解析：設實根為$\alpha$，另一虛根為$\beta$

$\alpha^2+(3a+2-i)\alpha+(2a-i)=0$

$\alpha^2+3a\alpha+2\alpha+2a-(\alpha+1)i=0\Rightarrow\begin{cases}\alpha^2+3a\alpha+2\alpha+2a=0\cdots\cdots①\\ \alpha+1=0\cdots\cdots②\end{cases}$

由②$\alpha=-1$ 代入① $1-3a-2+2a=0\Rightarrow a=-1$

又$\alpha+\beta=-(3a+2-i)\Rightarrow-1+\beta=1+i\Rightarrow\beta=2+i$

$\therefore a=-1$，另一虛根為$2+i$。

7、 設$\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，試求 (1)$(2+5\omega+2\omega^2)^6=$______。(2)$\omega^{100}+\frac{1}{\omega^{100}}=$______。

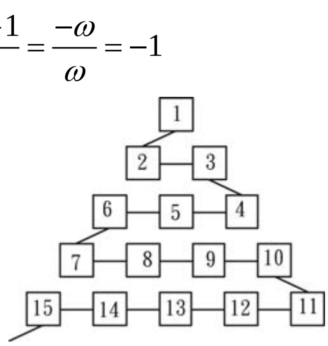
答案：(1)729　(2)$-1$

解析：$\because\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2},\therefore 1+\omega+\omega^2=0,\ \omega^3=1$

(1)$(2+5\omega+2\omega^2)^6=[2(1+\omega+\omega^2)+3\omega]^6=(3\omega)^6=3^6\omega^6=729\cdot1=729$

(2)$\omega^{100}=(\omega^3)^{33}\cdot\omega=\omega$，$\therefore\omega^{100}+\frac{1}{\omega^{100}}=\omega+\frac{1}{\omega}=\frac{\omega^2+1}{\omega}=\frac{-\omega}{\omega}=-1$

8、 右圖是從事網路工作者經常用來解釋網路運作的蛇形模型：數字1出現在第1列；數字2,3出現在第2列；數字6,5,4(從左至右)出現在第3列；數字7,8,9,10出現在第4列；依此類推。試問第99列，從左至右算，第67個數字為______。




答案：4884

解析：第 1 列有 1 個數，第 2 列有 2 個數，…，第$k$列有$k$個數，…，因此到第 98 列為止，共有 1+2+…+98$=\frac{99\times98}{2}=4851$個數，又第 99 列有 99 個數，

且是由右到左，故由左至右算第 67 個數字爲 $4851+(99-67+1)=4884$

9、 數列 $\frac{1}{1},\ \frac{2}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{1},\ \frac{2}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{4}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots$，依此規則，令 $a_n$ 表其第 $n$ 項，(1)若 $a_n=\frac{5}{14}$ ，則 $n=$____________。(2)試求 $a_{73}=$____________。

答案：167；$\frac{6}{7}$

解析：(1)找規則，第 1 組( $\frac{1}{1}$ )，第 2 組($\frac{2}{1}$，$\frac{1}{2}$)，第 3 組($\frac{3}{1}$，$\frac{2}{2}$，$\frac{1}{3}$)，……

知 $\frac{5}{14}$ 在第 18 組的第 14 個數，$(1+2+3+4+\ \cdots\ +17)+14=167$ 個

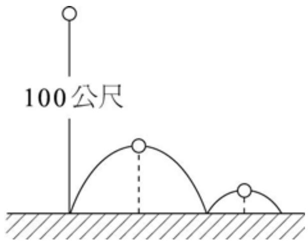
(2)$73=(1+2+3+4+\ \cdots\ +11)+7\Rightarrow a_{73}=\frac{6}{7}$ (在第 12 組的第 7 個數)

10、一皮球從 100 公尺的高處落下，每次返跳的高度爲其落下時高度的 $\frac{1}{3}$ 倍，則至靜止時，此球所經的距離爲______公尺。

答案：200

解析：所經過的距離爲 $100+2[100\times\frac{1}{3}+100\times(\frac{1}{3})^2+\cdots]$

$$=100+2\times\frac{\frac{100}{3}}{1-\frac{1}{3}}=100+100=200$$（公尺）。




11、若 $5x^5-5x^4+7x^3-4x^2+4x-2=(ax^2+bx+c)(5x^3+2x-1)+(dx^2+ex+f)$ ，則 $a+b+c+d+e+f=$______。

答案：0

解析：利用除法原理：被除式：$5x^5-5x^4+7x^3-4x^2+4x-2$；除式：$(5x^3+2x-1)$

商式：$ax^2+bx+c$ ；餘式：$dx^2+ex+f$

$$\begin{array}{r|l}
 & 1-1+1 \\
5+0+2-1 & 5-5+7-4+4-2 \\
 & \underline{5+0+2-1} \\
 & -5+5-3+4 \\
 & \underline{-5+0-2+1} \\
 & 5-1+3-2 \\
 & \underline{5+0+2-1} \\
 & -1+1-1
\end{array}$$

$\therefore ax^2+bx+c=x^2-x+1$ ，$dx^2+ex+f=-x^2+x-1$

故 $a+b+c+d+e+f=1-1+1-1+1-1=0$ 。

12、若多項式 $f(x)$ 除以 $x^2+2x+3$ 的餘式爲 $5x+6$，除以 $x-2$ 的餘式爲 $-6$，求 $f(x)$ 除以 $(x^2+2x+3)(x-2)$ 的餘式爲____________。

$\boxed{\text{答案}}$：$-2x^2+x$

$\boxed{\text{解析}}$：設$f(x)=(x-2)(x^2+2x+3)\,h(x)+a(x^2+2x+3)+5x+6$

$f(2)=11a+10+6=\ -6\Rightarrow a=-2$，餘式爲$-2(x^2+2x+3)+5x+6=-2x^2+x$

13、設 $f(x)=x^3+x^2-4x+(a-7)$ 與 $g(x)=2x^3-7x+(2a-8)$ 的最低公倍式爲五次式，求 $a=$________。

$\boxed{\text{答案}}$：3

$\boxed{\text{解析}}$：$\because\ f(x)\cdot g(x)=(f(x),g(x))\cdot[f(x),g(x)]$

設 $d(x)=(f(x),g(x))$ ，且 $\deg(d(x))=1$

$\therefore d(x)\,|\,f(x)=x^3+x^2-4x+(a-7)$

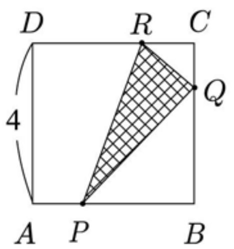
$d(x)\,|\,g(x)=2x^3-7x+(2a-8)$

$\Rightarrow d(x)\,|\,2f(x)-g(x)=2x^2-x-6=(2x+3)(x-2)$

$\therefore d(x)=x-2$ （$\because\ 2x+3\nmid f(x)$）；(一次因式檢查法)

$\therefore g(x)=16-14+2a-8=0\Rightarrow a=3$ 。

14、在邊長爲 4 的正方形 $ABCD$ 的三邊長 $\overline{AB}$ , $\overline{BC}$ , $\overline{CD}$ 上各取一點 $P,Q,R$，使 $2\overline{AP}=\overline{BQ}=2\overline{CR}$ ，則 $\triangle PQR$ 的最小面積爲__________，此時 $\overline{AP}=$________。

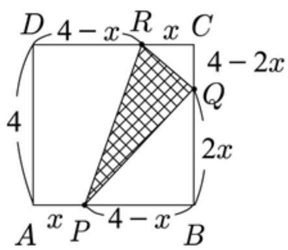



$\boxed{\text{答案}}$：$\dfrac{7}{2}$； $\dfrac{3}{2}$

$\boxed{\text{解析}}$：$\triangle PQR$ 面積$=16-\dfrac{4\cdot(4-x+x)}{2}-\dfrac{1}{2}(4-x)\cdot 2x-\dfrac{1}{2}x\cdot(4-2x)$

$=2x^2-6x+8=2(x-\dfrac{3}{2})^2+\dfrac{7}{2}$ ，當 $x=\dfrac{3}{2}$ 時，最小值$=\dfrac{7}{2}$ 。

即 $\overline{AP}=\dfrac{3}{2}$ 時， $\triangle PQR$ 的最小面積爲 $\dfrac{7}{2}$ 。




15、求方程式 $f(x)=2x^4+7x^3-x^2-17x-6=0$ 的全部有理根爲________或_______。

$\boxed{\text{答案}}$：$-2,\ \dfrac{3}{2}$

$\boxed{\text{解析}}$：由牛頓定理知(一次因式檢查法)：

若 $f(\dfrac{q}{p})=0\Rightarrow p\,|\,2,\ q\,|-6$ ，即有有理根必爲$\pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \pm6,\ \pm\dfrac{1}{2},\ \pm\dfrac{3}{2}$ 。

$$\begin{array}{l|l}
2+7-1-17-6 & -2 \\
\quad -4-6+14+6 & \\
\hline
2+3-7-3 \quad +0 & \\
\quad +3+9+3 & \dfrac{3}{2} \\
\hline
2+6+2+0 &
\end{array}$$

$\therefore$有理根爲$-2$與$\dfrac{3}{2}$

16、( B ) 設$m\in\mathbb{R}$，若二次函數$y=mx^2+10x+m+6$的圖形在直線$y=2$的上方,則$m$的範圍爲何？ (A)$m>0$ (B)$m>-2+\sqrt{29}$ (C)$0<m<-2+\sqrt{29}$ (D)$-2-\sqrt{29}<m<-2+\sqrt{29}$ (E)$m>-2+\sqrt{29}$或$m<-2-\sqrt{29}$

$\boxed{\text{解析}}$：$\because y=mx^2+10x+(m+6)$的圖形恆在$y=2$的上方

$\therefore mx^2+10x+(m+6)>2$ 恆成立

$\therefore mx^2+10x+(m+4)>0, \forall x\in\mathbb{R}$ 恆成立

$$\therefore \begin{cases} m>0 \\ D=10^2-4m(m+4)<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m>0 \\ m>-2+\sqrt{29}\text{或}m<-2-\sqrt{29} \end{cases},$$

$\therefore m>-2+\sqrt{29}$

，故答案爲(B)。

17、(1)求$\log\dfrac{1}{250}=$______。(2)若$\dfrac{1}{300}<(\dfrac{7}{8})^n<\dfrac{1}{250}$，則自然數$n$之值爲______。

$\boxed{\text{答案}}$：(1) -2.398 (2) 42

$\boxed{\text{解析}}$：(1)$\log\dfrac{1}{250}=\log\dfrac{4}{1000}=\log 4-\log 1000=2\log 2-3=-2.398$

(2)$\log\dfrac{1}{300}=-\log(3\times 100)=-\log 100-\log 3=-2-\log 3=-2.4771$

$\log\dfrac{7}{8}=\log 7-\log 8=\log 7-3\log 2=-0.0579$

$\therefore -2.4771<n\times(-0.0579)<-2.398$ $\therefore 42.7>n>41.4$，$\therefore n=42$

18、( E ) $\log x=-1.2345$，則下列何者爲真

(A)$\log x$的首數爲-1

(B)$\log x$的尾數爲 0.2345

(C)小數$x$從小數點向右第 1 位出現非 0 之數字

(D)小數$x$從小數點向右第一個出現非 0 之數字爲 1 (E)$\dfrac{1}{100}<x<\dfrac{1}{10}$

$\boxed{\text{解析}}$：$\log x=-1.2345=-2+0.7655$

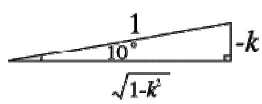
$\therefore$首數爲-2，尾數爲 0.7655，小數點後第二位出現非 0 之數字$k$

$\because \log 5=0.6990<0.7655<\log 6=0.7781$ $\therefore k=5$

$\because -2<\log x<-1$ $\therefore \dfrac{1}{100}<x<\dfrac{1}{10}$

19、令$\sin(-10°)=k$，則$\cot 190°=$______，$\csc 80°=$______。

$\boxed{\text{答案}}$：$\dfrac{\sqrt{1-k^2}}{-k}$，$\dfrac{1}{\sqrt{1-k^2}}$




$\boxed{\text{解析}}$：$\sin 10°=-k$，$\cot 190°=\cot(180°+10°)=\cot 10°=\dfrac{\sqrt{1-k^2}}{-k}$

$$\csc 80° = \sec(90° - 10°) = \sec 10° = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}}$$

20、已知$\tan 211°30' = 0.6128,\ \cot 121°40' = -0.6168$，又$\tan\theta = -0.6160$，且$270° < \theta < 360°$，則$\theta =$______。又$\cot(-958°25') =$______。

答案：$328°22'$，$-0.6148$

解析：

$\tan 211°30' = 0.6128 \Rightarrow \tan(180° + 31°30') = \tan 31°30' = 0.6128,$

$\cot 121°40' = -0.6168 \Rightarrow \cot(90° + 31°40') = -\tan 31°40' = -0.6168$

即$\tan 31°40' = 0.6168,$ 設$\tan\alpha = 0.6160$

利用內插法$\Rightarrow \alpha = 31°30' + \frac{32}{40} \times 10' \quad \therefore \alpha = 31°38'$

又$\tan\theta = -0.6160$，且$270° < \theta < 360° \quad \therefore \theta = 360° - 31°38' = 328°22'$

$\cot(-958°25') = -\cot 958°25' = -\cot(90° \times 11 - 31°35') = -\tan 31°35' = -0.6148$

21、$\triangle ABC$ 中，三邊長爲 5, 6, 7，則$\triangle ABC$ 的面積爲______，外接圓半徑爲______，內切圓半徑爲______。

答案：$6\sqrt{6}$，$\frac{35\sqrt{6}}{24}$，$\frac{2\sqrt{6}}{3}$

解析：$s = \frac{5+6+7}{2} = 9 \Rightarrow \triangle ABC = \sqrt{9 \times (9-5) \times (9-6) \times (9-7)} = 6\sqrt{6}$ (海龍公式)

$\because 2R = \frac{abc}{2\triangle} \quad \therefore R = \frac{35\sqrt{6}}{24}$，$\quad \Delta = rs \Rightarrow \quad r = \frac{6\sqrt{6}}{9} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$

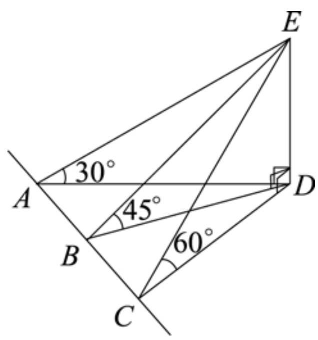
22、在$\triangle ABC$ 中，若$\sin A : \sin B : \sin C = 7 : 4 : 5$，則$\cos A =$______。

答案：$-\frac{1}{5}$

解析：$\because a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C = 7 : 4 : 5$，$\therefore$設$a = 7r,\ b = 4r,\ c = 5r,\ r \neq 0$

利用餘弦定理可得$\cos A = \frac{(4r)^2 + (5r)^2 - (7r)^2}{2 \cdot 4r \cdot 5r} = \frac{-8r^2}{40r^2} = -\frac{1}{5}$

23、由一直線上相異三點 $A,\ B,\ C$ 測得一高塔的仰角分別爲$30°, 45°, 60°$，若$\overline{AB} = \overline{BC} = 600$公尺，則此高塔高度是多少？




答案：$300\sqrt{6}$公尺

解析：令$\overline{DE} = x \Rightarrow \overline{AD} = \sqrt{3}x,\ \overline{BD} = x,\ \overline{CD} = \frac{x}{\sqrt{3}}$

利用中線長定理：$\overline{DA}^2 + \overline{DC}^2 = 2\overline{DB}^2 + \frac{1}{2}\overline{AC}^2$

$\Rightarrow (\sqrt{3}x)^2 + (\frac{x}{\sqrt{3}})^2 = 2x^2 + \frac{1}{2}(1200^2)$，$\frac{4}{3}x^2 = \frac{1}{2} \times 1200^2$，

$\therefore x = 300\sqrt{6}$，$\quad \therefore$塔高$= \sqrt{3}x = 300\sqrt{6}$（公尺）

24、$\sin^4\frac{\pi}{8}+\sin^4\frac{3\pi}{8}+\sin^4\frac{5\pi}{8}+\sin^4\frac{7\pi}{8}$ 之值=______。

答案：$\frac{3}{2}$

解析：降次：

$$原式=(\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2})^2+(\frac{1-\cos\frac{3\pi}{4}}{2})^2+(\frac{1-\cos\frac{5\pi}{4}}{2})^2+(\frac{1-\cos\frac{7\pi}{4}}{2})^2$$

$$=2[(\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2})^2+(\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2})^2]=2\cdot[(\frac{2-\sqrt{2}}{4})^2+(\frac{2+\sqrt{2}}{4})^2]=2\cdot\frac{12}{16}=\frac{3}{2}$$

25、設 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 且 $0<\theta<\pi$ ，則 $\sin 2\theta=$______，又 $\theta=$______。

答案：$-\frac{1}{2}$, $105°$

解析：$\because(\sin\theta+\cos\theta)^2=\frac{1}{2}\Rightarrow\sin^2\theta+2\sin\theta\cdot\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{2}$ ，

$\therefore 2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}-1\Rightarrow\sin 2\theta=-\frac{1}{2}$

$\because 0<2\theta<2\pi$ $\quad\therefore 2\theta=210°$ 或 $330°$

但 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}>0$ （$\theta=165°$ 不合），故 $2\theta=210°$, $\theta=105°$

26、( C ) 試問 $\frac{\cos 100°-\cos 20°}{\cos 50°}$ 等於 (A)$\sqrt{3}$ (B)$-\sqrt{3}$ (C)-2 (D)$\frac{1}{2}$ (E)$-\frac{1}{2}$

解析：利用和差化積公式得原式

$$=\frac{-2\sin\frac{100°+20°}{2}\cdot\sin\frac{100°-20°}{2}}{\cos 50°}=\frac{-2\sin 60°\cdot\sin 40°}{\cos 50°}=\frac{-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 40°}{\sin 40°}$$

$$=-\sqrt{3}$$

27、設 $f(x)=\cos(\frac{\pi}{3}-x)-\cos x+1$ 且 $\frac{3}{2}\pi\le x\le 2\pi$ ，則 $x=$______時， $f(x)$ 有最大值爲______又 $x=$______時， $f(x)$ 有最小值爲______。

答案：$2\pi$ ， $\frac{1}{2}$, $\frac{10}{6}\pi$ , 0

解析： $f(x)=\cos(\frac{\pi}{3}-x)-\cos x+1$

$$=\cos\frac{\pi}{3}\cos x+\sin\frac{\pi}{3}\sin x-\cos x+1$$

$$=\sin x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos x\cdot\frac{1}{2}+1$$

$$=\sin(x-\frac{\pi}{6})+1$$

$\therefore \frac{3}{2}\pi \le x \le 2\pi \quad \therefore \frac{4}{3}\pi \le x-\frac{\pi}{6} \le \frac{11}{6}\pi$

$-1 \le \sin(x-\frac{\pi}{6}) \le -\frac{1}{2} \quad \therefore 0 \le f(x) \le \frac{1}{2}$

$x-\frac{\pi}{6}=\frac{11}{6}\pi$ 時，即 $x=2\pi$ 時， $f(x)=\frac{1}{2}$ 爲最大値

$x-\frac{\pi}{6}=\frac{3}{2}\pi$ 時，即 $x=\frac{10}{6}\pi$ 時， $f(x)=0$ 爲最小値

28、 $\triangle ABC$ 中， $\overline{CA}=5,\ \overline{AB}=6,\ \angle A=\cos^{-1}\frac{2}{3}$ ，則 $\overline{BC}=$______。

答案： $\sqrt{21}$

解析： $\angle A=\cos^{-1}\frac{2}{3},\ \therefore \cos A=\cos(\cos^{-1}\frac{2}{3})=\frac{2}{3}$ ， $\therefore \cos A=\frac{25+36-\overline{BC}^2}{2\cdot 5\cdot 6}=\frac{2}{3}$

$\therefore \overline{BC}^2=21,\ \overline{BC}=\sqrt{21}$

29、( D ) 複數 $(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)^{100}$ 落在複數平面上的

(A)第一象限 (B)第二象限 (C)實軸上 (D)第三象限 (E)第四象限

解析： $(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})^{100}=\cos\frac{100}{3}\pi+i\sin\frac{100}{3}\pi=\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi$ ，故第三象限

30、 $z\in\mathbb{C}$ ，若 $\left|\frac{z}{z-1}\right|=\frac{1}{2},\ \mathrm{Arg}(\frac{z-1}{z})=\frac{\pi}{3}$ ，則 $z=$______。

答案： $\frac{\sqrt{3}i}{3}$

解析：利用極式定義

$\therefore \frac{z-1}{z}=\left|\frac{z-1}{z}\right|\cdot(\cos\theta+i\sin\theta),\theta=\mathrm{Arg}(\frac{z-1}{z})$

$\therefore \frac{z-1}{z}=2\cdot(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})=1+\sqrt{3}i$

$\therefore z-1=(1+\sqrt{3}i)z \Rightarrow -1=(1+\sqrt{3}i)z-z \Rightarrow z=\frac{-1}{\sqrt{3}i}=\frac{\sqrt{3}i}{3}$

31、在四邊形 $ABCD$ 中， $\angle A=120°,\overline{AB}=1,\overline{AD}=2$ 且 $\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}$ ，求 $\overline{AC}=$________。

答案： $\sqrt{13}$

解析: $|\overrightarrow{AC}|^2=9|\overrightarrow{AB}|^2+12\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+4|\overrightarrow{AD}|^2=9+12\cdot[1\cdot 2\cdot(-\frac{1}{2})]+16=13$ ， $\therefore \overline{AC}=\sqrt{13}$

32、已知點 $A(2,5)$ 及一直線 $L:4x+3y+2=0$ ，試求

(1)$A$ 到 $L$ 的距離爲______， (2)$A$ 在 $L$ 上的正射影爲______，

(3)$A$ 對於 $L$ 的對稱點爲______。

答案：5; (-2,2); (-6,-1)

解析：(1) $d(A,L)=\dfrac{8+15+2}{5}=5$

(2) $A(2,5)$代入直線$L:4x+3y+2=0\Rightarrow 4\times2+3\times5+2=25$

$A$ 在 $L$ 上的正射影為$(2-\dfrac{4\times25}{4^2+3^2},5-\dfrac{3\times25}{4^2+3^2})=(-2,2)$

(3)對稱點$(2-\dfrac{2\times4\times25}{4^2+3^2},5-\dfrac{2\times3\times25}{4^2+3^2})=(-6,-1)$

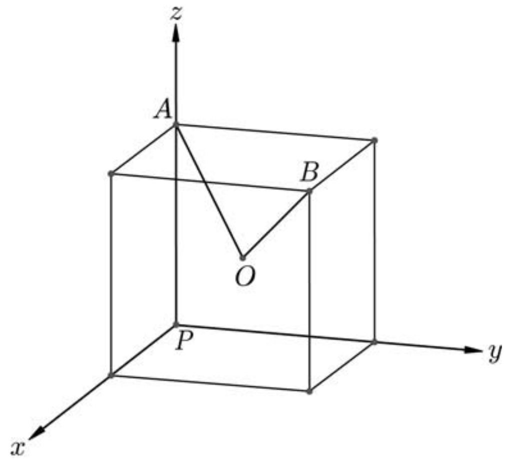
33、設$x,y\in\mathbb{R}$，若$3x-y=2$，則$x^2+y^2$的最小值為______，此時的$x=$______。

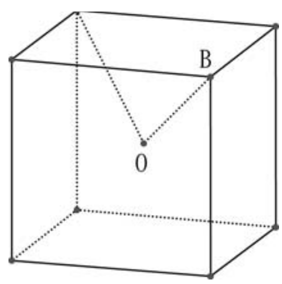
答案：$\dfrac{2}{5}$；$\dfrac{3}{5}$

解析：$(x^2+y^2)[3^2+(-1)^2]\ge(3x-y)^2$；$(x^2+y^2)\ge\dfrac{4}{10}$，最小值為$\dfrac{2}{5}$，

此時$\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{-1}=t\Rightarrow x=3t,\quad y=-t$，代入$3x-y=2$，$\therefore t=\dfrac{1}{5}\Rightarrow x=\dfrac{3}{5}$

34、如圖所示設一正立方體的中心為$O$，而$A, B$為此正立方體同一面上的兩個對頂點，則$\cos\angle AOB=$______。(以最簡分數表示)




答案：$-\dfrac{1}{3}$

解析：建立一坐標系，並設正立方體之稜長為 2，取$P=(0,0,0)$，$A=(0,0,2)$，$B=(2,2,2)$，如圖，則$O=(1,1,1)$

$\Rightarrow \overrightarrow{OA}=(-1,-1,1)$，$\overrightarrow{OB}=(1,1,1)$

$$\cos\angle AOB=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}|\ |\overrightarrow{OB}|}=\frac{-1-1+1}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=-\frac{1}{3}$$

35、設$|\overrightarrow{a}|=2,\ |\overrightarrow{b}|=1,\ \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=-\sqrt{3}$，則$\overrightarrow{a}$與$\overrightarrow{b}$之夾角為________；又$(3\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})\cdot(\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b})=$________；又$|\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}|=$________。

答案：150°；$10-5\sqrt{3}$；$\sqrt{6}-\sqrt{2}$

解析：$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}|\ |\overrightarrow{b}|}=\dfrac{-\sqrt{3}}{2\cdot1}$，$\therefore\theta=150°$

$(3\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})\cdot(\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b})=3|\overrightarrow{a}|^2+5\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}-2|\overrightarrow{b}|^2=12-5\sqrt{3}-2=10-5\sqrt{3}$

$|\vec{a}+2\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+4|\vec{b}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}=8-4\sqrt{3}$，

$\therefore\ |\vec{a}+2\vec{b}|=\sqrt{8-4\sqrt{3}}=\sqrt{8-2\sqrt{12}}=\sqrt{6}-\sqrt{2}$

36、過 $A(1, 0, 2)$, $B(0,-2, 3)$, $C(1,-5,-3)$三點之平面方程式爲________。

答案：$3x-y+z=5$

解析：

$\overrightarrow{AB}=(-1,-2,1)$，$\overrightarrow{AC}=(0,-5,-5)=5(0,-1,-1)$

$\vec{n}=(-1,-2,1)\times(0,-1,-1)=(\begin{vmatrix}-2&1\\-1&-1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&-1\\-1&0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-1&-2\\0&-1\end{vmatrix})=(3，(-1)，1)$

$\therefore E: 3(x-1)-(y-0)+(z-2)=0 \Rightarrow\ 3x-y+z=5$

37、設 $L_1:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{4}$，$L_2:\dfrac{x-5}{4}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z}{3}$，則

(1) $L_1$ 與 $L_2$ 的交點坐標爲_______。(2)包含 $L_1$ 與 $L_2$ 之平面方程式爲________。

答案：(1) $P(1, 2,-3)$　(2) $-7x+13y+5z=4$

解析：(1)由 $L_1$，令交點 $P(t+2,-t+1,4t+1)$，代入 $L_2$，

$\dfrac{t-3}{4}=\dfrac{-t-2}{1}=\dfrac{4t+1}{3}\Rightarrow t=-1$，$\therefore$交點 $P(1, 2,-3)$。

(2)$\because\ \vec{n}\perp\vec{v_1}$ 且 $\vec{n}\perp\vec{v_2}$，其中 $\overrightarrow{v_1}=(1,-1,4)$，$\overrightarrow{v_2}=(4,1,3)$

$\therefore\ \vec{n}=\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2}=(\begin{vmatrix}-1&4\\1&3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}4&1\\3&4\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&-1\\4&1\end{vmatrix})=((-7)，13，5)$

$\therefore E: -7(x-2)+13(y-1)+5(z-1)=0\Rightarrow\ -7x+13y+5z=4$

38、設直線 $L$ 過 $A(-1,1,2)$, $B(3,-1,8)$兩點，若點 $P(3,-2,3)$，則 $P$ 在 $L$ 之垂足爲_________；又 $P$ 到直線 $L$ 之距離爲________。

答案：$(1,0,5)$; $2\sqrt{3}$

解析：

$\overrightarrow{AB}=(4,-2,6)=2(2,-1,3)$，$\overleftrightarrow{AB}: x=-1+2t,\ y=1-t,\ z=2+3t,$

設 $P$ 在 $L$ 之垂足爲 $H(-1+2t,1-t,2+3t)$, $\overrightarrow{PH}=(-4+2t,3-t,-1+3t)$

$\overrightarrow{PH}\cdot\overrightarrow{AB}=0\Rightarrow(2t-4,-t+3,3t-1)\cdot(2,-1,3)=0$，$\therefore t=1$

垂足爲 $H(1,0,5)$, $d(P,L)=\sqrt{2^2+2^2+2^2}=2\sqrt{3}$

39、若方程組 $\begin{cases}(a+2)x-y+2z=0\\x+y+(a+1)z=0\\7x-3y+(a-1)z=0\end{cases}$ 有異於 $x=y=z=0$ 之解，則 $a=$______ 或______。

答案：$-3$; $2$

$\boxed{解析}$：$\Delta=\begin{vmatrix}a+2 & -1 & 2\\ 1 & 1 & a+1\\ 7 & -3 & a-1\end{vmatrix}=0$，$\begin{vmatrix}a+3 & -1 & 2\\ a+3 & 1 & a+1\\ a+3 & -3 & a-1\end{vmatrix}=0$，$\therefore 4(a+3)(a-2)=0$

$\therefore a=-3$ 或 $2$

40、設 $x, y, z$ 滿足 $3x+y-z=3,\ x-y+2z+4=0$，則 $z^2-2x+2y$ 之最小值為______；此時 $x=$______。

$\boxed{答案}$：$4;\ \dfrac{1}{4}$

$\boxed{解析}$：$\begin{cases}3x+y-z=3\\ x-y+2z+4=0\end{cases}$，設 $x=t,\ y=2-7t,\ z=-1-4t$，代入 $z^2-2x+2y$

$\therefore z^2-2x+2y=16t^2-8t+5=(4t-1)^2+4\geq 4$，$\therefore$最小值 4，此時 $x=t=\dfrac{1}{4}$

41、空間中相異四點為 $A(0,1,1), B(2,1,4), C(-3,2,1), D(0,2,2)$，則

(1)$\triangle ABC$ 的面積為______，(2)四面體 $ABCD$ 的體積為______。

$\boxed{答案}$：(1)$\dfrac{\sqrt{94}}{2}$ (2)$\dfrac{7}{6}$

$\boxed{解析}$：(1) $\overrightarrow{AB}=(2,0,3)$，$\overrightarrow{AC}=(-3,1,0)$，$\overrightarrow{AD}=(0,1,1)$

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(-3,-9,2)$，$\therefore\triangle ABC$ 面積為$=\dfrac{1}{2}\sqrt{(-3)^2+(-9)^2+2^2}=\dfrac{\sqrt{94}}{2}$

(2)四面體 $ABCD=\dfrac{1}{6}\left\|\begin{matrix}2 & 0 & 3\\ -3 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{matrix}\right\|=\dfrac{7}{6}$

42、( C ) 設 $f(x)=\begin{vmatrix}x+4 & 0 & 1\\ -1 & x-2 & 1\\ 3 & 5 & x-1\end{vmatrix}$，則 $f(x)$除以 $x-3$ 所得之餘式為何？

(A)–9 (B)–19 (C)–29 (D)–39 (E)–49

$\boxed{解析}$：餘式$=f(3)=\begin{vmatrix}7 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 1\\ 3 & 5 & 2\end{vmatrix}=14-5-3-35=-29$

43、圓 $C$ 上有三點 $A(-1,1), B(3,5), C(5,-1)$，則圓 $C$ 的方程式為______。

$\boxed{答案}$：$x^2+y^2-5x-3y-4=0$

$\boxed{解析}$：

設圓方程式為 $x^2+y^2+dx+ey+f=0$

三點 $A(-1,1), B(3,5), C(5,-1)$代入$\Rightarrow\begin{cases}1+1-d+e+f=0\\ 9+25+3d+5e+f=0\\ 25+1+5d-e+f=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}d=-5\\ e=-3\\ f=-4\end{cases}$

圓方程式為 $x^2+y^2-5x-3y-4=0$

44、圓 $C$ 以$(-2,1)$爲圓心與圓$C_1$ $: x^2+y^2-4x+4y+4=0$ 相切，則圓 $C$ 之方程式爲______或______。

答案：$(x+2)^2+(y-1)^2=9$； $(x+2)^2+(y-1)^2=49$

解析：圓$C_1$ $:(x-2)^2+(y+2)^2=4$，連心線長$\overline{C_1C_2}=\sqrt{(2+2)^2+(-2-1)^2}=5$

若圓 $C$ 與圓$C_1$外切，半徑$5-2=3$，可得$(x+2)^2+(y-1)^2=9$

若圓 $C$ 與圓$C_1$內切，半徑$5+2=7$，可得$(x+2)^2+(y-1)^2=49$

45、設 $A(-4, 4)$，圓 $C$: $x^2+y^2-6x-6y-7=0$ 若通過 $A$ 點對圓 $C$ 作二切線得切點爲 $P, Q$，則(1) $\overline{AP}=$_________。(2)△$APQ$ 之外接圓方程式爲_____________。

答案：(1) 5　　(2) $x^2+y^2+x-7y=0$

解析：(1) $\overline{AP}=\sqrt{16+16+24-24-7}=5$

(2) 圓 $C$ 圓心 $C$ (3, 3)，△$APQ$ 之外接圓即以$\overline{CA}$爲直徑之圓，

$\therefore (x-3)(x+4)+(y-3)(y-4)=0$，$\therefore$圓爲 $x^2+y^2+x-7y=0$

46、自點 $A(-3,2)$作圓$C:(x-1)^2+y^2=5$的二切線分別切圓 $C$ 於 $P, Q$ 兩點則(1)直線 $PQ$ 的方程式爲______, (2)又四邊形 $CPAQ$ 的面積爲______。

答案：(1) $4x-2y+1=0$　(2) $5\sqrt{3}$

解析：(1)直線 $PQ$ 之方程式爲 $(-3-1)(x-1)+2y=5 \Rightarrow 4x-2y+1=0$

(2) $\overline{CA}=\sqrt{(-3-1)^2+(2-0)^2}=2\sqrt{5}$，圓 $C$ 之半徑 $\sqrt{5}$，

$A$ 到圓 $C$ 之切線段長爲 $\sqrt{(-3-1)^2+2^2-5}=\sqrt{15}$

$\therefore$四邊形 $CPAQ$ 的面積爲 $2\Delta PAC=2\cdot(\frac{1}{2}\sqrt{15}\times\sqrt{5})=5\sqrt{3}$

47、設圓 $C$ 的方程式爲 $(x-1)^2+y^2=4$，則過圓 $C$ 外一點 $P(3,5)$與圓 $C$ 相切之直線方程式爲______或______。

答案：$y=\frac{21}{20}x+\frac{37}{20}$； $x=3$

解析：設切線爲 $y-5=m(x-3) \Rightarrow mx-y-3m+5=0$，$\frac{|-2m+5|}{\sqrt{m^2+1}}=2$

$20m=21$　$\therefore m=\frac{21}{20}$　$\therefore$二切線方程式爲 $y=\frac{21}{20}x+\frac{37}{20}$ 或 $x=3$

48、設平面 $\pi: x+2y+z+2=0$ 截一球面 $S:(x-5)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=10$ 於一圓，則此圓之圓心爲______，圓的半徑爲______。

答案：(4,–3,0); 2

解析：球心到平面 $\pi$ 之距離爲 $\frac{|5-2+1+2|}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}$，球之半徑爲 $\sqrt{10}$

$\therefore$截圓之半徑爲 $\sqrt{10-6}=2$

$(5,-1,1)$代入平面$\pi: x+2y+z+2=0 \Rightarrow 5-2+1+2=6$

圓心爲$(5-\dfrac{1\times 6}{1^2+2^2+1^2},-1-\dfrac{2\times 6}{1^2+2^2+1^2},1-\dfrac{1\times 6}{1^2+2^2+1^2})=(4,-3,0)$

49、設兩球$S_1\ :(x-1)^2+(y+4)^2+(z-2)^2=16$,

$S_2\ :x^2+y^2+z^2+10x+2y+8z-1=0$相交於一圓，則此圓之圓心爲______，圓的半徑爲______。

答案：$(-1,-3,0)$; $\sqrt{7}$

解析：兩球之根平面爲$S_2-S_1 \Rightarrow 12x-6y+12z-6=0$

$\therefore$此圓落於平面$\pi: 2x-y+2z-1=0$上，

球心$(1,-4,2)$到平面$\pi$之距離爲$\dfrac{|9|}{3}=3$　$\therefore$圓之半徑$=\sqrt{16-9}=\sqrt{7}$

$(1,-4,2)$代入平面$\pi: 2x-y+2z-1=0 \Rightarrow 2+4+4-1=9$

圓心即爲$(1,-4,2)$在平面$\pi: 2x-y+2z-1=0$上正射影

$(1-\dfrac{2\times 9}{2^2+(-1)^2+2^2},-4-\dfrac{(-1)\times 9}{2^2+(-1)^2+2^2},2-\dfrac{2\times 9}{2^2+(-1)^2+2^2})=(-1,-3,0)$

50、(1)5個相同的球，在地上分成三堆，則其分法有_______種。
(2)5個不同的球，在地上分成三堆，則其分法有_______種。
(3)5個相同的球，任意分給甲、乙、丙三人，則其分法有_______種。
(4)5個不同的球，任意分給甲、乙、丙三人，則其分法有_______種。

答案：(1) 5種　(2) 41　(3) 21　(4) 243

解析：(1) $5=(5,0,0)=(4,1,0)=(3,2,0)=(3,1,1)=(2,2,1)$，5種

(2) $C_5^5+C_4^5C_1^1+C_3^5C_2^2+\dfrac{C_3^5C_1^2C_1^1}{2!}+\dfrac{C_2^5C_2^3C_1^1}{2!}=41$

(3) $H_5^3=C_5^7=21$　(4) $3^5=243$

51、設$(ax-1)^9$與$(x-\dfrac{2}{3})^8$之展開式中的$x^3$項係數相等，則$a=$ _______，又$(ax-1)^9$展開式中$x^3$項係數爲_______。

答案：$a=-\dfrac{4}{9}$　$-\dfrac{1792}{243}$

解析：$C_3^9(ax)^3=C_3^8x^3(-\dfrac{2}{3})^5$　$\therefore 9a^3=6\times(-\dfrac{2}{3})^5$　$\therefore a=-\dfrac{4}{9}$

$x^3$項係數爲$C_3^8(-\dfrac{2}{3})^5=-\dfrac{1792}{243}$

52、設甲袋有2個白球，3個黃球，乙袋有4個白球，3個黃球，今自甲袋中取出一球放入乙袋，再由乙袋取出三球，則(1)此三球爲同色球之機率爲____，(2)此三球爲2個白球1個黃球的機率爲_______。

答案：$\dfrac{23}{140}$, $\dfrac{33}{70}$

解析：(1)甲袋中取出一白球放入乙袋，再由乙袋取出三白球或三黃球

甲袋中取出一黃球放入乙袋，再由乙袋取出三白球或三黃球

$\Rightarrow \frac{2}{5}\times(\frac{C_3^5+C_3^3}{C_3^8})+\frac{3}{5}\times(\frac{C_3^4+C_3^4}{C_3^8})=\frac{23}{140}$

(2)甲袋中取出一白球放入乙袋，再由乙袋取出 2 個白球 1 個黃球

甲袋中取出一黃球放入乙袋，再由乙袋取出 2 個白球 1 個黃球

$\Rightarrow \frac{2}{5}\times(\frac{C_2^5C_1^3}{C_3^8})+\frac{3}{5}\times(\frac{C_2^4C_1^4}{C_3^8})=\frac{33}{70}$

53、將 5 個不同的球丟入 3 個不同的箱子：

(1)每箱均有球之機率爲______，(2)恰有一個空箱之機率爲______。

答案：(1) $\frac{50}{81}$ (2) $\frac{10}{27}$

答案： (1)全－1 空箱+2 空箱：$\frac{3^5-C_1^3\cdot 2^5+C_2^3\cdot 1^5}{3^5}=\frac{50}{81}$

(2) $\frac{C_1^3(2^5-2)}{3^5}=\frac{10}{27}$ (先選一箱爲空箱，將 5 個不同的球丟入剩餘 2 個不同的箱子，但扣除 2 種 5 個球全丟入同一箱的情形)

54、甲、乙二人進行乒乓球比賽，已知每場甲獲勝之機率爲乙的 2 倍，且比賽均不得有和局，約定先勝三場者可獲得獎金 540 元，今比賽了二場，甲、乙各勝乙場，但卻因故停止比賽並決定不再比賽，則獎金依獲勝機率分配，甲應獲得______元。

答案：400

解析：甲乙$\begin{cases}\text{甲甲}\\\text{乙甲甲}\end{cases}$，甲勝之機率爲 $(\frac{2}{3})^2+2\times\frac{1}{3}\times(\frac{2}{3})^2=\frac{20}{27}$

$540\times\frac{20}{27}=400$，甲得 400 元

55、$A$、$B$兩箱中分別放入 5000 元，$A$箱中放入 2 張 1000 元、6 張 500 元，$B$箱中放入 1 張 1000 元，4 張 500 元，20 張 100 元，在$A$箱中任取 1 張的期望值爲$K_1$元，在$B$箱中任取 3 張其金額總和的期望值爲$K_2$元，則 $K_2=$______，又$K_1$，$K_2$之大小關係爲______。

答案：$600, K_1>K_2$

解析：$K_1=\frac{1000\times 2+500\times 6}{8}=\frac{5000}{8}=625$

$K_2=3\times(\frac{1000\times 1+500\times 4+100\times 20}{25})=600\Rightarrow K_1>K_2$

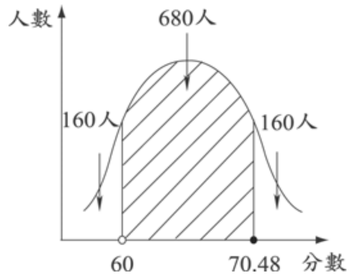
56、( B ) 若某校 1000 位學生的數學段考成績平均分數是 65.24 分，樣本標準差是 5.24 分，而且已知成績分佈呈現常態分配。試問全校約有多少人數學成績低於 60 分？（常態分佈的資料對稱於平均數 $M$。且當標準差爲 $S$ 時，該資料大約有 68%落在區間$(M-S, M+S)$內，約有 95%落在區間$(M-2S, M+2S)$內，約有 99.7%落在區間$(M-3S, M+3S)$內。）

(A)約 80 人 (B)約 160 人 (C)約 240 人 (D)約 320 人 (E)約 400 人

解析：有 68%（即 680 人）落在$(65.24-5.24, 65.24+5.24)=(60, 70.48)$的區間內

$\therefore$落在區間外的人約有$1000-680=320$

$\because$常態分配呈左右對稱，在小於 60 分的人數約有$\dfrac{320}{2}=160$人




57、某班月考數學成績之累積次數分配表如下，則該班級數學成績的中位數為______分；算術平均數為______分。(四捨五入到整數位)

| 組　別 | 以上累積次數 | 次數 $f_i$ |
|---|---|---|
| 30～40 | 50 | 5 |
| 40～50 | 45 | 6 |
| 50～60 | 39 | 7 |
| 60～70 | 32 | 5 |
| 70～80 | 27 | 12 |
| 80～90 | 15 | 10 |
| 90～100 | 5 | 5 |

答案：72；68

解析：

| 組別 | 次數 | 以下累積次數 | 組中數 | $x_k-A$ | $f_k(x_k-A)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 30～40 | 5 | 5 | 35 | –30 | –150 |
| 40～50 | 6 | 11 | 45 | –20 | –120 |
| 50～60 | 7 | 18 | 55 | –10 | –70 |
| 60～70 | 5 | 23 | 65 | 0 | 0 |
| 70～80 | 12 | 35 | 75 | 10 | 120 |
| 80～90 | 10 | 45 | 85 | 20 | 200 |
| 90～100 | 5 | 50 | 95 | 30 | 150 |
| | 50 | | | | 130 |

$A=65$

$\therefore$算術平均數$=65+\dfrac{130}{50}=67.6\doteqdot 68$（分）

| 分數 | 次數 |
|---|---|
| 70 | 23 |
| $Me$ | 25 |
| 80 | 35 |

內插法：$\dfrac{Me-70}{80-70}=\dfrac{2}{12}\Rightarrow Me=70+\dfrac{\frac{50}{2}-23}{12}\times 10=71.67 \doteqdot 72$（分）。

58、有 10 個人在某次考試得到平均分數 56，標準差爲 4，若 10 個人中的 8 個人的得分是：50, 52, 53, 54, 56, 57, 60, 61，試求其他 2 人的得分爲______分。

答案：55, 62

解析：設此二人得分爲 $x, y$，且 $a=x-56, b=y-56$

$$\therefore \begin{cases} 56=56+\dfrac{-6-4-3-2+0+1+4+5+a+b}{10} \\ 4=\sqrt{\dfrac{1}{9}(36+16+9+4+1+16+25+a^2+b^2)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=5\cdots\cdots\cdots\cdots① \\ a^2+b^2=37\cdots\cdots② \end{cases}$$

由①代入②解得 $a=6, b=-1$ 或 $a=-1, b=6$，$\therefore$ 此二人分數爲 55 分，62 分。

59、某班學生 50 人，數學競試成績的算術平均數爲 76 分，標準差爲 5 分。今將這班學生分成兩組，第一組有 40 人，平均成績爲 77 分，標準差爲 4。另一組學生有 10 人，則他們的算術平均數爲______分，標準差爲$S$，則$S^2=$______（以分數表示之）

答案：72; $\dfrac{401}{9}$

解析：設另一組學生 10 人，算術平均數 $a$ 分，標準差 $b$ 分

$\therefore 10a+40\times 77=50\times 76\Rightarrow a=72$，將分數平移 76 分，不改變標準差

$$5=\sqrt{\frac{1}{49}[(\sum_{i=1}^{40}a_i^2+\sum_{i=1}^{10}b_i^2)-\frac{1}{50}\times 0^2]}\Rightarrow \sum_{i=1}^{40}a_i^2+\sum_{i=1}^{10}b_i^2=49\times 25$$

$$4=\sqrt{\frac{1}{39}[\sum_{i=1}^{40}a_i^2-\frac{1}{40}\times 40^2]}\Rightarrow \sum_{i=1}^{40}a_i^2=39\times 16+40$$

$$\therefore \sum_{i=1}^{10}b_i^2=49\times 25-39\times 16-40=561$$

$$S=\sqrt{\frac{1}{9}\times[561-\frac{1}{10}\times(-40)^2]}=\frac{\sqrt{401}}{3}\Rightarrow S^2=\frac{401}{9}$$

60、有兩群資料$\{x_i\}, \{y_i\}$滿足 $y_i=100-2x_i, i=1,2,\ldots,n$，若$\{x_i\}$之算術平均數 $\overline{x}=36$，標準差爲 $S_x=3$，則$\{y_i\}$的算術平均數 $\overline{y}=$______，標準差 $S_y=$______。

答案：28， 6

解析：$\overline{y}=100-2\overline{x}=28$，$S_y=|-2|S_x=6$