高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：96.07.19					
範圍	3-5 複數極式 B	班級	普一 班	姓名	
		座號			

一、填充題(每題 10 分)

1. $\dfrac{(\sin 78°+i\cos 78°)^6(\sin 87°-i\cos 87°)^4}{(\sin 50°+i\sin 40°)^3}=$ ＿＿＿＿＿＿ 。

【解答】$\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

【詳解】

原式 $=\dfrac{(\cos 12°+i\sin 12°)^6(\cos 3°-i\sin 3°)^4}{(\cos 40°+i\sin 40°)^3}=\dfrac{(\cos 72°+i\sin 72°)[\cos(-12°)+i\sin(-12°)]}{\cos 120°+i\sin 120°}$

$=\cos(72°-12°-120°)+i\sin(72°-12°-120°)=\cos(-60°)+i\sin(-60°)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

2. $\sin 111°+i\sin 201°$化為極式為＿＿＿＿＿＿ 。

【解答】$\cos 339°+i\sin 339°$

【詳解】

$\sin 111°+i\sin 201°=\sin(90°+21°)+i\sin(180°+21°)=\cos 21°-i\sin 21°$

$=\cos(360°-21°)+i\sin(360°-21°)=\cos 339°+i\sin 339°$

3. 設$z=-3i$，則：(1)化為極式$z=$ ＿＿＿＿＿＿ 。 (2) z的主輻角為＿＿＿＿＿＿ 。

【解答】(1) $3(\cos\dfrac{3\pi}{2}+i\sin\dfrac{3\pi}{2})$ (2) $\dfrac{3\pi}{2}$

【詳解】

(1) $z=-3i=3[0+(-i)]=3(\cos\dfrac{3\pi}{2}+i\sin\dfrac{3\pi}{2})$ (2) $\operatorname{Arg} z=\dfrac{3\pi}{2}$

4. 求$(\dfrac{-\sqrt{3}+i}{1-i})^{12}=$ ＿＿＿＿＿＿ 。

【解答】-64

【詳解】

$\dfrac{-\sqrt{3}+i}{1-i}=\dfrac{(-\sqrt{3}+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{(-\sqrt{3}+i)(1+i)}{2}$

$=\sqrt{2}(\dfrac{-\sqrt{3}}{2}+\dfrac{i}{2})(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{i}{\sqrt{2}})=\sqrt{2}(\cos\dfrac{5\pi}{6}+i\sin\dfrac{5\pi}{6})(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4})$

$\therefore$ 原式 $=[\sqrt{2}(\cos\dfrac{5}{6}\pi+i\sin\dfrac{5}{6}\pi)(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4})]^{12}$

$=(\sqrt{2})^{12}(\cos 10\pi+i\sin 10\pi)(\cos 3\pi+i\sin 3\pi)=64\cdot 1\cdot(-1)=-64$

5. 設$z=\dfrac{\sqrt{3}-i}{1+\sqrt{3}i}$，則(1) z之極式為＿＿＿＿＿＿ 。 (2) $z^{100}=$ ＿＿＿＿＿＿ 。

【解答】(1) $\cos\dfrac{3\pi}{2}+i\sin\dfrac{3\pi}{2}$ (2) 1

【詳解】

(1) $z=\dfrac{\sqrt{3}-i}{1+\sqrt{3}i}=\dfrac{2(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i)}{2(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)}=\dfrac{2(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6})}{2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})}=\cos\dfrac{3\pi}{2}+i\sin\dfrac{3\pi}{2}$

(2) $z^{100}=(\cos\dfrac{3\pi}{2}+i\sin\dfrac{3\pi}{2})^{100}=\cos(150\pi)+i\sin(150\pi)=1$

6. 設$|z+1|=\sqrt{3}\,|z-1|$，且 $\mathrm{Arg}(\dfrac{z-1}{z+1})=\dfrac{\pi}{3}$ ，試求複數 z 的值。

【解答】 $\dfrac{2+3i}{4-\sqrt{3}}$

【詳解】

$|z+1|=\sqrt{3}\,|z-1| \quad\Rightarrow\quad \dfrac{|z-1|}{|z+1|}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ，又 $\mathrm{Arg}(\dfrac{z-1}{z+1})=\dfrac{\pi}{3}$

由複數極式的定義知$\dfrac{z-1}{z+1}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3})=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i)=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2\sqrt{3}}$

$2\sqrt{3}(z-1)=(1+\sqrt{3}i)(z+1)\Rightarrow(2\sqrt{3}-1-\sqrt{3}i)z=2\sqrt{3}+1+\sqrt{3}i$ ，得 $z=\dfrac{(2\sqrt{3}+1)+\sqrt{3}i}{(2\sqrt{3}-1)-\sqrt{3}i}$

$\Rightarrow \quad z=\dfrac{[(2\sqrt{3}+1)+\sqrt{3}i][(2\sqrt{3}-1)+\sqrt{3}i]}{(2\sqrt{3}-1)^2+3}=\dfrac{8+12i}{16-4\sqrt{3}}=\dfrac{2+3i}{4-\sqrt{3}}$

7. $(1+\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3})^3=$ ＿＿＿＿＿＿ 。

【解答】$3\sqrt{3}i$

【詳解】

$(1+\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3})^3=(2\cos^2\dfrac{\pi}{6}+2i\sin\dfrac{\pi}{6}\cos\dfrac{\pi}{6})^3$

$=(2\cos\dfrac{\pi}{6})^3(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6})^3=(\sqrt{3})^3(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2})=3\sqrt{3}i$

8. 設$\dfrac{(\cos137^\circ+i\sin763^\circ)(\cos369^\circ+i\sin171^\circ)}{\cos(-26^\circ)-i\sin334^\circ}=$ ＿＿＿＿＿＿ 。

【解答】 $\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

【詳解】

原式

$=\dfrac{(\cos137^\circ+i\sin(720^\circ+43^\circ))(\cos(360^\circ+9^\circ)+i\sin(180^\circ-9^\circ))}{\cos26^\circ-i\sin(360^\circ-26^\circ)}=$

$\dfrac{(\cos137^\circ+i\sin43^\circ)(\cos9^\circ+i\sin9^\circ)}{\cos26^\circ+i\sin26^\circ}$

$=\dfrac{(\cos137^\circ+i\sin137^\circ)(\cos9^\circ+i\sin9^\circ)}{\cos26^\circ+i\sin26^\circ}$

$=\cos(137^\circ+9^\circ-26^\circ)+i\sin(137^\circ+9^\circ-26^\circ)=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

9. 複數$z=2\sqrt{3}+2i$的極式爲＿＿＿＿＿＿，其所代表點的極坐標爲＿＿＿＿＿＿。

【解答】$4(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6})$；$[4，\dfrac{\pi}{6}]$

【詳解】

$z = 2\sqrt{3} + 2i$，$|z| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = 4$

$\therefore\quad z = 4(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i) = 4(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$，此爲 z 的極式，z 的極坐標爲$[4，\frac{\pi}{6}]$

10.求$\mathrm{Arg}(\frac{1}{1-i}) =$ ＿＿＿＿＿＿＿。

【解答】$\frac{\pi}{4}$

【詳解】

$\frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+i}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$，　$\mathrm{Arg}(\frac{1}{1-i}) = \frac{\pi}{4}$