高雄市明誠中學 高一數學複習測驗　　日期：96.03.08					
範圍	1-1 指數(2)	班級	普一　　班	姓名	
		座號			

一、選擇題 (每題 5 分)

1. $a>0$，$a\neq 1$，且 $\sqrt[3]{\sqrt{a}\sqrt{\dfrac{a}{\sqrt[3]{a^2}}}}=a^x$，則$x$之值為(A)$\dfrac{1}{6}$　(B)$\dfrac{5}{48}$　(C)$\dfrac{1}{3}$　(D)$\dfrac{1}{2}$　(E)$\dfrac{2}{9}$

【解答】(E)

【詳解】

$\sqrt{\dfrac{a}{\sqrt[3]{a^2}}}=(\dfrac{a}{a^{\frac{2}{3}}})^{\frac{1}{2}}=(a^{1-\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{6}}$ ，$a^x=(a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}\cdot(a^{\frac{1}{6}})^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{6}+\frac{1}{18}}=a^{\frac{2}{9}}$

$\because$ $a\neq 0$，1，-1　$\therefore$ $x=\dfrac{2}{9}$

2. 設某一項新試驗中，細菌數目一天後增加a倍，且已知 3 天後細菌數為 200,000 個，$4\dfrac{1}{2}$天後細菌數為 1,600,000 個，則 5 天後細菌數為
(A)2,000,000　(B)2,500,000　(C)3,200,000　(D)3,500,000　(E)3,600,000 個

【解答】(C)

【詳解】

設原有細菌數為 A ，1 天後為 $A(1+a)$

3 天後為 $A(1+a)^3=200{,}000\cdots\cdots$①，$4\dfrac{1}{2}$天後為 $A(1+a)^{\frac{9}{2}}=1{,}600{,}000\cdots\cdots$②

$\dfrac{②}{①}$ 得 $(1+a)^{\frac{3}{2}}=8$　$\Rightarrow$　$(1+a)^{\frac{1}{2}}=2$　$\therefore$　$a=3$

$\therefore$　5 天後細菌數為 $A(1+a)^5=A(1+a)^3\cdot(1+a)^2$

$=(200{,}000)(1+a)^2=(200{,}000)(1+3)^2=3{,}200{,}000$

3. 已知 $2^{0.6}=1.516$，$2^{0.03}=1.021$，則下列各數值，哪一個與 $2^{1.23}$最接近？
(A) 4.05　(B) 2.54　(C) 2.35　(D) 2.31　(E) 3.27

【解答】(C)

【詳解】

$2^{1.23}=2^{0.6+0.6+0.03}=(2^{0.6})^2\cdot(2^{0.03})=(1.516)^2\cdot(1.021)=2.298256\cdot1.021=2.346519376\doteqdot 2.35$

4. (複選)下列等式何者正確？　(A)$\sqrt{(-3)^2}=3$　(B)$(-\sqrt{3})^2=-3$　(C)$\sqrt{(-2)^3}=-\sqrt{2^3}$
(D)$\sqrt[3]{(-2)^4}=-\sqrt[3]{2^4}$　(E)$\sqrt[3]{(-2)^5}=-\sqrt[3]{2^5}$

【解答】(A)(E)

【詳解】

(A)$\sqrt{(-3)^2}=|-3|=3$　(B)$(-\sqrt{3})^2=-3$

(C)$\sqrt{(-2)^3}=\sqrt{-2^3}\neq-\sqrt{2^3}$　(D)$\sqrt[3]{(-2)^4}=\sqrt[3]{2^4}$　(E)$\sqrt[3]{(-2)^5}=-\sqrt[3]{2^5}$

5. (複選)設$a^{1.4}=2.1017\cdots\cdots$①，$a^{1.8}=2.5984\cdots\cdots$②，$a^{2.8}=4.4169\cdots\cdots$③，$a^{4.6}=11.4774\cdots\cdots$④（均取四位小數，以下四捨五入），四式中恰有一式為錯誤，下列何者正確？
(A)①②③有一個錯誤　(B)②③有一個錯誤　(C)①②均正確　(D)③④有一個錯誤

(E)②④均正確

【解答】(A)(B)(C)(D)(E)

【詳解】

$(a^{1.4})^2=(2.1017)^2=4.4171\neq a^{2.8}$ $\quad\therefore\quad$ $a^{1.4}$與$a^{2.8}$有一為錯誤

又$a^{1.8}\cdot a^{2.8}=11.4769\neq a^{4.6}$ $\quad\therefore\quad$ $a^{1.8}$、$a^{2.8}$與$a^{4.6}$有一為錯誤，由題意知，$a^{2.8}$為錯誤

二、填充題(每題 10 分)

1. $(\sqrt{\sqrt[3]{9}}\cdot\sqrt[9]{-3})^3=$＿＿＿＿＿＿＿＿。

【解答】$-3\sqrt[3]{3}$

【詳解】

$(\sqrt{\sqrt[3]{9}}\cdot\sqrt[9]{-3})^3=(9^{\frac{1}{6}}\cdot(-3)^{\frac{1}{9}})^3=3\cdot(-3)^{\frac{1}{3}}=-3\sqrt[3]{3}$

2. 解 $9^{2x^2}=9\cdot 3^{7x}$，得$x=$＿＿＿＿＿＿＿＿。

【解答】$-\frac{1}{4}$ 或 2

【詳解】

原式 $\Rightarrow\quad 3^{4x^2}=3^{7x+2}\quad\Rightarrow\quad 4x^2-7x-2=0\quad\Rightarrow\quad(4x+1)(x-2)=0\quad\Rightarrow\quad x=-\frac{1}{4}$ 或 2

3. 設 $\sqrt[x]{32}=\sqrt[y]{2^{3y-6}}$ 且 $3^{15y+3x}=81^{xy}$，則$(x，y)=$＿＿＿＿＿＿＿＿。

【解答】(5，3)

【詳解】

$$\begin{cases}\sqrt[x]{32}=\sqrt[y]{2^{3y-6}}\\ 3^{15y+3x}=81^{xy}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2^{\frac{5}{x}}=2^{3-\frac{6}{y}}\\ 3^{15y+3x}=3^{4xy}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{5}{x}=3-\frac{6}{y}\\ 15y+3x=4xy\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{5}{x}+\frac{6}{y}=3\\ \frac{15}{x}+\frac{3}{y}=4\end{cases}$$

$\therefore\quad(x，y)=(5，3)$

4. 已知 $3388^x=(33.88)^y=1000$，求$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$之值 $=$＿＿＿＿＿＿＿＿。

【解答】$\frac{2}{3}$

【詳解】

原式 $\Rightarrow\begin{cases}3388=10^{\frac{3}{x}}\ \cdots\cdots①\\ 33.88=10^{\frac{3}{y}}\ \cdots\cdots②\end{cases}$

$\frac{①}{②}\quad\Rightarrow\quad 100=10^{\frac{3}{x}-\frac{3}{y}}\quad\therefore\quad\frac{3}{x}-\frac{3}{y}=2$，即$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{2}{3}$

5. 若$x>0$，且$x+x^{-1}=7$，求$x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=$＿＿＿＿＿＿＿＿。

【解答】3

【詳解】

$x+x^{-1}=7$，$x>0$，$(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^2=x+2+x^{-1}=7+2=9\quad\therefore\quad x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=\pm 3$（$-3$ 不合）

6. 設$57^{x}=8$，$513^{y}=16$，則$\dfrac{3}{x}-\dfrac{4}{y}=$__________。

【解答】$-2\log_{2}3$

【詳解】

$57^{x}=8=2^{3} \quad\Rightarrow\quad 57=2^{\frac{3}{x}}\cdots\cdots①$，$513^{y}=16=2^{4} \quad\Rightarrow\quad 513=2^{\frac{4}{y}}\cdots\cdots②$

$\dfrac{①}{②}$ 得$2^{\frac{3}{x}-\frac{4}{y}}=\dfrac{57}{513}=\dfrac{1}{9} \quad \therefore \quad \dfrac{3}{x}-\dfrac{4}{y}=\log_{2}\dfrac{1}{9}=\log_{2}3^{-2}=-2\log_{2}3$

7. 化簡$(\dfrac{81}{16})^{-0.25}\cdot(\dfrac{8}{27})^{-\frac{2}{3}}\cdot(0.25)^{-0.5}$之值爲__________。

【解答】3

【詳解】

原式 $=(\dfrac{3}{2})^{4\times(-\frac{1}{4})}\cdot(\dfrac{2}{3})^{3\times(-\frac{2}{3})}\cdot(\dfrac{1}{2})^{2\times(-\frac{1}{2})}=(\dfrac{3}{2})^{-1}\cdot(\dfrac{2}{3})^{-2}\cdot(\dfrac{1}{2})^{-1}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{9}{4}\cdot\dfrac{2}{1}=3$

8. 方程式 $2^{x-4}=7^{x-4}$之解爲__________。

【解答】4

【詳解】

$2^{x-4}=7^{x-4} \quad\Rightarrow\quad (\dfrac{2}{7})^{x-4}=1 \quad\Rightarrow\quad x-4=0 \quad\therefore\quad x=4$

9. 方程式 $2^{x+1}-6\cdot 2^{x-1}+10\cdot 2^{x-2}=12$ 之解爲__________。

【解答】3

【詳解】

$2^{x+1}-6\cdot 2^{x-1}+10\cdot 2^{x-2}=12 \quad\Rightarrow\quad 2\cdot 2^{x}-6\cdot 2^{x}\cdot 2^{-1}+10\cdot 2^{x}\cdot 2^{-2}=12$

$\Rightarrow\quad (2-\dfrac{6}{2}+\dfrac{10}{4})\cdot 2^{x}=12 \quad\Rightarrow\quad \dfrac{3}{2}\cdot 2^{x}=12 \quad\Rightarrow\quad 2^{x}=8 \quad\Rightarrow\quad x=3$

10.方程式$x^{x+4}=x^{8}$的解爲__________。

【解答】$x=0$ 或 $x=1$ 或 $x=4$

【詳解】

$x^{x+4}=x^{8}$

① $x=1$ 時，合，

② $x=-1$ 時，不合，

③ $x=0$ 時，合

④ $x\neq 0$，1，-1 時，$x+4=8 \quad\therefore\quad x=4$

11.設$a^{2x}=\sqrt{2}+1$，則$\dfrac{a^{3x}-a^{-3x}}{a^{x}-a^{-x}}$之値爲__________。

【解答】$2\sqrt{2}+1$

【詳解】

$\dfrac{a^{3x}-a^{-3x}}{a^{x}-a^{-x}}=\dfrac{(a^{x}-a^{-x})(a^{2x}+a^{x}\cdot a^{-x}+a^{-2x})}{a^{x}-a^{-x}}=a^{2x}+a^{-2x}+1$

$=\sqrt{2}+1+\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}+1=\sqrt{2}+1+\sqrt{2}-1+1=2\sqrt{2}+1$

12.設$9^{x+1}-3^{x+4}+1=0$的二實根爲α，β，則$\alpha+\beta=$__________。

【解答】-2

【詳解】

設 $t=3^x$，則 $9t^2-81t+1=0$ 之二根爲 3^{α}，3^{β}，二根積 $3^{\alpha}\cdot 3^{\beta}=\dfrac{1}{9}$，即 $3^{\alpha+\beta}=3^{-2}$

$\therefore\quad \alpha+\beta=-2$

13.設 $x>0$，則 $\left(x^{\frac{1}{a-b}}\right)^{\frac{a}{a-c}}\cdot\left(x^{\frac{1}{b-c}}\right)^{\frac{b}{b-a}}\cdot\left(x^{\frac{1}{c-a}}\right)^{\frac{c}{c-b}}=$__________。

【解答】1

【詳解】

原式 $=x^{\frac{a}{(a-b)(a-c)}+\frac{b}{(b-c)(b-a)}+\frac{c}{(c-a)(c-b)}}=x^{-\frac{a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}}=x^0=1$

14.若 $a\in R$ 且 x 的方程式 $2^{2x}+2a\cdot 2^x+3-2a=0$ 有相異兩實根，則 a 的範圍爲__________。

【解答】$a<-3$

【詳解】

令 $t=2^x$，則方程式化爲 $t^2+2at+(3-2a)=0$

$\because\quad x$ 有兩相異實根 $\Rightarrow\quad t$ 有兩相異正根

$$\therefore\ \begin{cases} D=4a^2-4(3-2a)>0 \quad\Rightarrow\quad (a+3)(a-1)>0 \quad\Rightarrow\quad a>1 \text{ 或 } a<-3 \\ \text{兩根和 } =-2a>0 \quad\Rightarrow\quad a<0 \\ \text{兩根積 } =3-2a>0 \quad\Rightarrow\quad a<\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

$\Rightarrow\quad a<-3$

15.若 $2^{0.6}=1.516$，$2^{0.03}=1.021$，則 $2^{1.54}$ 之近似值爲__________（至小數點後第二位）。

$[(1.516)^2=2.298256$，$(1.516)^3=3.484156$，$(1.021)^2=1.042441$，$(1.021)^3=1.0643322]$

【解答】2.91

【詳解】

$2^{1.54}=\dfrac{2\times 2^{0.6}}{(2^{0.03})^2}=\dfrac{2\times 1.516}{(1.021)^2}=\dfrac{3.032}{1.042441}=2.90855=2.91$

16.解 $2(4^x+4^{-x})-9(2^x+2^{-x})+14=0$，得 $x=$__________。

【解答】$x=0$，± 1

【詳解】

$t=2^x+2^{-x}\geq 2\quad\therefore\quad t^2=4^x+2+4^{-x}\quad\Rightarrow\quad 4^x+4^{-x}=t^2-2$

$\therefore\quad 2(t^2-2)-9t+14=0\quad\Rightarrow\quad 2t^2-9t+10=0\quad\Rightarrow\quad (2t-5)(t-2)=0\quad\Rightarrow\quad t=\dfrac{5}{2}$ 或 2

① $t=\dfrac{5}{2}$ 時，$2^x+2^{-x}=\dfrac{5}{2}\quad\Rightarrow\quad x=\pm 1$，

② $t=2$ 時，$2^x+2^{-x}=2\quad\Rightarrow\quad x=0$，故得 $x=0$，± 1