高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：96.07.24					
範圍	3-5 複數極式 D	班級	普一 班	姓名	
		座號			

一、填充題(每題 10 分)

1. 設 $z = \sin 40° + i\cos 40°$，則 $|z| =$ ＿＿＿＿＿＿＿＿，$\text{Arg}(z) =$＿＿＿＿＿＿＿＿。

【解答】1；50°

【詳解】

$z = \sin 40° + i\cos 40° = \sin(90° - 50°) + i\cos(90° - 50°) = \cos 50° + i\sin 50°$

$|z| = \sqrt{\cos^2 50° + \sin^2 50°} = 1$，$\text{Arg}(z) = 50°$

2. 設 $z = \dfrac{\sqrt{3} - i}{1 + \sqrt{3}i}$，則(1) z之極式為＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。 (2) $z^{100} =$ ＿＿＿＿＿＿＿＿。

【解答】(1) $\cos\dfrac{3\pi}{2} + i\sin\dfrac{3\pi}{2}$ (2) 1

【詳解】

(1) $z = \dfrac{\sqrt{3} - i}{1 + \sqrt{3}i} = \dfrac{2(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i)}{2(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)} = \dfrac{2(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6})}{2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})} = \cos\dfrac{3\pi}{2} + i\sin\dfrac{3\pi}{2}$

(2) $z^{100} = (\cos\dfrac{3\pi}{2} + i\sin\dfrac{3\pi}{2})^{100} = \cos(150\pi) + i\sin(150\pi) = 1$

3. 設 $z \in C$，且 $|z| = 2|z - 1|$，$\text{Arg}(\dfrac{z-1}{z}) = \dfrac{\pi}{3}$，則 $z =$ ＿＿＿＿＿＿＿＿。

【解答】$1 + \dfrac{\sqrt{3}i}{3}$

【詳解】

$\because$ $|z| = 2|z - 1|$ $\Rightarrow$ $|\dfrac{z-1}{z}| = \dfrac{1}{2}$，而 $\text{Arg}(\dfrac{z-1}{z}) = \dfrac{\pi}{3}$

$\therefore$ $\dfrac{z-1}{z} = \dfrac{1}{2}(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}) = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{4}$ $\Rightarrow$ $4z - 4 = (1 + \sqrt{3}\,i)z$

$\Rightarrow$ $z(3 - \sqrt{3}\,i) = 4$ $\Rightarrow$ $z = \dfrac{4}{3 - \sqrt{3}i} = \dfrac{4(3+\sqrt{3}i)}{9+3} = 1 + \dfrac{\sqrt{3}i}{3}$

4. 以 $2x - \sqrt{3} + i$ 除 $x^{60} - 1$ 之餘式為＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

【解答】0

【詳解】

令 $2x - \sqrt{3} + i = 0 \Rightarrow x = \dfrac{\sqrt{3} - i}{2}$

所求餘式 $R = (\dfrac{\sqrt{3} - i}{2})^{60} - 1 = (\cos\dfrac{\pi}{6} - i\sin\dfrac{\pi}{6})^{60} - 1 = \cos 10\pi - i\sin 10\pi - 1 = 0$

5. $(1 + \cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3})^6 =$ ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

【解答】-27

【詳解】

$(1+\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})^6=(2\cos^2\frac{\pi}{6}+2i\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6})^6$

$=(2\cos\frac{\pi}{6})^6(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})^6=(\sqrt{3})^6(\cos\pi+i\sin\pi)=-27$

6. 化簡$(1+\cos20°+i\sin20°)^{987}=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，$r>0$，$0°\le\theta<360°$，則$\theta=$ ＿＿＿＿＿＿ 。

【解答】150°

【詳解】

$1+\cos20°+i\sin20°=1+\cos2(10°)+i\sin2(10°)=2\cos^2 10°+i(2\sin10°\cos10°)$

$=2\cos10°(\cos10°+i\sin10°)$

$(1+\cos20°+i\sin20°)^{987}=[2\cos10°(\cos10°+i\sin10°)]^{987}=(2\cos10°)^{987}(\cos9870°+$
$i\sin9870°)$

$=(2\cos10°)^{987}(\cos150°+i\sin150°)=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，$r>0$，$0°\le\theta<360°$ $\therefore$ $\theta=150°$

7. 複數$z=2\sqrt{3}+2i$的極式爲＿＿＿＿＿＿＿＿＿，點z的極坐標爲＿＿＿＿＿＿ 。

【解答】$4(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$；$[4，\frac{\pi}{6}]$

【詳解】

$z=2\sqrt{3}+2i$，$|z|=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+2^2}=4$

$\therefore$ $z=4(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i)=4(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$，此爲 z 的極式，極坐標爲$[4，\frac{\pi}{6}]$

8. 設$\frac{(\cos137°+i\sin763°)(\cos369°+i\sin171°)}{\cos(-26°)-i\sin334°}=$ ＿＿＿＿＿＿ 。

【解答】$\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

【詳解】

原式$=\frac{(\cos137°+i\sin(720°+43°))(\cos(360°+9°)+i\sin(180°-9°))}{\cos26°-i\sin(360°-26°)}$

$=\frac{(\cos137°+i\sin43°)(\cos9°+i\sin9°)}{\cos26°+i\sin26°}$

$=\frac{(\cos137°+i\sin137°)(\cos9°+i\sin9°)}{\cos26°+i\sin26°}$

$=\cos(137°+9°-26°)+i\sin(137°+9°-26°)=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

9. 設$f(x)=x^{100}+x^{50}+1$，則$f(-\frac{1+i}{\sqrt{2}})=$ ＿＿＿＿＿＿ 。

【解答】i

【詳解】

設$z=\frac{-(1+i)}{\sqrt{2}}=-(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$

$f(-\frac{1+i}{2})=f(z)=z^{100}+z^{50}+1=(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})^{100}+(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})^{50}+1$

$=(\cos25\pi+i\sin25\pi)+(\cos\frac{25\pi}{2}+i\sin\frac{25\pi}{2})+1=(\cos\pi+i\sin\pi)+(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})+1$

$=-1+0+0+i+1=i$

10.正方形 $ABCD$，其中 $A(0,0)$, $B(6,4)$，則 C 坐標＿＿＿＿＿＿＿；D 坐標＿＿＿＿＿＿＿

【解答】$C(2,10), D(-4,6)$ ；或 $C(10,-2), D(4,-6)$

【詳解】

(1)設 $C((6+4i)\cdot\sqrt{2}\,(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})=(6+4i)\cdot\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i)=2+10i\Rightarrow C(2,10)$

設 $D((6+2i)\cdot(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})=(6+4i)\cdot(0+i)=-4+6i\Rightarrow D(-4,6)$

(2)設 $C((6+4i)\cdot\sqrt{2}\,(\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4}))=(6+4i)\cdot\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i)=10-2i\Rightarrow C(10,-2)$

設 $D((6+2i)\cdot(\cos(-\frac{\pi}{2})+i\sin(-\frac{\pi}{2}))=(6+4i)\cdot(0-i)=4-6i\Rightarrow D(4,-6)$