高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：96.06.7					
範圍	3-2、3 和角、倍角公式	班級	普一　　班	姓名	
		座號			

一、選擇題(每題 5 分)

1. $\cos 5^\circ\cos 10^\circ\cos 20^\circ\cos 40^\circ =$ (A) $\frac{1}{16}$　(B) $\frac{-1}{16}$　(C) $\frac{\cos 50^\circ}{8}$　(D) $\frac{\cos 10^\circ}{16\sin 5^\circ}$　(E)以上皆非

【解答】(D)

【詳解】

令 $P=\cos 5^\circ\cos 10^\circ\cos 20^\circ\cos 40^\circ$

則$(2\sin 5^\circ)P=2\sin 5^\circ(\cos 5^\circ\cos 10^\circ\cos 20^\circ\cos 40^\circ)$

$=2(\sin 5^\circ\cos 5^\circ)\cos 10^\circ\cos 20^\circ\cos 40^\circ$

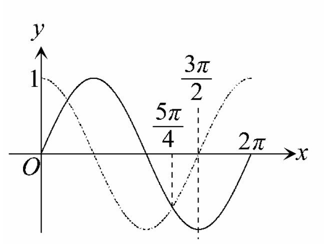
$=(\sin 10^\circ\cos 10^\circ)\cos 20^\circ\cos 40^\circ=(\frac{1}{2}\sin 20^\circ)\cos 20^\circ\cos 40^\circ$

$=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\sin 40^\circ)\cos 40^\circ=\frac{1}{4}(\frac{1}{2}\sin 80^\circ)=\frac{1}{8}\sin 80^\circ$，

$\therefore\ P=\frac{\sin 80^\circ}{16\sin 5^\circ}=\frac{\cos 10^\circ}{16\sin 5^\circ}$，故選(D)

2. 設$\frac{5\pi}{4}<\theta<\frac{3\pi}{2}$，則$\sqrt{1+\sin 2\theta}-\sqrt{1-\sin 2\theta}=$

(A) $2\sin\theta$　(B) $2\cos\theta$　(C) $2\sin 2\theta$　(D) $-2\sin\theta$　(E) $-2\cos\theta$



【解答】(E)

【詳解】

(1)$\because\ \sqrt{1+\sin 2\theta}-\sqrt{1-\sin 2\theta}$

$=\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta}-\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta}$

$=\sqrt{(\sin\theta+\cos\theta)^2}-\sqrt{(\sin\theta-\cos\theta)^2}=|\sin\theta+\cos\theta|-|\sin\theta-\cos\theta|$

(2)由 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 的圖形，知$\frac{5\pi}{4}<\theta<\frac{3\pi}{2}$時，$0>\cos\theta>\sin\theta$

$\therefore\ \sin\theta+\cos\theta<0$，$\sin\theta-\cos\theta<0$

(3)$\therefore$ 原式 $=-(\sin\theta+\cos\theta)+(\sin\theta-\cos\theta)=-2\cos\theta$

3. 設 $\cos\theta=-\frac{4}{5}$，且$\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$，則 $\cos\frac{\theta}{2}=$ (A) $-\frac{2}{5}$ (B) $\frac{3}{\sqrt{10}}$ (C) $\frac{1}{\sqrt{10}}$ (D) $-\frac{3}{\sqrt{10}}$ (E) $-\frac{1}{\sqrt{10}}$

【解答】(E)

【詳解】

$\cos\theta=-\frac{4}{5}=2\cos^2\frac{\theta}{2}-1\ \Rightarrow\ 2\cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{1}{5}$，$\cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{1}{10}$

$\cos\frac{\theta}{2}=\pm\frac{1}{\sqrt{10}}$，又$\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$，$\frac{\pi}{2}<\frac{\theta}{2}<\frac{3}{4}\pi$，$\cos\frac{\theta}{2}<0$，$\therefore\ \cos\frac{\theta}{2}=-\frac{1}{\sqrt{10}}$

4. 設 $\sin\theta=-\frac{3}{5}$且$\frac{3\pi}{2}<\theta<2\pi$，則

(A) $\cos\theta=\frac{4}{5}$　(B) $\tan 2\theta=-\frac{24}{7}$　(C) $\cos 3\theta=-\frac{44}{125}$　(D) $\sin\frac{\theta}{2}=\frac{1}{\sqrt{5}}$　(E) $\cos\frac{\theta}{2}=-\frac{2}{\sqrt{5}}$

【解答】(A)(B)(C)

【詳解】

$\sin\theta=-\frac{3}{5}$ 且 $\frac{3\pi}{2}<\theta<2\pi \Rightarrow \cos\theta=\frac{4}{5}$，$\tan\theta=\frac{-3}{4}$

又 $\frac{3\pi}{2}<\theta<2\pi \Rightarrow \frac{3\pi}{4}<\frac{\theta}{2}<\pi \Rightarrow$ (A) $\cos\theta=\frac{4}{5}$

(B) $\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{2\cdot(\frac{-3}{4})}{1-(-\frac{3}{4})^2}=-\frac{24}{7}$

(C) $\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta=4(\frac{4}{5})^3-3\cdot(\frac{4}{5})=-\frac{44}{125}$

(D) $\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\frac{4}{5}}{2}=\frac{1}{10}$，$\therefore$ $\sin\frac{\theta}{2}=\frac{1}{\sqrt{10}}$，$\cos\frac{\theta}{2}=-\frac{3}{\sqrt{10}}$

5. $\sin 20°\cos 70°+\sin 10°\sin 50°$的值爲(A) $\frac{3}{4}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) 0 (D) $-\frac{1}{4}$ (E) $-\frac{3}{4}$

【解答】(B)

【詳解】分別積化和、差

$\sin 20°\cos 70°+\sin 10°\sin 50°=\frac{1}{2}[\sin 90°+\sin(-50°)]+(\frac{-1}{2})(\cos 60°-\cos 40°)$

$=\frac{1}{2}(1-\sin 50°)-\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-\cos 40°)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sin 50°-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\sin 50°=\frac{1}{4}$

6. $\sin 52.5°+\sin 7.5°=$ (A) $\sin 22.5°$ (B) $\cos 22.5°$ (C) $\sin 11.25°$(D) $\cos 11.25°$ (E) $\cos 5.625°$

【解答】(B)

【詳解】和、差化積

$\sin 52.5°+\sin 7.5°=2\sin\frac{52.5°+7.5°}{2}\cos\frac{52.5°-7.5°}{2}=2\sin 30°\cos 22.5°=\cos 22.5°$

7. 下列敘述，何者正確？

(A) $\cos 100°+\cos 20°=\frac{1}{2}\sin 80°$ (B) $\cos 100°+\cos 20°<\sin 80°$

(C) $2\sin 80°-\cos 70°=\sqrt{3}\cos 20°$ (D) $\frac{1}{2\sin 170°}-2\sin 70°=1$

(E) $\cos 70°-\cos 10°=-\sin 40°$

【解答】(B)(C)(D)(E)

【詳解】

(A) $\cos 100°+\cos 20°=\cos 40°\neq\sin 40°\cos 40°=\frac{1}{2}\sin 80°$

(B) $\cos 100°+\cos 20°=2\cos 60°\cos 40°=2\sin 30°\cos 40°<2\sin 40°\cos 40°=\sin 80°$

(C) $2\sin 80°-\cos 70°=\sin 80°+\sin 80°-\cos 70°=\sin 80°+(\cos 10°-\cos 70°)$

$=\sin 80°-2\sin 40°\sin(-30°)=\sin 80°+\sin 40°=2\sin 60°\cos 20°=\sqrt{3}\cos 20°$

(D) $\frac{1}{2\sin 170°}-2\sin 70°=\frac{1+2(-2\sin 170°\sin 70°)}{2\sin 170°}=\frac{1+2(\cos 80°-\cos 60°)}{2\sin 10°}=\frac{2\cos 80°}{2\sin 10°}=1$

(E) $\cos 70°-\cos 10°=-2\sin 40°\sin 30°=-\sin 40°$

8. 設 $0°<x<360°$且 $\cot x=\frac{\sin 310°-\cos 16°}{\cos 310°+\sin 16°}$，則 x 爲(A) 28°(B) 52°(C) 118°(D) 152°(E) 332°

【解答】(D)(E)

【詳解】

$$\cot x=\frac{\sin 310^\circ-\cos 16^\circ}{\cos 310^\circ+\sin 16^\circ}=\frac{\sin 310^\circ-\sin 74^\circ}{\cos 310^\circ+\cos 74^\circ}=\frac{2\cos 192^\circ\sin 118^\circ}{2\cos 192^\circ\cos 118^\circ}$$

$$=\tan 118^\circ=-\tan 62^\circ=-\cot 28^\circ=\cot 152^\circ=\cot(-28^\circ)=\cot 332^\circ$$

∴ x可為 152°或 332°

9. 下列敘述，何者正確？

(A) $\cos 10^\circ\cos 50^\circ\cos 70^\circ=\frac{1}{8}$　(B) $\cot\frac{\pi}{9}\ \cot\frac{2\pi}{9}\ \cot\frac{4\pi}{9}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

(C) $\tan\frac{\pi}{18}\ \tan\frac{5\pi}{18}\ \tan\frac{7\pi}{18}=\frac{1}{\sqrt{3}}$　(D) $\sec\frac{\pi}{9}\sec\frac{2\pi}{9}\sec\frac{4\pi}{9}=8$

(E) $\csc\frac{\pi}{18}\ \csc\frac{5\pi}{18}\ \csc\frac{7\pi}{18}=8$

【解答】(B)(C)(D)(E)

【詳解】

∵ $\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ=\frac{8\sin 20^\circ\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ}{8\sin 20^\circ}=\frac{\sin 160^\circ}{8\sin 20^\circ}=\frac{\sin 20^\circ}{8\sin 20^\circ}=\frac{1}{8}$

又 $\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 80^\circ=-\frac{1}{2}\sin 40^\circ(-2\sin 20^\circ\sin 80^\circ)$

$=-\frac{1}{2}\sin 40^\circ(\cos 100^\circ-\cos 60^\circ)=-\frac{1}{4}(2\sin 40^\circ\cos 100^\circ)+\frac{1}{4}\sin 40^\circ$

$=-\frac{1}{4}[\sin 140^\circ+\sin(-60^\circ)]+\frac{1}{4}\sin 40^\circ=-\frac{1}{4}\sin 40^\circ+\frac{1}{4}\sin 60^\circ+\frac{1}{4}\sin 40^\circ=\frac{\sqrt{3}}{8}$

(A) $\cos 10^\circ\cos 50^\circ\cos 70^\circ=\sin 80^\circ\ \sin 40^\circ\ \sin 20^\circ=\frac{\sqrt{3}}{8}$

(B) $\cot\frac{\pi}{9}\cot\frac{2\pi}{9}\cot\frac{4\pi}{9}=\cot 20^\circ\cot 40^\circ\cot 80^\circ=\frac{\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ}{\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 80^\circ}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{\sqrt{3}}{8}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

(C) $\tan\frac{\pi}{18}\tan\frac{5\pi}{18}\tan\frac{7\pi}{18}=\tan 10^\circ\tan 50^\circ\tan 70^\circ=\cot 20^\circ\cot 40^\circ\cot 80^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}$

(D) $\sec\frac{\pi}{9}\sec\frac{2\pi}{9}\sec\frac{4\pi}{9}=\sec 20^\circ\sec 40^\circ\sec 80^\circ=\frac{1}{\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ}=8$

(E) $\csc\frac{\pi}{18}\csc\frac{5\pi}{18}\csc\frac{7\pi}{18}=\csc 10^\circ\csc 50^\circ\csc 70^\circ=\sec 20^\circ\sec 40^\circ\sec 80^\circ=8$

二、填充題(每題 10 分)

1. $\sin 67.5^\circ$之值 ＝__________。

【解答】$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

【詳解】$\sin 67.5^\circ=\sin\frac{135^\circ}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos 135^\circ}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

2. $\dfrac{1-\tan^2\frac{\pi}{10}}{1+\tan^2\frac{\pi}{10}}=$ ＿＿＿＿＿＿＿＿。

【解答】 $\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$

【詳解】

$\because\quad \tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$ ，$\sin 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$ ，$\cos 2\theta=\dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$

$\Rightarrow\quad \dfrac{1-\tan^2\frac{\pi}{10}}{1+\tan^2\frac{\pi}{10}}=\cos\dfrac{\pi}{5}=\cos 36^\circ=\cos(2\times 18^\circ)=1-2\sin^2 18^\circ=1-2(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4})^2=\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$

3. $5\sin\theta+12\cos\theta=0$，$\dfrac{3\pi}{2}<\theta<2\pi$，求(1) $\tan 2\theta=$ ＿＿＿＿＿＿＿＿。 (2) $\cos\dfrac{\theta}{2}=$ ＿＿＿＿＿＿＿＿。

【解答】(1) $\dfrac{120}{119}$ (2) $\dfrac{-3}{\sqrt{13}}$

【詳解】

(1) $5\sin\theta+12\cos\theta=0 \quad\Rightarrow\quad 5\sin\theta=-12\cos\theta$，$\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta=-\dfrac{12}{5}$

$\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\dfrac{\frac{-24}{5}}{1-\frac{144}{25}}=\dfrac{24}{5}\times\dfrac{25}{119}=\dfrac{120}{119}$

(2) $\because\quad \dfrac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$ 且 $\tan\theta=-\dfrac{12}{5}\quad\Rightarrow\quad\cos\theta=\dfrac{5}{13}$ ，

又 $\dfrac{3\pi}{4}<\dfrac{\theta}{2}<\pi\quad\Rightarrow\quad\cos\dfrac{\theta}{2}<0$， $\cos\dfrac{\theta}{2}=-\sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{2}}=-\sqrt{\dfrac{1+\frac{5}{13}}{2}}=-\dfrac{3}{\sqrt{13}}$

4. $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ ，$0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ ，$\cos\alpha=\dfrac{11}{61}$ ，$\sin\beta=\dfrac{4}{5}$ ，求 $\sin^2\dfrac{\alpha-\beta}{2}=$ ＿＿＿＿＿＿＿＿。

【解答】 $\dfrac{16}{305}$

【詳解】 $\sin^2\dfrac{\alpha-\beta}{2}=\dfrac{1-\cos(\alpha-\beta)}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{2}=\dfrac{1-\frac{11}{61}\times\frac{3}{5}-\frac{60}{61}\times\frac{4}{5}}{2}=\dfrac{16}{305}$

5. 求下列各值：

(1) $\sin 15^\circ=$ ＿＿＿＿＿＿＿＿。

(2) $\cos^2\dfrac{\pi}{8}+\cos^2\dfrac{3\pi}{8}+\cos^2\dfrac{5\pi}{8}+\cos^2\dfrac{7\pi}{8}=$ ＿＿＿＿＿＿＿＿。

(3) $\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ=$ ＿＿＿＿＿＿＿＿。

【解答】(1) $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ (2) 2 (3) $\dfrac{1}{8}$

【詳解】

(1)令$\theta=15°$， $\sin\theta=+\sqrt{\frac{1-\cos 30°}{2}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}=\sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{8}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{8}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

(2)原式 $=\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}+\frac{1+\cos\frac{3\pi}{4}}{2}+\frac{1+\cos\frac{5\pi}{4}}{2}+\frac{1+\cos\frac{7\pi}{4}}{2}$

$=\frac{1}{2}\times 4+\frac{1}{2}(\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{3}{4}\pi+\cos\frac{5}{4}\pi+\cos\frac{7}{4}\pi)=2$

(3) $\cos 20°\cos 40°\cos 80°=\frac{2\sin 20°\cos 20°\cos 40°\cos 80°}{2\sin 20°}$

$=\frac{\sin 40°\cos 40°\cos 80°}{2\sin 20°}=\frac{\frac{1}{2}\sin 80°\cos 80°}{2\sin 20°}=\frac{\frac{1}{2}\sin 160°}{4\sin 20°}=\frac{\sin 20°}{8\sin 20°}=\frac{1}{8}$

6. 設$f(x)=4x^3-3x+3$，求$f(x)$除以$x-\sin 20°$之餘式__________。

【解答】$3-\frac{\sqrt{3}}{2}$

【詳解】

$f(\sin 20°)=4\sin^3 20°-3\sin 20°+3=-(3\sin 20°-4\sin^3 20°)+3=-\sin 60°+3=3-\frac{\sqrt{3}}{2}$

7. 設$\tan\frac{\theta}{2}=3$，則$\sin 2\theta=$__________。

【解答】$\frac{-24}{25}$

【詳解】$\because\ \tan\frac{\theta}{2}=3$

$\therefore\ \sin\theta=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$，$\cos\theta=\frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}=\frac{-4}{5}$

$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\cdot\frac{3}{5}\cdot(-\frac{4}{5})=\frac{-24}{25}$

8. 設$\tan\frac{\theta}{2}=t$，以t表出：(1) $\tan\theta=$__________。 (2) $\sin 2\theta=$__________。

【解答】(1)$\frac{2t}{1-t^2}$ (2)$\frac{4t-4t^3}{1+2t^2+t^4}$

【詳解】

(1) $\tan\theta=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}=\frac{2t}{1-t^2}$；(2) $\sin 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}=\frac{2\times\frac{2t}{1-t^2}}{1+(\frac{2t}{1-t^2})^2}=\frac{4t-4t^3}{1+2t^2+t^4}$

9. 設$\sin\alpha=-\frac{3}{5}$，$\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$，則$\sin\frac{\alpha}{2}=$__________。

【解答】$\frac{3}{\sqrt{10}}$

【詳解】$\because\ \sin\alpha=-\frac{3}{5}$，$\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$ $\therefore\ \cos\alpha=-\frac{4}{5}$

$\because \quad \pi<\alpha<\frac{3\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi}{2}<\frac{\alpha}{2}<\frac{3\pi}{4} \quad \therefore \quad \sin\frac{\alpha}{2}>0$ 且 $\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$

$\Rightarrow \quad \sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-(-\frac{4}{5})}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{4}{5}}{2}}=\sqrt{\frac{9}{10}}=\frac{3}{\sqrt{10}}$

10.若$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$，且 $25\sin^2\theta+\sin\theta=24$，則$\cos\frac{\theta}{2}$之值爲__________。

【解答】$\frac{3}{5}$

【詳解】

(1) $25\sin^2\theta+\sin\theta-24=0 \quad \Rightarrow \quad (25\sin\theta-24)(\sin\theta+1)=0$

但$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi \quad \therefore \quad \sin\theta=\frac{24}{25} \quad \Rightarrow \quad \cos\theta=-\frac{7}{25}$

(2)$\because \quad \frac{\pi}{4}<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{2} \quad \therefore \quad \cos\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{7}{25}}{2}}=\frac{3}{5}$

11. 設$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$，$\sin\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}$，則(1) $\sin2\theta$ = __________。 (2) $\cos2\theta$ = __________。

【解答】(1) $-\frac{4}{5}$ (2) $\frac{3}{5}$

【詳解】$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$，$\sin\theta=\frac{2}{\sqrt{5}} \quad \Rightarrow \quad \cos\theta=\frac{-1}{\sqrt{5}}$

(1) $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot(\frac{-1}{\sqrt{5}})=-\frac{4}{5}$

(2) $\cos2\theta=1-2\sin^2\theta=1-2\cdot(\frac{2}{\sqrt{5}})^2=-\frac{3}{5}$

12. $\frac{\sin^3\theta+\sin3\theta}{\sin\theta}+\frac{\cos^3\theta-\cos3\theta}{\cos\theta}=$__________。

【解答】3

【詳解】

原式 $=\frac{\sin^3\theta+3\sin\theta-4\sin^3\theta}{\sin\theta}+\frac{\cos^3\theta-4\cos^3\theta+3\cos\theta}{\cos\theta}=-3\sin^2\theta+3-3\cos^2\theta+3=3$

13.設$\cos2\theta=\frac{3}{5}$，$\sin2\theta<0$，則$\tan\theta+\cot\theta=$ __________。

【解答】$-\frac{5}{2}$

【詳解】

$\because \quad \cos2\theta=\frac{3}{5}$ 且 $\sin2\theta<0 \quad \therefore \quad \sin2\theta=-\frac{4}{5}$

$\tan\theta+\cot\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta\sin\theta}=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{2}{2\sin\theta\cos\theta}=\frac{2}{\sin2\theta}=\frac{2}{-\frac{4}{5}}=-\frac{5}{2}$

14.函數$f(x)=\cos^2 2x+2\sin^2 x$，$x\in R$。

(1) $f(x)$的最小值爲__________。 (2) $f(x)$的最大值爲__________。

【解答】(1) $\frac{3}{4}$　(2) 3

【詳解】

$f(x)=\cos^2 2x+2\sin^2 x=(1-2\sin^2 x)^2+2\sin^2 x=4\sin^4 x-2\sin^2 x+1=4(\sin^2 x-\frac{1}{4})^2+\frac{3}{4}$

$\because\ -1\le \sin x\le 1\quad \therefore\ 0\le \sin^2 x\le 1$

故(1) $\sin^2 x=\frac{1}{4}$ 時，$f(x)=\frac{3}{4}$ 為最小值　(2) $\sin^2 x=1$ 時，$f(x)=3$ 為最大值

15.設 $\frac{3\pi}{2}<\theta<2\pi$，$\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{5}$，則

(1) $\sin 2\theta=$ ＿＿＿＿＿＿。　(2) $\sin\theta-\cos\theta=$ ＿＿＿＿＿＿。

【解答】(1) $-\frac{24}{25}$　(2) $-\frac{7}{5}$

【詳解】

(1) $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{5}$

$\Rightarrow\ \sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{25}\ \Rightarrow\ 1+\sin 2\theta=\frac{1}{25}\ \Rightarrow\ \sin 2\theta=-\frac{24}{25}$

(2) $(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=1-(-\frac{24}{25})=\frac{49}{25}$

$\Rightarrow\ \sin\theta-\cos\theta=\pm\frac{7}{5}$，$\because\ \frac{3\pi}{2}<\theta<2\pi\ \therefore\ \sin\theta<\cos\theta$，故 $\sin\theta-\cos\theta=-\frac{7}{5}$

16.設 $f(\theta)=\sin\theta\sin 3\theta$，$\theta$ 為任意實數，求 $f(\theta)$ 之：

(1)最大值＿＿＿＿＿＿。　(2)最小值＿＿＿＿＿＿。

【解答】(1) $\frac{9}{16}$　(2) -1

【詳解】

$f(\theta)=\sin\theta\sin 3\theta=\sin\theta(3\sin\theta-4\sin^3\theta)=-4\sin^4\theta+3\sin^2\theta=-4(\sin^4\theta-\frac{3}{4}\sin^2\theta)$

$=-4(\sin^2\theta-\frac{3}{8})^2+4\cdot\frac{9}{64}=-4(\sin^2\theta-\frac{3}{8})^2+\frac{9}{16}$

$\because\ -1\le\sin\theta\le 1\quad\therefore\ 0\le\sin^2\theta\le 1$，令 $\sin^2\theta=t$，則 $y=f(\theta)=-4(t-\frac{3}{8})^2+\frac{9}{16}$

當 $t=\frac{3}{8}$ 時，y 有 $\text{Max}=\frac{9}{16}$，當 $t=1$ 時，y 有 $\min=-1$

17.設 $x\in R$，$f(x)=2+\sin x+\cos x-\sin 2x$

(1)令 $t=\sin x+\cos x$，請以 t 表示 $f(x)=$ ＿＿＿＿＿＿。

(2)求 $f(x)$ 之最小值為＿＿＿＿＿＿。

【解答】(1) $-t^2+t+3$　(2) $1-\sqrt{2}$

【詳解】(1)令 $t=\sin x+\cos x$，則 $t^2=1+2\sin x\cos x=1+\sin 2x\ \Rightarrow\ \sin 2x=t^2-1$

且 $\sin x+\cos x\ \Rightarrow\sqrt{2}(\sin x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\cos x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}})=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})\Rightarrow-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}$

$f(x)=\sin x+\cos x-\sin 2x+2$

$=t-(t^2-1)+2=-t^2+t+3$，且 $-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}$

(2) $f(x)=-t^2+t+3=-(t^2-t+\frac{1}{4})+\frac{13}{4}=-(t-\frac{1}{2})^2+\frac{13}{4}$

當$t=-\sqrt{2}$時，$f(x)=-(-\sqrt{2}-\frac{1}{2})^2+\frac{13}{4}=1-\sqrt{2}$ 爲最小值

18.$\cos24°\cos48°\cos96°\cos192°=$ ＿＿＿＿＿＿。

【解答】$\frac{1}{16}$

【詳解】

令 $p=\cos24°\cos48°\cos96°\cos192°$

則$(2\sin24°)p=2\sin24°(\cos24°\cos48°\cos96°\cos192°)=(2\sin24°\cos24°)\cos48°\cos96°\cos192°$

$=(\sin48°\cos48°)\cos96°\cos192°=(\frac{1}{2}\sin96°)\cos96°\cos192°$

$=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\sin192°)\cos192°=\frac{1}{4}(\frac{1}{2}\sin384°)=\frac{1}{8}\sin24°\Rightarrow p=\frac{\sin24°}{16\sin24°}=\frac{1}{16}$

19.$\csc10°\csc50°\csc70°$之值爲＿＿＿＿＿＿。

【解答】8

【詳解】$\because\ \cos20°\cos40°\cos80°=\frac{8\sin20°\cos20°\cos40°\cos80°}{8\sin20°}=\frac{\sin160°}{8\sin20°}=\frac{\sin20°}{8\sin20°}=\frac{1}{8}$

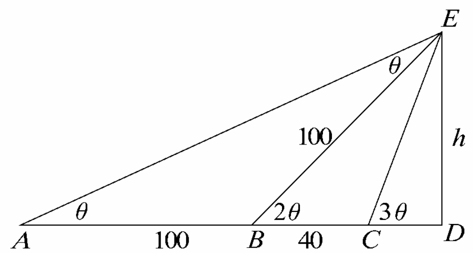
$\therefore\ \csc10°\csc50°\csc70°=\sec20°\sec40°\sec80°=\frac{1}{\cos20°\cos40°\cos80°}=8$

20.設$\tan\frac{\theta}{2}=\frac{3}{4}$，則 $4\cos\theta+3\sin\theta=$ ＿＿＿＿＿＿。

【解答】4

【詳解】$4\cos\theta+3\sin\theta=4\cdot\frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}+3\cdot\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}=4\cdot\frac{1-\frac{9}{16}}{1+\frac{9}{16}}+3\cdot\frac{2\cdot\frac{3}{4}}{1+\frac{9}{16}}=4$

21.某人由平面上一點 A 測得正東方一塔仰角爲θ，由 A 向塔底前進 100 公尺至 B 點測得塔頂之仰角爲 2θ，再前進 40 公尺至點 C 測得塔頂之仰角爲 3θ，試求塔高。



【解答】$25\sqrt{7}$ 公尺

【詳解】

如圖，$\angle DAE=\theta$，$\angle DBE=2\theta$，$\angle DCE=3\theta$，故得

$\angle AEB=\angle BEC=\theta$，$\overline{BE}=\overline{AB}=100$，$\angle BCE=\pi-3\theta$

在△BCE中，由正弦定理得$\frac{40}{\sin\theta}=\frac{100}{\sin(\pi-3\theta)}\ \Leftrightarrow\ 2\sin3\theta=5\sin\theta$

$\therefore\ 2(3\sin\theta-4\sin^3\theta)=5\sin\theta\ \ \therefore\ \sin\theta(8\sin^2\theta-1)=0$

$\because\ \sin\theta\neq0\ \ \therefore\ 8\sin^2\theta=1\ \ \therefore\ \sin\theta=\frac{1}{2\sqrt{2}}$，$\cos\theta=\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$

故塔高$h=100\sin2\theta=200\sin\theta\cos\theta=200\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}=25\sqrt{7}$ 公尺

22.設$\sin\theta$，$\cos\theta$爲方程式$x^2+px+q=0$ 的二根，試以p，q表 $2\cos^2\frac{\theta}{2}(\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2})^2$。

【解答】$1-p+q$

【詳解】

$\because$ $\sin\theta$，$\cos\theta$ 爲$x^2+px+q=0$的二根 $\therefore$ $\sin\theta+\cos\theta=-p$，$\sin\theta\cdot\cos\theta=q$

故 $2\cos^2\frac{\theta}{2}(\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2})^2=(1+\cos\theta)(\cos^2\frac{\theta}{2}+2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2})$

$=(1+\cos\theta)(1+\sin\theta)=1+(\sin\theta+\cos\theta)+\sin\theta\cos\theta=1+(-p)+q=1-p+q$

23.已知$\sin\alpha+\sin\beta=\frac{3}{5}$，$\cos\alpha+\cos\beta=\frac{1}{5}$，則

(1) $\tan\frac{\alpha+\beta}{2}=$ ＿＿＿＿＿＿。 (2) $\cos(\alpha+\beta)=$ ＿＿＿＿＿＿。

【解答】(1)3 (2)$\frac{-4}{5}$

【詳解】

(1)$\because$ $\sin\alpha+\sin\beta=\frac{3}{5}$ $\therefore$ $2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{3}{5}$ ……①

$\because$ $\cos\alpha+\cos\beta=\frac{1}{5}$ $\therefore$ $2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{1}{5}$ ……②

$\frac{①}{②}$得 $\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{\frac{3}{5}}{\frac{1}{5}}$ $\Rightarrow$ $\tan\frac{\alpha+\beta}{2}=3$

(2) $\cos(\alpha+\beta)=\frac{1-\tan^2\frac{\alpha+\beta}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{1-9}{1+9}=-\frac{4}{5}$

24.試求$\cos^2\theta+\cos^2(60°+\theta)+\cos^2(120°+\theta)$之値。

【解答】$\frac{3}{2}$

【詳解】

$\cos^2\theta+\cos^2(60°+\theta)+\cos^2(120°+\theta)$

$=\frac{1}{2}(1+\cos2\theta)+\frac{1}{2}(1+\cos2(60°+\theta))+\frac{1}{2}(1+\cos2(120°+\theta))$

$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}[\cos2\theta+\cos2(60°+\theta)+\cos2(120°+\theta)]=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}[\cos2\theta+2\cos(180°+2\theta)\cos60°]$

$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}(\cos2\theta-\cos2\theta)=\frac{3}{2}$