高雄市明誠中學 高一數學平時測驗　　日期：96.06.15					
範圍	3-4 正餘弦的疊合	班級	普一　　班	姓名	
		座號			

一、複選題(每題 10 分)

1. 有關 $y=f(x)=4\sin2x-3\cos2x+5$ 之圖形，下列敘述何者正確？
(A)週期$=\pi$　(B) $-5\le f(x)\le 5$　(C)與 y 軸之交點為(0，2)　(D)與 x 軸之交點有無限多個
(E)其圖形對稱於 x 軸

【解答】(A)(C)(D)

【詳解】

$y=f(x)=4\sin2x-3\cos2x+5\cdots\cdots$①

$=5(\frac{4}{5}\sin2x-\frac{3}{5}\cos2x)+5=5\sin(2x-\alpha)+5$，其中 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$，$\cos\alpha=\frac{4}{5}$

(A)週期$=\frac{2\pi}{2}=\pi$　(B) $-5+5\le f(x)\le 5+5\Rightarrow\ 0\le f(x)\le 10$

(C)令 $x=0$ 代入①　$\Rightarrow$　$y=-3+5=2$，故與 y 軸交於(0，2)

(D)週期函數與 x 軸有無限多個交點

(E)若以$-y$ 代替 y，原式不變，則圖形對稱 x 軸　$\therefore$　此圖形並非對稱 x 軸

2. 設 $f(x)=\sin2x+\sin(\frac{\pi}{3}-2x)$，下列何者正確？
(A) $f(x)$之週期為 π　(B) $f(x)$之最大值與最小值之差為 2　(C) $f(x)$之振幅為 2
(D) $y=f(x)$之圖形可由 $y=\cos2x$ 之圖形右移$\frac{\pi}{6}$而得
(E) $y=f(x)$之圖形可由 $y=\sin2x$ 之圖形左移$\frac{\pi}{6}$而得

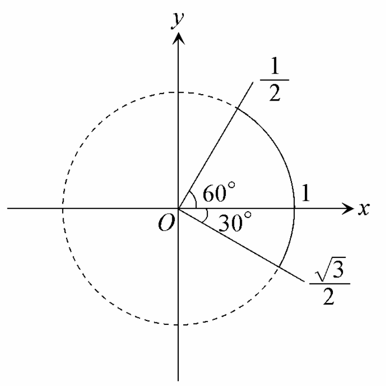
【解答】(A)(B)(E)

【詳解】

$f(x)=\sin2x+\sin(\frac{\pi}{3}-2x)=\sin2x+\sin\frac{\pi}{3}\cos2x-\cos\frac{\pi}{3}\sin2x=\sin2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos2x-\frac{1}{2}\sin2x$

$=\frac{1}{2}\sin2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos2x=\sin2x\cos\frac{\pi}{3}+\cos2x\sin\frac{\pi}{3}=\sin(2x+\frac{\pi}{3})=\sin2(x+\frac{\pi}{6})$

3. $y=f(x)=\sqrt{3}\cos x-\sin x+2=A\cos(x+\theta)+2$，$A>0$，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$。
若 $x\in R$，y 有最小值β；當 $-\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{\pi}{6}$時，$y$ 有最大值 M，最小值 m，則(A) $A=2$(B) $\theta=30°$(C) $\beta=0$　(D) $M=5$　(E) $m=3$



【解答】(A)(B)(C)(E)

【詳解】

(1) $y=f(x)=\sqrt{3}\cos x-\sin x+2=2(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x)+2$

$=2(\cos x\cos\frac{\pi}{6}-\sin x\sin\frac{\pi}{6})+2$

$=2\cos(x+\frac{\pi}{6})+2=A\cos(x+\theta)+2$，$A>0$，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$，　即 $A=2$，$\theta=\frac{\pi}{6}$

(2)若 $x\in R$，y 有最小值 0 （此時 $\cos(x+\frac{\pi}{6})=-1$） $\Rightarrow$ $\beta=0$

(3)當 $-\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{\pi}{6}$ 時，$-\frac{\pi}{6}\le x+\frac{\pi}{6}\le\frac{\pi}{3}\Rightarrow$ $\frac{1}{2}\le\cos(x+\frac{\pi}{6})\le 1$ $\Rightarrow$ $1\le 2\cos(x+\frac{\pi}{6})\le 2$

$\Rightarrow$ $3\le y\le 4$； 即 $M=4$，$m=3$

4. $\frac{\pi}{12}\le\theta\le\frac{3\pi}{4}$，若 $f(\theta)=3\sin^2\theta+4\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta-\cos^2\theta$ 可化成 $a\sin(2\theta-b)+c$，$0<b<\frac{\pi}{2}$，且當 $\theta=\alpha$ 時，$f(\theta)$有最大值β，則(A) $a=4$ (B) $b=\frac{\pi}{6}$ (C) $c=1$ (D) $\alpha=\frac{\pi}{3}$ (E) $\beta=5$

【解答】(A)(B)(C)(D)(E)

【詳解】

$f(\theta)=3\sin^2\theta+4\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta-\cos^2\theta=3(\frac{1-\cos 2\theta}{2})+2\sqrt{3}\sin 2\theta-\frac{1+\cos 2\theta}{2}$

$=2\sqrt{3}\sin 2\theta-2\cos 2\theta+1=4(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\theta-\frac{1}{2}\cos 2\theta)+1$

$=4\sin(2\theta-\frac{\pi}{6})+1=a\sin(2\theta-b)+c$

(1)$\therefore$ $a=4$，$b=\frac{\pi}{6}$，$c=1$

(2)但 $\frac{\pi}{12}\le\theta\le\frac{3\pi}{4}$ $\Rightarrow$ $\frac{\pi}{6}\le 2\theta\le\frac{3\pi}{2}$ $\Rightarrow$ $0\le 2\theta-\frac{\pi}{6}\le\frac{4\pi}{3}$

當 $2\theta-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ 即 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 時，$f(\theta)=5$ 爲最大值 $\Rightarrow$ $\alpha=\frac{\pi}{3}$，$\beta=5$

二、填充題(每題 10 分)

1. 設 $-2\pi\le x\le 2\pi$，求

(1)$\sin(x+\frac{\pi}{6})+\cos x$ 在 $x=$ ＿＿＿＿＿時，有最大值=＿＿＿＿＿＿。。

(2)$\sin(x+\frac{\pi}{6})\cos x$ 的最小值爲＿＿＿＿＿。

【解答】(1) $\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{-11\pi}{6}$；$\sqrt{3}$ (2) $-\frac{1}{4}$

【詳解】

(1) $\sin(x+\frac{\pi}{6})+\cos x=\sin x\cos\frac{\pi}{6}+\cos x\sin\frac{\pi}{6}+\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{3}{2}\cos x$

$=\sqrt{3}(\sin x\cos\frac{\pi}{3}+\cos x\sin\frac{\pi}{3})=\sqrt{3}\sin(x+\frac{\pi}{3})$

$-2\pi\le x\le 2\pi\Rightarrow -2\pi+\frac{\pi}{3}\le x+\frac{\pi}{3}\le 2\pi+\frac{\pi}{3}\Rightarrow -\frac{5\pi}{3}\le x+\frac{\pi}{3}\le\frac{7\pi}{3}$

當 $\sin(x+\frac{\pi}{3})=1$ 即 $x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2},-\frac{3\pi}{2}$ $\Rightarrow$ 即 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{-11\pi}{6}$ 時，$f(\theta)=\sqrt{3}$ 爲最大值

(2) $\sin(x+\frac{\pi}{6})\cos x=\frac{1}{2}[\sin(2x+\frac{\pi}{6})+\sin\frac{\pi}{6}]=\frac{1}{2}\sin(2x+\frac{\pi}{6})+\frac{1}{4}$

$\therefore$ 最小值 $=-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}$

2. 求下列各式之最大值或最小值：

(1) $\theta\in R$，$f(\theta)=2\cos\theta-3\sin\theta$ 的最小值 =__________。

(2) $-\dfrac{\pi}{2}\le\theta\le 0$，$f(\theta)=2\cos^2\theta-3\sin\theta$ 的最大值 =__________。

【解答】(1) $-\sqrt{13}$　(2) $\dfrac{25}{8}$

【詳解】

(1) $f(\theta)=2\cos\theta-3\sin\theta$，$\theta\in R$

$\Rightarrow\ -\sqrt{2^2+(-3)^2}\le f(\theta)\le\sqrt{2^2+(-3)^2}\ \Rightarrow\ -\sqrt{13}\le f(\theta)\le\sqrt{13}$；　最小值為 $-\sqrt{13}$

(2) $f(\theta)=2\cos^2\theta-3\sin\theta=2(1-\sin^2\theta)-3\sin\theta=-2\sin^2\theta-3\sin\theta+2$

$=-2(\sin\theta+\dfrac{3}{4})^2+\dfrac{25}{8}$

$-\dfrac{\pi}{2}\le\theta\le 0\ \Rightarrow\ -1\le\sin\theta\le 0$，當 $\sin\theta=-\dfrac{3}{4}$ 時，$f(\theta)$ 有最大值為 $\dfrac{25}{8}$

3. 設 $0\le x\le\pi$，$f(x)=3+\cos x-\cos(\dfrac{\pi}{3}-x)$，當 $x=\alpha$ 時有最大值 M，當 $x=\beta$ 時有最小值 m，則 $\alpha+\beta=$__________。　$M+m=$__________。

【解答】(1) $\dfrac{2\pi}{3}$　(2) $\dfrac{11}{2}$

【詳解】

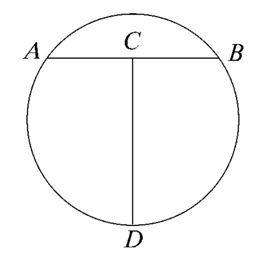
(1) $f(x)=3+\cos x-\cos(\dfrac{\pi}{3}-x)=3+\cos x-[\cos\dfrac{\pi}{3}\cos x+\sin\dfrac{\pi}{3}\sin x]$

$=3+(\dfrac{1}{2}\cos x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x)=3+\cos(x+\dfrac{\pi}{3})$

$0\le x\le\pi$，$\dfrac{\pi}{3}\le x+\dfrac{\pi}{3}\le\dfrac{4\pi}{3}\ \Rightarrow\ -1\le\cos(x+\dfrac{\pi}{3})\le\dfrac{1}{2}$

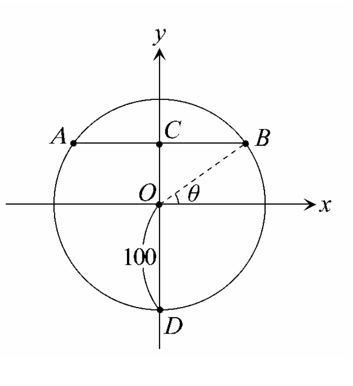
$\begin{cases}\cos(x+\dfrac{\pi}{3})=\dfrac{1}{2}\text{，即 } x=a=0 \text{ 時，有最大值 } M=\dfrac{7}{2}\\ \cos(x+\dfrac{\pi}{3})=-1\text{，即 } x=\beta=\dfrac{2\pi}{3} \text{ 時，有最小值 } m=2\end{cases}$　$\therefore$　$\begin{cases}\alpha+\beta=\dfrac{2\pi}{3}\\ M+m=\dfrac{11}{2}\end{cases}$

4. 某公園有一半徑 100 公尺的圓形池塘，打算在池塘上建一座「T」型的木橋（如圖），試問此木橋總長 $\overline{AB}+\overline{CD}$ 之最大值為__________。



【解答】$100+100\sqrt{5}$

【詳解】



設 $\angle CBO=\theta$

$\begin{cases}\overline{AB}=2\overline{BC}=2\times(100\cos\theta)=200\cos\theta\\ \overline{CD}=\overline{OC}+\overline{OD}=100\sin\theta+100\end{cases}$

$\overline{AB}+\overline{CD}=100(2\cos\theta+\sin\theta)+100$

$=100\sqrt{5}\sin(\theta+\alpha)+100$

$\therefore$　最大值為 $100+100\sqrt{5}$

5. 設 $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$，則 $3\sin^2 x - 2\sin x\cos x + \cos^2 x$ 之最大值 $=$ ＿＿＿＿＿。

【解答】3

【詳解】

原式 $= 3\cdot\dfrac{1-\cos 2x}{2} - \sin 2x + \dfrac{1+\cos 2x}{2} = 2 - \sin 2x - \cos 2x$

$= 2 - \sqrt{2}(\sin 2x\cos\dfrac{\pi}{4} + \cos 2x\sin\dfrac{\pi}{4}) = 2 - \sqrt{2}\sin(2x + \dfrac{\pi}{4})$

$\because\ 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow 0 \le 2x \le \pi \Rightarrow \dfrac{\pi}{4} \le 2x + \dfrac{\pi}{4} \le \dfrac{5\pi}{4}$

$\Rightarrow -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \le \sin(2x + \dfrac{\pi}{4}) \le 1 \Rightarrow -\sqrt{2} \le -\sqrt{2}\sin(2x + \dfrac{\pi}{4}) \le 1$

$\Rightarrow 2 - \sqrt{2} \le 2 - \sqrt{2}\sin(2x + \dfrac{\pi}{4}) \le 3$

6. 設 $f(x) = \cos x(\cos x - \sin x)$，$0 \le x < 2\pi$，則

(1) $f(x)$之最小值為＿＿＿＿＿。 (2) $f(x)$有最小值時，$x =$ ＿＿＿＿＿。

【解答】(1) $\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$ (2) $\dfrac{3\pi}{8}$

$f(x) = \cos x(\cos x - \sin x) = \cos^2 x - \cos x\sin x$

$= \dfrac{1+\cos 2x}{2} - \dfrac{\sin 2x}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}(\cos 2x - \sin 2x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin(2x + \dfrac{3\pi}{4})$

$\because\ 0 \le x \le \pi \Rightarrow 0 \le 2x \le 2\pi \Rightarrow \dfrac{3\pi}{4} \le 2x + \dfrac{3\pi}{4} \le \dfrac{11\pi}{4}$

$\Rightarrow -1 \le \sin(2x + \dfrac{3\pi}{4}) \le 1 \Rightarrow \dfrac{1-\sqrt{2}}{2} \le f(x) \le \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$

故 $f(x)$之最小值為 $\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$，且此時 $2x + \dfrac{3\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{2}$，即 $x = \dfrac{3\pi}{8}$

7. 設 $\sqrt{3}\sin 2x + 2\cos^2 x$ 的最大值為 M，最小值為 m，則 $M + m =$ ＿＿＿＿＿。

【解答】2

【詳解】

$\sqrt{3}\sin 2x + 2\cos^2 x = \sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x + 1$

$= 2(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x + \dfrac{1}{2}\cos 2x) + 1 = 2(\sin 2x\cos\dfrac{\pi}{6} + \cos 2x\sin\dfrac{\pi}{6}) + 1 = 2\sin(2x + \dfrac{\pi}{6}) + 1$

$\therefore\ M = 3$，$m = -1 \Rightarrow M + m = 2$

8. $y = \cos x - \sqrt{3}\sin x$ 化為 $y = 2\sin(\alpha - x)$，$0 \le \alpha < 2\pi$，求$\alpha =$ ＿＿＿＿＿。

【解答】$\dfrac{\pi}{6}$

【詳解】$y = \cos x - \sqrt{3}\sin x = 2(\dfrac{1}{2}\cos x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x) = 2\sin(\dfrac{\pi}{6} - x)$ $\therefore\ \alpha = \dfrac{\pi}{6}$

9. 設 $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$，$f(x) = 2 + 2(\sin x + \cos x) - \sin 2x$，則

(1) $\sin x + \cos x$ 的範圍為＿＿＿＿＿。

(2) 若 $f(x)$在 $x = x_1$ 時有最大值 M；在 $x = x_2$ 時有最小值為 m，則數對$(x_1, M) =$ ＿＿＿＿，$(x_2, m) =$ ＿＿＿＿＿。

【解答】$1 \le \sin x + \cos x \le \sqrt{2}$ ； $(x_1，M) = (0，4)$，$(\frac{\pi}{2}，4)$； $(x_2，m) = (0，1 + 2\sqrt{2})$

【詳解】

(1)設 $t = \sin x + \cos x$，

$$t = \sqrt{2}\,(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x) = \sqrt{2}\,(\sin x\cos\frac{\pi}{4} + \cos x\sin\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4})$$

又 $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$，所以 $\frac{\sqrt{2}}{2} \le \sin(x + \frac{\pi}{4}) \le 1$，故 $1 \le t \le \sqrt{2}$

(2)將 $t = \sin x + \cos x$ 兩邊平方後整理，得 $\sin x\cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$

$f(x) = 2 + 2(\sin x + \cos x) - 2\sin x\cos x$

$= 2 + 2t - (t^2 - 1) = -(t^2 - 2t + 1) + 4 = -(t - 1)^2 + 4$，其中 $-\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}$

①當 $t = 1$ 時，此時 $x = 0$ 或 $x = \frac{\pi}{2}$， $f(x)$有最大值 4

②當 $t = \sqrt{2}$ 時，此時 $x = \frac{\pi}{4}$， $f(x)$有最小值 $1 + 2\sqrt{2}$

10.函數 $y = 3\cos x - \sqrt{3}\sin x$，

(1)疊合成 $y = r\cos(x + \alpha)$，$r > 0$，$0 \le \alpha < 2\pi$，則$(r，\alpha)$= ＿＿＿＿＿。

(2) $-\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{6}$時，$y$ 之最大值爲＿＿＿＿＿。

【解答】(1)$(2\sqrt{3}，\frac{\pi}{6})$ (2) $2\sqrt{3}$

(1) $y = 3\cos x - \sqrt{3}\sin x = 2\sqrt{3}\,(\cos x - \frac{1}{2}\sin x)$

$= 2\sqrt{3}\,(\cos x\cos\frac{\pi}{6} - \sin x\sin\frac{\pi}{6}) = 2\sqrt{3}\cos(x + \frac{\pi}{6})$，∴ $(r，\alpha) = (2\sqrt{3}，\frac{\pi}{6})$

(2)由 $-\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{6}$ ⇒ $-\frac{\pi}{6} \le x + \frac{\pi}{6} \le \frac{\pi}{3}$ ⇒ $\frac{1}{2} \le \cos(x + \frac{\pi}{6}) \le 1$ ⇒ $\sqrt{3} \le y \le 2\sqrt{3}$

∴ y 之最大值爲 $2\sqrt{3}$

12.求 $\csc 10° - \sqrt{3}\sec 10°$之值 ＝ ＿＿＿＿＿。

【解答】4

【詳解】

$$\csc 10° - \sqrt{3}\sec 10° = \frac{1}{\sin 10°} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10°} = \frac{\cos 10° - \sqrt{3}\sin 10°}{\sin 10°\cos 10°} = \frac{2(\frac{1}{2}\cos 10° - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 10°)}{\frac{1}{2}\sin 20°}$$

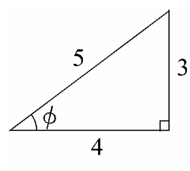
$$= \frac{2(\sin 30°\cos 10° - \cos 30°\sin 10°)}{\frac{1}{2}\sin 20°} = \frac{2\sin 20°}{\frac{1}{2}\sin 20°} = 4$$

13.設 $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$，$y = 3\cos x + 4\sin x$，求

(1) y 有最大値時，$\cos x$ = ＿＿＿＿＿。 (2) y 之最小値＿＿＿＿＿。

【解答】(1) $\frac{3}{5}$ (2) 3

【詳解】



$y=3\cos x+4\sin x=5(\frac{4}{5}\sin x+\frac{3}{5}\cos x)=5(\sin x\cos\phi+\cos x\sin\phi)=5\sin(x+\phi)$ ，

$\phi\le x+\phi\le\frac{\pi}{2}+\phi \Rightarrow \frac{3}{5}\le\sin(x+\phi)\le 1$

$\therefore$當 $\sin(x+\phi)=1$，Max = 5，

此時 $x+\phi=\frac{\pi}{2} \quad\Rightarrow\quad x=\frac{\pi}{2}-\phi \quad\therefore\quad \cos x=\cos(\frac{\pi}{2}-\phi)=\sin\phi=\frac{3}{5}$

當 $\sin(x+\phi)=\frac{3}{5}$時，$\min=5\times\frac{3}{5}=3$，此時 $x+\phi=\phi$ 即 $x=0$

14.設 $f(x)=\sqrt{3}\cos x-\sin x$，$0\le x<2\pi$，

(1)若 $f(x)=2$，則 $x=$ ＿＿＿＿＿＿。 (2)若 $f(x)=1$，則 $x=$ ＿＿＿＿＿＿。

【解答】(1) $\frac{11\pi}{6}$ (2) $\frac{\pi}{6}$

$f(x)=\sqrt{3}\cos x-\sin x=2\sin(x+\frac{2\pi}{3})$ 且 $0\le x<2\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{3}\le x+\frac{2\pi}{3}\le\frac{8\pi}{3}$

(1) $f(x)=2 \quad\Rightarrow\quad \sin(x+\frac{2\pi}{3})=1 \quad\Rightarrow\quad x+\frac{2\pi}{3}=\frac{5\pi}{2} \quad\Rightarrow\quad x=\frac{11\pi}{6}$

(2) $f(x)=1 \quad\Rightarrow\quad \sin(x+\frac{2\pi}{3})=\frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad x+\frac{2\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}$或$\frac{13\pi}{6} \quad\Rightarrow\quad x=\frac{\pi}{6}$或$\frac{3\pi}{2}$

15.設 $f(x)=2\sin(210^\circ-x)+3\cos x$，若當 $x=\alpha$ 時，$f(x)$有最大値爲 M，求 M 及 $\tan\alpha$之値。

【解答】$\sqrt{7}$ ，$\frac{\sqrt{3}}{2}$

【詳解】

$f(x)=2\sin(210^\circ-x)+3\cos x=2(\sin 210^\circ\cos x-\cos 210^\circ\sin x)+3\cos x$

$=-\cos x+\sqrt{3}\sin x+3\cos x=2\cos x+\sqrt{3}\sin x=\sqrt{7}\,(\frac{2}{\sqrt{7}}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\sin x)$

$=\sqrt{7}\sin(x+\theta)$， 其中 $\sin\theta=\frac{2}{\sqrt{7}}$ ，$\cos\theta=\sqrt{\frac{3}{7}}$

當 $\sin(x+\theta)=1$ 時，$f(x)=\sqrt{7}$ 爲最大值 $\quad\Rightarrow\quad M=\sqrt{7}$

此時 $x+\theta=2n\pi+\frac{\pi}{2}$ ，$n\in Z \quad\therefore\quad x=2n\pi+\frac{\pi}{2}-\theta$

$\therefore\quad \tan x=\tan(2n\pi+\frac{\pi}{2}-\theta)=\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sqrt{\frac{3}{7}}}{\frac{2}{\sqrt{7}}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，即$\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$