高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：96.05.31					
範圍	3-1、2 圖形、和角公式	班級	普一　　班	姓名	
		座號			

一、選擇題(每題 5 分)

1. 設 $a=\cos1$，$b=\sin2$，$c=\tan3$，$d=\csc4$，$e=\sec5$，其中最大的數爲（1 弧度 ≑ 57.3°）

(A) a (B) b (C) c (D) d (E) e

【解答】(E)

【詳解】

$a=\cos1=\cos57.3°<1$

$b=\sin2=\sin114.6°=\cos24.6°<1$

$c=\tan3=\tan171.9°=-\tan8.1°<0$

$d=\csc4=\csc229.2°=-\csc49.2°<0$

$e=\sec5=\sec286.5°=\csc16.5°>1$

∴ 最大爲 e，應選(E)

2. 下列何者週期爲 π？

(A) $y=3\sin x+5$ (B) $y=-2\cos(2x-1)$ (C) $y=\pi\tan(x+5)$ (D) $y=\csc(-2x-1)$

(E) $y=4-\cot2x$

【解答】(B)(C)(D)

【詳解】

(A) $y=3\sin x+5$，週期 $=2\pi$ (B) $y=-2\cos(2x-1)$，週期 $=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$

(C) $y=\pi\tan(x+5)$，週期 $=\pi$ (D) $y=\csc(-2x-1)$，週期 $=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$

(E) $y=4-\cot2x$，週期 $=\dfrac{\pi}{2}$

3. $\sqrt{3}\tan20°+\sqrt{3}\tan10°+\tan20°\tan10°=$ (A) $\sqrt{3}$ (B) $-\sqrt{3}$ (C) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ (D) 1 (E) -1

【解答】(D)

【詳解】

$\tan30°=\tan(20°+10°)\Rightarrow\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\tan20°+\tan10°}{1-\tan20°\tan10°}$

$\Rightarrow\sqrt{3}\tan20°+\sqrt{3}\tan10°+\tan20°\tan10°=1$

4. 化簡 $\sin100°\sin(-160°)+\cos200°\cos(-280°)$得(A) -1 (B) 2 (C) $-\dfrac{1}{2}$ (D) -2 (E) $\dfrac{1}{2}$

【解答】(C)

【詳解】

$\sin100°\sin(-160°)+\cos200°\cos(-280°)=\sin80°(-\sin20°)+(-\cos20°)\cos80°$

$=-(\cos20°\cos80°+\sin20°\sin80°)=-\cos(80°-20°)=-\cos60°=-\dfrac{1}{2}$

5. (複選)設 $0<\alpha$，$\beta<\pi$，且 $\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$，$\tan\beta=\dfrac{1}{3}$，下列何者正確？(A) $\tan(\alpha+\beta)=\pm1$

(B) $\sec(\alpha+\beta)=\sqrt{2}$ (C) $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$ (D) $\alpha+\beta=\dfrac{3\pi}{4}$ (E) $\alpha+\beta$ 有二解

【解答】(B)(C)

【詳解】

$0<\alpha$，$\beta<\pi$且 $\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$，$\tan\beta=\dfrac{1}{3}$ $\Rightarrow$ $0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$，$0<\beta<\dfrac{\pi}{4}$ $\therefore$ $0<\alpha+\beta<\dfrac{\pi}{2}$

又 $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=1$，故 $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$

二、填充題(每題 10 分)

1. 求 $y=\dfrac{1}{4}\sin(\dfrac{x}{3}+\dfrac{\pi}{2})$ 之(1)週期__________。 (2)最大值__________。

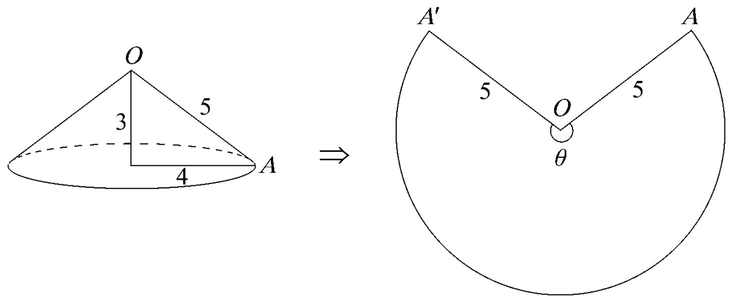
【解答】(1) 6π (2) $\dfrac{1}{4}$

【詳解】(1)週期 $=\dfrac{2\pi}{1/3}=6\pi$ (2) $y=\dfrac{1}{4}\sin(\dfrac{x}{3}+\dfrac{\pi}{2})$ 之 Max $=\dfrac{1}{4}$ ($\because -1\le\dfrac{1}{4}\sin(\dfrac{x}{3}+\dfrac{\pi}{2})\le 1$)

2. 有一直圓錐，底半徑為 4，高為 3，現沿其斜高剪成一扇形，則此扇形中心角為__弧度。

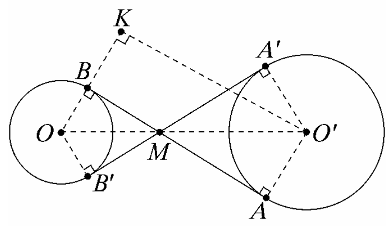
【解答】$\dfrac{8\pi}{5}$

【詳解】



$\overset{\frown}{AA'}=5\theta=8\pi$ $\therefore$ $\theta=\dfrac{8\pi}{5}$

3. 二圓輪之半徑分別為 2、3，中心距離為 10，以皮帶交叉緊繞二圓輪，則皮帶長為__________。



【解答】$10\sqrt{3}+\dfrac{20}{3}\pi$

【詳解】

內公切線段長 $\overline{AB}=\overline{O'K}=\sqrt{\overline{OO'}^2-\overline{OK}^2}=\sqrt{10^2-5^2}=5\sqrt{3}$

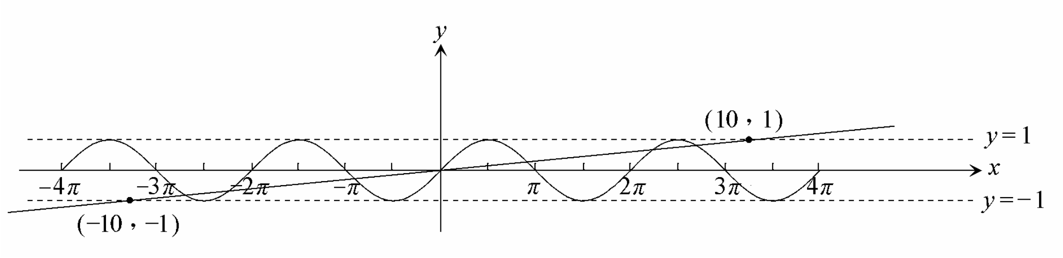
$\angle BOM=\angle AO'M=\dfrac{\pi}{3}$，$\therefore$ 優角$\angle BOB'=\dfrac{4\pi}{3}$，且優角$\angle AO'A'=\dfrac{4\pi}{3}$

皮帶長 $=2\times5\sqrt{3}+2\cdot\dfrac{4\pi}{3}+3\cdot\dfrac{4\pi}{3}=10\sqrt{3}+\dfrac{20}{3}\pi$

4. 方程式 $10\sin x=x$ 共有__________個實根。

【解答】7 個

【詳解】



$10\sin x = x$

$\Rightarrow\quad \sin x = \dfrac{x}{10}$ 的實根個數，就是 $y = \sin x$ 的圖形與 $y = \dfrac{x}{10}$ 的圖形之交點個數，其圖形如上：

以 $x = 3\pi$ 代入 $y = \dfrac{x}{10}$ 得 y 值爲 $\dfrac{3\pi}{10} < 1 \quad \Rightarrow \quad 3\pi < 10$

以 $x = 4\pi$ 代入 $y = \dfrac{x}{10}$ 得 y 值爲 $\dfrac{4\pi}{10} > 1 \quad \Rightarrow \quad 4\pi > 10$

$\therefore\quad 3\pi < 10 < 4\pi \quad \Rightarrow \quad -4\pi < -10 < -3\pi$

故 $y = \sin x$ 與 $y = \dfrac{x}{10}$ 之交點有 7 個，即 $10\sin x = x$ 有 7 個實根

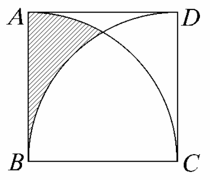
5. 將 $y = \cos x$ 的圖形向右平移 $\dfrac{\pi}{2}$ 單位後，再向上平移 2 個單位，得函數 $y =$ ______ 的圖形。

【解答】$y = \cos(x - \dfrac{\pi}{2}) + 2$

【詳解】

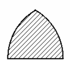
$y = \cos x \xrightarrow{\text{向右平移}\frac{\pi}{2}\text{單位}} y = \cos(x - \dfrac{\pi}{2}) \xrightarrow{\text{向上平移2單位}} y = \cos(x - \dfrac{\pi}{2}) + 2$

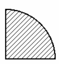
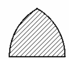
6. 如下圖所示，邊長爲 1 之正方形 $ABCD$ 中，以 B，C 爲圓心，1 爲半徑畫弧，求斜線部分之面積 ＝__________。



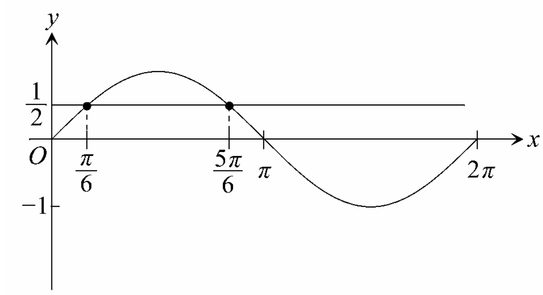
【解答】$\dfrac{\sqrt{3}}{4} - \dfrac{5\pi}{12}$

【詳解】

 $= 2$  $-$  $= 2 \cdot 1^2 \cdot \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{4} \cdot 1^2 = \dfrac{2\pi}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{4}$

$\therefore$ 所求面積 ＝  $-$  $= \dfrac{1}{4} \cdot 1^2 \cdot \pi - (\dfrac{2\pi}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{4}) = \dfrac{\sqrt{3}}{4} - \dfrac{5\pi}{12}$

7. 設 $0 \le x \le 2\pi$，試求不等式 $\sin x > \dfrac{1}{2}$ 的解。



【解答】$\dfrac{\pi}{6} < x < \dfrac{5\pi}{6}$

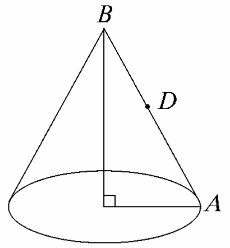
【詳解】

在 $0 \le x \le 2\pi$ 範圍條件下 $\sin x > \dfrac{1}{2}$ 的解，就是滿足

$y = \sin x$ 之圖形在直線 $y = \dfrac{1}{2}$ 上方之所有 x 的值。

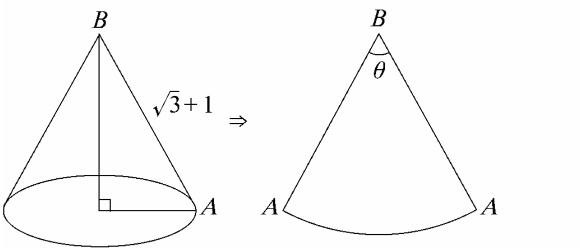
故由上圖得知：$\sin x > \dfrac{1}{2}$ 的解爲 $\dfrac{\pi}{6} < x < \dfrac{5\pi}{6}$

8. 如圖，直立圓錐的底半徑爲$\dfrac{\sqrt{3}+1}{8}$，斜高爲$\sqrt{3}+1$，$\overline{BD}=\sqrt{2}$，有一隻螞蟻由 A 出發(1)繞錐面一周到 D。 (2)繞錐面一周回到 A。
試各求最短的路徑長。(1)_____________；(2)_____________



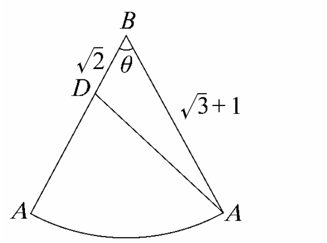
【解答】(1) 2 (2)$(\sqrt{3}+1)\sqrt{2-\sqrt{2}}$

【詳解】

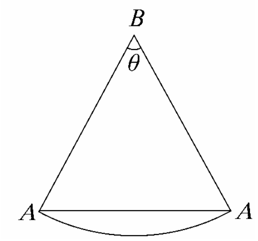


底圓周的周長 = 扇形的弧度 $\Rightarrow$ $2\pi(\dfrac{\sqrt{3}+1}{8})=(\sqrt{3}+1)\theta$ $\Rightarrow$ $\theta=\dfrac{\pi}{4}$

(1)如圖，$\overline{AD}^2=(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3}+1)^2-2\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)\cos 45°$
$=2+4+2\sqrt{3}-2(\sqrt{3}+1)=4$ $\Rightarrow$ $\overline{AD}=2$



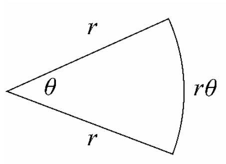
(2)如圖，所求路徑長 $=\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2+(\sqrt{3}+1)^2-2(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}+1)\cos 45°}=(\sqrt{3}+1)\sqrt{2-\sqrt{2}}$



9. 設一扇形之面積恆爲定值 8，試求
(1)扇形的最小周長__________。 (2)此時扇形的中心角 θ 之弧度_____________。

【解答】(1) $8\sqrt{2}$ (2) 2

【詳解】



設扇形之圓半徑爲r，中心角爲θ，則面積$\dfrac{1}{2}r^2\theta=8$；周長$p=2r+r\theta$

由算幾不等式$\dfrac{2r+r\theta}{2}\geq\sqrt{2r\cdot r\theta}\Rightarrow 2r+r\theta\geq 2\sqrt{2r^2\theta}=2\sqrt{2\times 16}=8\sqrt{2}$

當 $2r=r\theta$時，周長$p=8\sqrt{2}$ 爲最小值，此時$\theta=2$

10.設$\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，$\pi<\beta<\dfrac{3}{2}\pi$，且$\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\cos\beta=-\dfrac{1}{4}$，則$\cos(\alpha+\beta)=$__________。

【解答】$\dfrac{4+3\sqrt{15}}{20}$

【詳解】

$\because \quad \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \quad \therefore \quad \sin\alpha = \frac{3}{5}$，$\cos\alpha = -\frac{4}{5}$

$\because \quad \pi < \beta < \frac{3}{2}\pi \quad \therefore \quad \cos\beta = -\frac{1}{4}$，$\sin\beta = -\frac{\sqrt{15}}{4}$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = (\frac{-4}{5})\times(\frac{-1}{4}) - \frac{3}{5}\times(\frac{-\sqrt{15}}{4}) = \frac{4+3\sqrt{15}}{20}$

11.求$\sqrt{3}\tan80°\tan20° - \tan80° + \tan20°$的値爲__________。

【解答】$-\sqrt{3}$

【詳解】

$$\tan(80°-20°) = \frac{\tan80° - \tan20°}{1+\tan80°\tan20°} = \tan60° = \frac{\sqrt{3}}{1}$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{3} + \sqrt{3}\tan80°\tan20° = \tan80° - \tan20°$$

$$\therefore \quad \sqrt{3}\tan80°\tan20° - \tan80° + \tan20° = -\sqrt{3}$$

12.試求$\sin23°\cos112° - \sin292°\sin67° =$__________。

【解答】$\frac{\sqrt{2}}{2}$

【詳解】原式 $= -\sin23°\cos68° + \sin68°\cos23° = \sin(68°-23°) = \sin45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

13. 設$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$，$-\frac{\pi}{2} < \beta < 0$ 且$\tan\alpha = \frac{1}{2}$，$\cot\beta = -3$，則$\alpha - \beta =$__________。

【解答】$\frac{5\pi}{4}$

【詳解】

$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$，$-\frac{\pi}{2} < \beta < 0 \quad \Rightarrow \quad \pi < \alpha - \beta < 2\pi$

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} = \frac{\frac{1}{2} - (\frac{-1}{3})}{1+\frac{1}{2}(\frac{-1}{3})} = 1 \quad \therefore \quad \alpha - \beta = \frac{5\pi}{4}$$

14. $\cos^2\frac{\pi}{24} - \sin^2\frac{5\pi}{24} =$__________。

【解答】$\frac{\sqrt{6}}{4}$

【詳解】

$$\cos^2\frac{\pi}{24} - \sin^2\frac{5\pi}{24} = \cos(\frac{\pi}{24}+\frac{5\pi}{24})\cos(\frac{\pi}{24}-\frac{5\pi}{24}) = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

15. $\alpha+\beta = \frac{1}{4}\pi$，求$(1+\tan\alpha)(1+\tan\beta) =$__________。（$\alpha$，$\beta$ 爲銳角）

【解答】2

【詳解】

$$\tan(\alpha+\beta) = 1 = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} \Rightarrow 1 - \tan\alpha\tan\beta = \tan\alpha + \tan\beta \Rightarrow 1 = \tan\alpha\tan\beta + \tan\alpha + \tan\beta$$

$$\therefore \quad (1+\tan\alpha)(1+\tan\beta) = 1 + \tan\alpha\tan\beta + \tan\alpha + \tan\beta = 2$$

16. $\cos316°\sin164° - \sin224°\cos344° =$__________。

【解答】$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

【詳解】

原式 $=\cos(360°-44°)\sin(180°-16°)-\sin(180°+44°)\cos(360°-16°)$

$=\cos44°\sin16°+\sin44°\cos16°=\sin(44°+16°)=\sin60°=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

17. 設 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$，$\cos\alpha=\dfrac{7}{5\sqrt{2}}$，$\cos\beta=-\dfrac{3}{5}$，則

(1) $\sin(\alpha+\beta)=$ __________ 。 (2) $\alpha+\beta=$ __________ 。

【解答】(1) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (2) $\dfrac{3\pi}{4}$

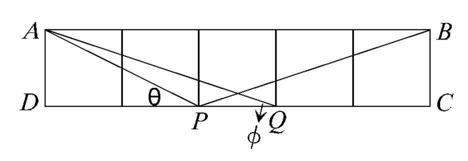
【詳解】

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$\cos\alpha=\dfrac{7}{5\sqrt{2}}$ $\Rightarrow$ $\sin\alpha=\dfrac{1}{5\sqrt{2}}$；$\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$，$\cos\beta=-\dfrac{3}{5}$ $\Rightarrow$ $\sin\beta=\dfrac{4}{5}$

(1) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{5\sqrt{2}}(-\dfrac{3}{5})+\dfrac{7}{5\sqrt{2}}\cdot\dfrac{4}{5}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(2) $\because$ $\dfrac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\dfrac{3\pi}{2}$ $\therefore$ $\alpha+\beta=\dfrac{3\pi}{4}$

18. 如圖，矩形$ABCD$中，$\overline{AB}=5$，$\overline{AD}=1$，$\overline{DP}=2$，$\overline{PQ}=1$，$\angle APD=\theta$，$\angle AQD=\phi$，則$\theta+\phi=$ __________度。



【解答】45

【詳解】

$\because$ $\tan\theta=\dfrac{1}{2}$，$\tan\phi=\dfrac{1}{3}$ $\therefore$ $\tan(\theta+\phi)=\dfrac{\tan\theta+\tan\phi}{1-\tan\theta\tan\phi}=\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=1$

而 $0°<\theta+\phi<180°$ $\Rightarrow$ $\theta+\phi=45°$

19.求$\dfrac{\sin^2 37.5°-\sin^2 7.5°}{\cos^2 37.5°+\cos^2 7.5°}$之值。

【解答】$\dfrac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{5}$

【詳解】由正、餘弦平方差公式可得：

$$\frac{\sin^2 37.5°-\sin^2 7.5°}{\cos^2 37.5°+\cos^2 7.5°}=\frac{\sin(37.5°+7.5°)\sin(37.5°-7.5°)}{\cos^2 37.5°-\sin^2 7.5°+1}$$

$$=\frac{\sin(37.5°+7.5°)\sin(37.5°-7.5°)}{\cos(37.5°+7.5°)\cos(37.5°-7.5°)+1}$$

$$=\frac{\sin45°\sin30°}{\cos45°\cos30°+1}$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+1}=\frac{\sqrt{2}}{4+\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{5}$$

20.設$\tan\alpha$，$\tan\beta$ 為 $2x^2-5x+1=0$ 的二根，試求：

(1) $\tan(\alpha+\beta)=$______________。

(2) $\cos^2(\alpha+\beta)=$______________。。

(3) $3\sin^2(\alpha+\beta)-5\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+2\cos^2(\alpha+\beta)=$______________。。

【解答】(1) 5　(2) $\frac{1}{26}$　(3) 2

【詳解】

$\because$　$\tan\alpha$，$\tan\beta$ 為二次方程式 $2x^2-5x+1=0$ 的二根

$\therefore$　$\tan\alpha+\tan\beta=\frac{5}{2}$，$\tan\alpha\tan\beta=\frac{1}{2}$

(1) $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{\frac{5}{2}}{1-\frac{1}{2}}=5$

(2) $\cos^2(\alpha+\beta)=\dfrac{1}{\sec^2(\alpha+\beta)}=\dfrac{1}{1+\tan^2(\alpha+\beta)}=\dfrac{1}{1+5^2}=\dfrac{1}{26}$

(3) $3\sin^2(\alpha+\beta)-5\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+2\cos^2(\alpha+\beta)$

$=\cos^2(\alpha+\beta)[\dfrac{3\sin^2(\alpha+\beta)}{\cos^2(\alpha+\beta)}-5\dfrac{\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)}{\cos^2(\alpha+\beta)}+2\dfrac{\cos^2(\alpha+\beta)}{\cos^2(\alpha+\beta)}]$

$=\cos^2(\alpha+\beta)[3\tan^2(\alpha+\beta)-5\tan(\alpha+\beta)+2]=\dfrac{1}{26}(3\times5^2-5\times5+2)$

$=\dfrac{1}{26}(75-25+2)$

$=\dfrac{52}{26}$

$=2$