高雄市明誠中學 高一數學平時測驗					日期：96.08.02.
範圍	3-5 複數極式 C	班級	普一　　班	姓名	
		座號			

一、填充題(每題 10 分)

1. 設 $z \in C$，且 $|z| = |z-1|$，$\text{Arg}(\frac{z-1}{z}) = \frac{\pi}{3}$，則 $z =$ __________。

【解答】$\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$

【詳解】

$\because$ $|z| = 2|z-1|$ $\Rightarrow$ $|\frac{z-1}{z}| = 1$，而 $\text{Arg}(\frac{z-1}{z}) = \frac{\pi}{3}$

$\therefore$ $\frac{z-1}{z} = (\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ $\Rightarrow$ $2z - 2 = (1+\sqrt{3}\,i)z$

$\Rightarrow$ $z(1-\sqrt{3}\,i) = 2$ $\Rightarrow$ $z = \frac{2}{1-\sqrt{3}i} = \frac{2(1+\sqrt{3}i)}{1+3} = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$

2. 以 $2x - \sqrt{3} + i$ 除 $x^{30} - 1$ 之餘式為________________。

【解答】-2

【詳解】令 $2x - \sqrt{3} + i = 0 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}-i}{2}$

所求餘式 $R = (\frac{\sqrt{3}-i}{2})^{30} - 1 = (\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6})^{30} - 1 = \cos 5\pi - i\sin 5\pi - 1 = -2$

3. 化簡 $(1 + \cos 20° + i\sin 20°)^{201} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$，$r > 0$，$0° \le \theta < 360°$，則 $\theta =$ __________。

【解答】$210°$

【詳解】

$1 + \cos 20° + i\sin 20° = 1 + \cos 2(10°) + i\sin 2(10°) = 2\cos^2 10° + i(2\sin 10°\cos 10°)$

$= 2\cos 10°(\cos 10° + i\sin 10°)$

$(1 + \cos 20° + i\sin 20°)^{201}$

$= [2\cos 10°(\cos 10° + i\sin 10°)]^{201} = (2\cos 10°)^{201}(\cos 2010° + i\sin 2010°)$

$= (2\cos 10°)^{201}(\cos 210° + i\sin 210°)$ (因為 $2010° = 360° \times 5 + 210°$)

$= r(\cos\theta + i\sin\theta)$，$r > 0$，$0° \le \theta < 360°$ $\therefore$ $\theta = 210°$

4. 設 $\frac{(\cos 137° + i\sin 763°)(\cos 369° + i\sin 171°)}{\cos(-26°) - i\sin 334°} =$ __________。

【解答】$\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

【詳解】

原式 $= \frac{[\cos(180°-43°) + i\sin(720°+43°)](\cos(360°+9°) + i\sin(180°-9°))}{\cos 26° - i\sin(360°-26°)}$

$= \frac{(-\cos 43° + i\sin 43°)(\cos 9° + i\sin 9°)}{\cos 26° + i\sin 26°} = \frac{(\cos 137° + i\sin 137°)(\cos 9° + i\sin 9°)}{\cos 26° + i\sin 26°}$

$= \cos(137° + 9° - 26°) + i\sin(137° + 9° - 26°) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

5.已知$z+\frac{1}{z}=\sqrt{3}$，求$z=$____________。

【解答】$\frac{\sqrt{3}\pm i}{2}$

【詳解】原式 $\Rightarrow$ $z^2-\sqrt{3}z+1=0$ $\Rightarrow$ $z=\frac{\sqrt{3}\pm i}{2}$ (公式解)

6.設$z+\frac{1}{z}=\sqrt{3}$，則$z^{2001}+\frac{1}{z^{2001}}$之值爲____________。

【解答】0

【詳解】

由$z+\frac{1}{z}=\sqrt{3}$ $\Rightarrow$ $z^2-\sqrt{3}z+1=0$ $\Rightarrow$ $z=\frac{\sqrt{3}\pm i}{2}=\cos\frac{\pi}{6}\pm i\sin\frac{\pi}{6}$

(1)令$z=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$

則$z^{2001}+\frac{1}{z^{2001}}=(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})^{2001}+(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})^{-2001}=2\cos\frac{2001\pi}{6}=2\cos\frac{\pi}{2}=0$

(2)同理，當$z=\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}$時，$z^{2001}+\frac{1}{z^{2001}}$也爲 0，故所求$z^{2001}+\frac{1}{z^{2001}}=0$

7.設$z=\cos72°+i\sin72°$，則$z^{75}+z^{76}+z^{77}+\cdots+z^{365}$之值爲____________。

【解答】1

【詳解】

$z=\cos72°+i\sin72° \Rightarrow z^5=\cos360°+i\sin360°=1$，

原式 $=\frac{z^{75}(1-z^{291})}{1-z}$ $(\because 291=365-75+1)=1$

8.設$\omega=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$，試求

(1) $(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^3)(1-\omega^4)$=______________。

(2) $(2+\omega)(2+\omega^2)(2+\omega^3)(2+\omega^4)$=______________。

【解答】5；11

【詳解】

$\omega=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$ 爲$x^5=1$的一虛根 $\Rightarrow$ $x^5=1$的五個根爲 1，ω，ω^2，ω^3，ω^4

$\therefore$ $x^5-1=(x-1)(x-\omega)(x-\omega^2)(x-\omega^3)(x-\omega^4)$

又$x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$

$\Rightarrow$ $x^4+x^3+x^2+x+1=(x-\omega)(x-\omega^2)(x-\omega^3)(x-\omega^4)$

(1)令$x=1$得$(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^3)(1-\omega^4)=1^4+1^3+1^2+1+1$

故$(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^3)(1-\omega^4)=5$

(2)令$x=-2$得$(-2-\omega)(-2-\omega^2)(-2-\omega^3)(-2-\omega^4)=(-2)^4+(-2)^3+(-2)^2+(-2)+1$

$\therefore$ $(-1)^4(2+\omega)(2+\omega^2)(2+\omega^3)(2+\omega^4)=11$，故$(2+\omega)(2+\omega^2)(2+\omega^3)(2+\omega^4)=11$

9.方程式$x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0$的五個複數根可表爲$x_k=$________________________；

又以此五個根爲頂點在複數平面上所成五邊形區域的面積爲______________。

【解答】$x_k=\cos\frac{k\pi}{3}+i\sin\frac{k\pi}{3}$，$k=1$，2，3，4，5；$\frac{5\sqrt{3}}{4}$

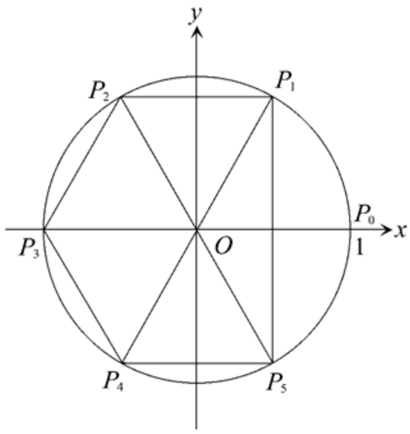
【詳解】

$(x-1)(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)=x^6-1$ ，$x^6-1=0$

$\Rightarrow x^6=1=\cos 0+i\sin 0$ 的根爲$x_k=\cos\dfrac{2k\pi}{6}+i\sin\dfrac{2k\pi}{6}$ ，$k=0$，1，2，3，4，5，

其中$x_0=\cos 0+i\sin 0=1$，故$x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0$ 的五個根爲

$x_k=\cos\dfrac{2k\pi}{6}+i\sin\dfrac{2k\pi}{6}$ ，$k=1$，2，3，4，5



設x_k在複數平面上的對應點爲P_k，則五個點P_1，P_2，P_3，P_4，P_5爲頂點的五邊形如圖：

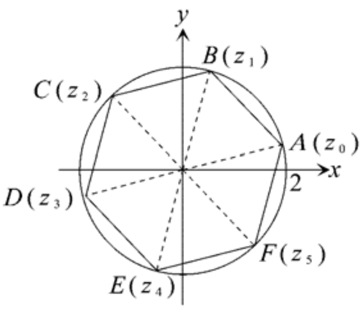
$\angle P_1OP_2=\angle P_2OP_3=\angle P_3OP_4=\angle P_4OP_5=\dfrac{\pi}{3}$，$\angle P_1OP_5=\dfrac{2\pi}{3}$

$\therefore$ 五邊形的面積爲 $4\triangle P_1OP_2+\triangle P_1OP_5$

$=4\times\dfrac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\sin\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\sin\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{5}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{5\sqrt{3}}{4}$

10.$x^6=-32+32\sqrt{3}i$ 有 6 個根，此六個根在複數平面上對應的六個點所圍成的六邊形，其面積爲____________。

【解答】$6\sqrt{3}$



【詳解】$-32+32\sqrt{3}i=64(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i)=64(\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3})$

由$x^6=-32+32\sqrt{3}i$ ，

$z_k=2(\cos\dfrac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{6}+i\sin\dfrac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{6})$，$k=0$，1，2，3，4，5

將六個根圖示在高斯平面上，圖形爲一正六邊形，頂點在以原點爲圓心，半徑爲 2 的圓形上則正六邊形$ABCDEF$的面積爲 $6\cdot\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\sin 60°=6\sqrt{3}$

11.(1)試求 $3+4i$的兩個平方根______________。

(2)利用(1)的結果求二次方程式$x^2+(4-3i)x+(1-7i)=0$ 的解____________。

【解答】(1)$\pm(2+i)$　(2)$-1+2i$ 或 $-3+i$

【詳解】(1)設$a+bi$（a，$b\in R$）爲 $3+4i$的平方根，則

$(a+bi)^2=3+4i$ $\Rightarrow$ $(a^2-b^2)+2abi=3+4i$ $\Rightarrow$ $\begin{cases}a^2-b^2=3\cdots\cdots①\\2ab=4\cdots\cdots②\end{cases}$

又 $a^2+b^2=5\cdots\cdots③$

由①，③得$a^2=4$，$b^2=1$，由②$ab=2$ 知a與b同號$\Rightarrow\begin{cases}a=\pm 2\\b=\pm 1\end{cases}$

$\therefore$ $(a，b)=(2，1)$或$(-2，-1)$，故 $3+4i$的兩個平方根爲$\pm(2+i)$

(2) $x^2+(4-3i)x+(1-7i)=0$，$D=(4-3i)^2-4(1-7i)=16-24i-9-4+28i=3+4i$

由(1)知，$D=3+4i$的兩個平方根爲$\pm(2+i)$

由公式得方程式的兩個根爲$x=\dfrac{-(4-3i)\pm(2+i)}{2}=-1+2i$或 $-3+i$