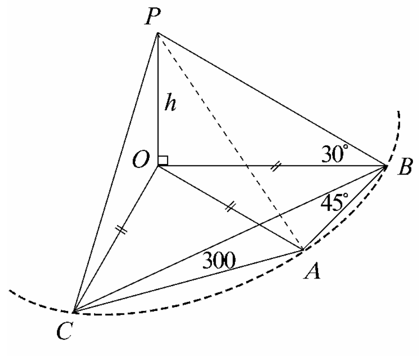
高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：96.05.10					
範圍	2-6 測量	班級	普一　　班	姓名	
		座號			

一、填充題每題(10 分)



1. 從平地上 A，B，C 三點測得新光大樓樓頂之仰角均為 $30°$。若 $\angle ABC = 45°$，而 $\overline{AC} = 300$ 公尺，則此大樓的高為__________公尺。

【解答】$50\sqrt{6}$ 公尺

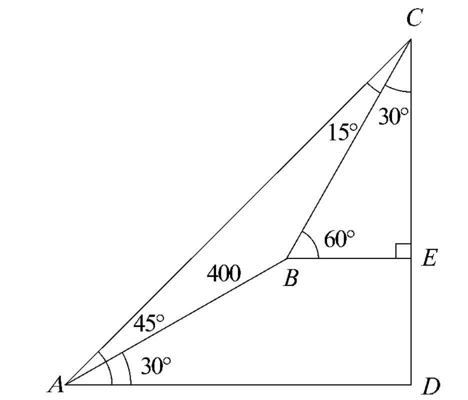
【詳解】

從 A，B，C 三點測得樓頂之仰角均為 $30°$

$\Rightarrow$ 如圖：$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$ 且 A，B，C 共圓

設 $\overline{OP} = h \Rightarrow \overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \sqrt{3}\,h$

於△ABC 中，$\overline{AC} = 2R\sin 45°$，$R = \overline{OA} \Rightarrow 300 = 2 \cdot \sqrt{3}\,h \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow h = 50\sqrt{6}$



2. 某人於山麓測得山頂的仰角 $45°$，由山麓循 $30°$斜坡上行 400 公尺，再測得山頂的仰角 $60°$，則山高為______公尺。

【解答】$200(\sqrt{3}+1)$

【詳解】

如右圖，在△ABC 中 $\because$ $\angle CAB = 45° - 30° = 15°$，

$\angle ACB = \angle ACD - \angle BCE = 45° - 30° = 15°$

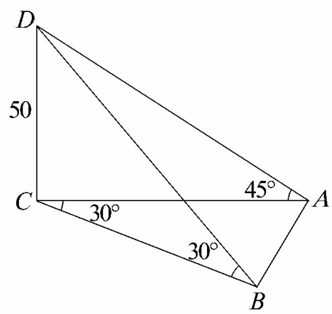
故得$\angle ABC = 150°$，所以由正弦定理可得

$$\frac{\overline{AC}}{\sin 150°} = \frac{\overline{AB}}{\sin 15°} \Rightarrow \overline{AC} = \frac{400 \cdot \sin 150°}{\sin 15°}$$

在△ACD 中，$\overline{CD} = \overline{AC}\sin 45°$

$$= \frac{400 \cdot \sin 150° \cdot \sin 45°}{\sin 15°} = \frac{400 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}} = 200(\sqrt{3}+1)$$

故所求山高為 $200(\sqrt{3}+1)$公尺



3. 在山頂測得地面上石頭 A 的俯角為 $45°$，向右轉 $30°$，再測得地面上石頭 B 的俯角為 $30°$，已知山高為 50 公尺，則 $\overline{AB}$ =________公尺。

【解答】50

【詳解】

由 D 測 A 的俯角為 $45° \Rightarrow$ 由 A 測 D 的仰角為 $45°$

由 D 測 B 的俯角為 $30° \Rightarrow$ 由 B 測 D 的仰角為 $30°$

在 D 測 A 俯角後，向右轉 $30°$，$\therefore \angle ACB = 30°$，$\therefore$ $\overline{AC} = 50$，$\overline{BC} = 50\sqrt{3}$

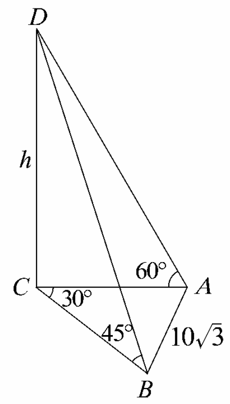
由餘弦定理 $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 - 2\,\overline{BC} \cdot \overline{AC}\cos\angle ACB$

$= 50^2 + (50\sqrt{3})^2 - 2(50)(50\sqrt{3}) \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 50^2 \Rightarrow \overline{AB} = 50$

4. 一塔高爲 h，石頭 A 在塔的正東，石頭 B 在塔的東 30°南，一人從塔頂測得石頭 A 的俯角爲 60°，石頭 B 之俯角爲 45°，若 $\overline{AB}=10\sqrt{3}$ 公尺，則塔高 $h=$ ＿＿＿＿＿公尺。

【解答】30

【詳解】



由 D 測 A 的俯角爲 60° $\Rightarrow$ 由 A 測 D 的仰角爲 60°

由 D 測 B 的俯角爲 45° $\Rightarrow$ 由 B 測 D 的仰角爲 45°

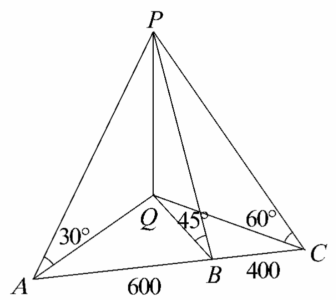
$\therefore\ \overline{BC}=h$，$\overline{AC}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}h$，$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2-2\overline{AC}\cdot\overline{BC}\cos30°$

$\Rightarrow 300=h^2+\dfrac{1}{3}h^2-2\cdot h\cdot\dfrac{h}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1}{3}h^2\quad\Rightarrow h^2=900\quad\Rightarrow h=30$（公尺）

5. 由地面上共線三點 A，B，C 測得一塔頂 P 的仰角各爲 30°，45°，60°，已知塔基 Q 與 A，B，C 不共線，且 $\overline{AB}=600$ 公尺，$\overline{BC}=400$ 公尺，則山高 $\overline{PQ}$ 爲＿＿＿＿＿公尺。

【解答】$200\sqrt{15}$

【詳解】



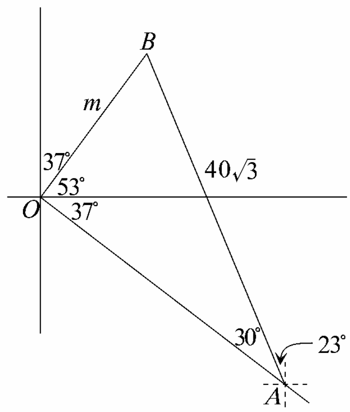
令 $\overline{PQ}=h\quad\therefore\quad\overline{AQ}=\sqrt{3}h$，$\overline{BQ}=h$，$\overline{CQ}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}h$

在△ABQ 及△ACQ 中，$\cos\angle QAB$

$=\dfrac{600^2+(\sqrt{3}h)^2-h^2}{2\times600\times\sqrt{3}h}=\dfrac{1000^2+(\sqrt{3}h)^2-(\frac{1}{\sqrt{3}}h)^2}{2\times1000\times\sqrt{3}h}$

$\Rightarrow 5(360000+3h^2-h^2)=3(10^6+3h^2-\dfrac{1}{3}h^2)\Rightarrow h=200\sqrt{15}$ 公尺

6. 某船以每小時 20 公里之速度向南 53°東航行，於上午十時測得燈塔之方向爲北 37°東，此時船與燈塔之距離爲 m 公里，至同日 t 時，測得該塔之方向爲北 23°西，此時船與燈塔之距離爲 $40\sqrt{3}$ 公里，則 $m=$ ＿＿＿公里，而 $t=$ ＿＿＿＿時。



【解答】$20\sqrt{3}$；13

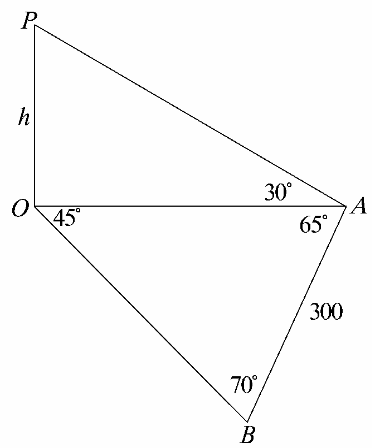
【詳解】

如圖：$\angle AOB=37°+53°=90°$，$\angle OAB=53°-23°=30°$

在△OAB 中，$\sin30°=\dfrac{\overline{OB}}{\overline{AB}}\quad\Rightarrow\quad\dfrac{1}{2}=\dfrac{m}{40\sqrt{3}}\quad\Rightarrow\quad m=20\sqrt{3}$

$\overline{OA}=60\quad\Rightarrow\quad t=10+\dfrac{60}{20}=13$，即爲下午 1 時

7. 平面上有 A，B 兩點，A 在塔的正東，B 在塔的東南且在 A 的南 25°西 300 公尺處，在 A 測得塔頂的仰角爲 30°，則塔高爲＿＿公尺。（但 $\sin70°=0.9397$，$\sin45°=0.7071$，$\sqrt{3}=1.732$；塔高小數點以下完全捨去。）



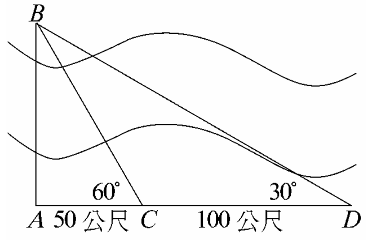
【解答】231 公尺

【詳解】

如圖：塔 $\overline{OP}$ 之高度爲 h 公尺，$\angle AOB=45°$，$\angle OAB=65°\quad\Rightarrow\quad\angle OBA=70°$

$\overline{AB}=300$，由正弦定理（$\triangle OAB$），$\dfrac{\sin 45°}{300}=\dfrac{\sin 70°}{\overline{OA}}$ $\Rightarrow$ $\overline{OA}=\dfrac{300\sin 70°}{\sin 45°}$

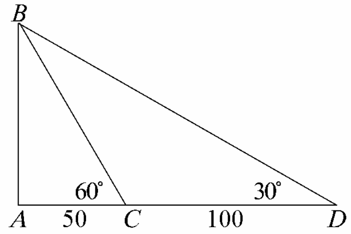
$\Rightarrow$ $h=\overline{OA}\tan 30°=\dfrac{300\sin 70°}{\sqrt{3}\sin 45°}=\dfrac{300\times 0.9397}{1.732\times 0.7071}\doteqdot 231$（公尺）



8. 如圖，A，B 兩點分別位於一河口的兩岸邊。某人在通往 A 點的筆直公路上，距離 A 點 50 公尺的 C 點與距離 A 點 150 公尺的 D 點，分別測得 $\angle ACB=60°$，$\angle ADB=30°$，則 A 與 B 的距離爲__________公尺。

【解答】$50\sqrt{3}$

【詳解】



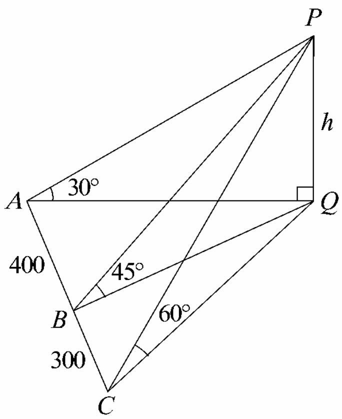
$\angle ACB=60°$，$\angle ADB=30°$ $\Rightarrow$ $\overline{BC}=\overline{CD}=100$

在$\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=\overline{BC}\sin 60°=100\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=50\sqrt{3}$

9. 從地面一直線上三點 A，B，C 測得一山頂之仰角分別爲 30°，45°，60°（山頂之垂足與 A，B，C 不共線）且 $\overline{AB}=400$ 公尺，$\overline{BC}=300$ 公尺，求山高 = __________公尺。

【解答】$60\sqrt{70}$ 公尺

【詳解】



令 $\overline{PQ}=h$

$\because$ $\overline{AQ}=h\cot 30°=\sqrt{3}\,h$，$\overline{BQ}=h$，$\overline{CQ}=h\cot 60°=\dfrac{1}{\sqrt{3}}h$

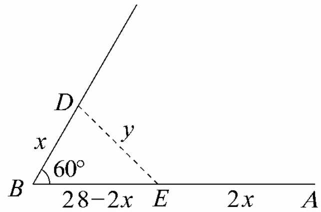
令 $\angle ABQ=\alpha$，$\angle CBQ=180°-\alpha$

在$\triangle ABQ$ 中，$(\sqrt{3}\,h)^2=400^2+h^2-2\cdot 400\cdot h\cdot\cos\alpha\Rightarrow 3h^2=400^2+h^2-800h\cos\alpha$ ……①

在$\triangle CBQ$ 中，$(\dfrac{h}{\sqrt{3}})^2=300^2+h^2-2\cdot 300\cdot h\cdot\cos(180°-\alpha)$

$\Rightarrow$ $\dfrac{h^2}{3}=300^2+h^2+600h\cos\alpha$ ……②

①$\times 3+$②$\times 4$ $\Rightarrow$ $h=60\sqrt{70}$



10.A，B 兩鎮相距 28 公里，道路 $\overrightarrow{BA}$，$\overrightarrow{BC}$ 夾角爲 60°，若甲由 B 沿 $\overrightarrow{BC}$ 方向行走，乙同時由 A 以甲二倍速率沿 $\overrightarrow{AB}$ 方向行走，當甲，乙相距最近時，甲走了__________公里。

【解答】10

【詳解】

如上圖，設甲走 x 公里到 D，乙走 $2x$ 公尺到 E 時，$\overline{DE}=y$ 最小 $\therefore$ $\overline{BE}=28-2x$

在$\triangle BDE$ 中，利用餘弦定理

$y^2=x^2+(28-2x)^2-2\cdot x(28-2x)\cdot\cos 60°=7x^2-140x+784=7(x-10)^2+84\geq 84$

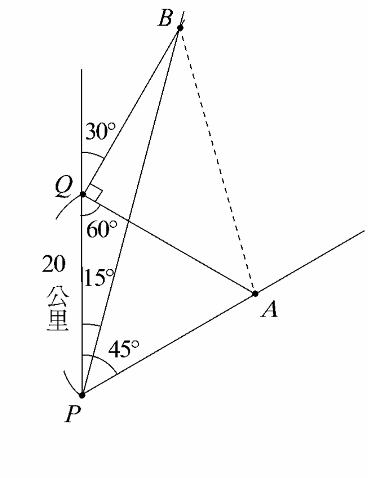
$\therefore$ 當 $x=10$ 時，$\overline{DE}=y$ 有最小值，即甲走 10 公里時，甲乙兩人最接近

11.有一船自定點 P 往正北方向航行，在其右側發現有二燈塔 A 與 B，經測量其方位「A 在北 45°東，B 在北 15°東」，該船行駛 20 公里到達 Q 點後，再測得二燈塔方位「A 在南 60°東，B 在北 30°東」，試求：

(1)點 Q 與燈塔 A 的距離。__________公里　(2)兩燈塔的距離。__________公里

【解答】(1) $20(\sqrt{3}-1)$公里　(2) $20\sqrt{5-2\sqrt{3}}$ 公里

【詳解】



(1) 在$\triangle APQ$ 中，$\angle APQ = 45°$，$\angle AQP = 60°$，

$\angle QAP = 180° - 45° - 60° = 75°$，$\overline{PQ} = 20$

由正弦定理知$\dfrac{\overline{AQ}}{\sin 45°} = \dfrac{\overline{PQ}}{\sin 75°}$　$\Rightarrow$

$$\overline{AQ} = \frac{\overline{PQ}\cdot\sin 45°}{\sin 75°} = \frac{20\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} = 20(\sqrt{3}-1)$$

故點 Q 與燈塔 A 的距離爲 $20(\sqrt{3}-1)$公里

(2)在$\triangle BPQ$ 中

$\because \angle QPB = 15°$，$\angle BQP = 150°$　$\therefore$　$\angle QBP = 180° - 15° - 150° = 15°$，故得 $\overline{BQ} = \overline{PQ} = 20$

在$\triangle ABQ$ 中　$\because$　$\overline{AQ} = 20(\sqrt{3}-1)$，$\overline{BQ} = 20$，而$\angle AQB = 90°$

故由餘弦定理知 $\overline{AB}^2 = \overline{AQ}^2 + \overline{BQ}^2 - 2\overline{AQ}\cdot\overline{BQ}\cdot\cos 90°$

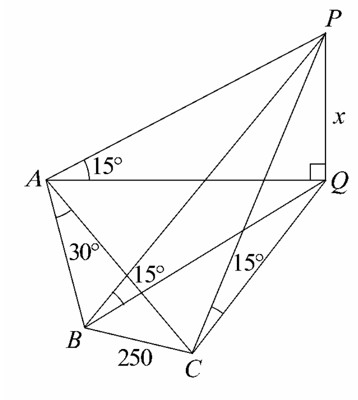
$= [20(\sqrt{3}-1)]^2 + 20^2 - 2\cdot 20(\sqrt{3}-1)\cdot 20\cdot 0 = 400(5-2\sqrt{3})$

$\therefore$　$\overline{AB} = 20\sqrt{5-2\sqrt{3}}$，即兩燈塔的距離爲 $20\sqrt{5-2\sqrt{3}}$ 公里

12.從平地上 A，B，C 三點測某山頂之仰角均爲 15°，若$\angle BAC = 30°$，$\overline{BC} = 250$ 公尺，求 A 到山基底的距離__________公尺及山高__________公尺。

【解答】A 到山基底距離爲 250 公尺，山高 $250(2-\sqrt{3})$公尺

【詳解】



設山高 $\overline{PQ} = x$ 公尺　$\Rightarrow$　$\overline{AQ} = \overline{PQ}\cot 15° = (2+\sqrt{3})x$

從 A，B，C 三點測山頂之仰角都一樣

$\therefore$　$\overline{AQ} = \overline{BQ} = \overline{CQ}$，即 Q 爲$\triangle ABC$ 之外心

$\therefore$　$\overline{AQ}$ 爲$\triangle ABC$ 之外接圓半徑　$\Rightarrow$　$\overline{AQ} = R$

正弦定理 $\dfrac{250}{\sin 30°} = 2R$　$\Rightarrow R = 250$　$\therefore (2+\sqrt{3})x = 250$

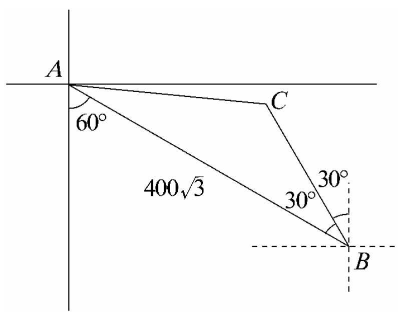
$\Rightarrow x = 250(2-\sqrt{3})$

故 A 到山基底距離爲 250 公尺，山高爲 $250(2-\sqrt{3})$公尺

13.氣象預報一颱風中心在 A 地東 30°南的海面上 B 處，以每小時 60 公里的速率向北 30°西方向直線前進，暴風半徑爲 $80\sqrt{21}$ 公里，且 A，B 相距 $400\sqrt{3}$ 公里，預估幾小時後 A 地進入暴風圈？_________小時；又颱風將在 A 地滯留幾小時？_________小時

【解答】8 小時後 A 地進入暴風圈，滯留 4 小時

【詳解】



設 t 小時後，颱風中心到達 C，

則 $\overline{BC} = 60t$，$\overline{AB} = 400\sqrt{3}$，$\angle ABC = 30°$

$\therefore \overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AB}\cdot\overline{BC}\cos 30°$

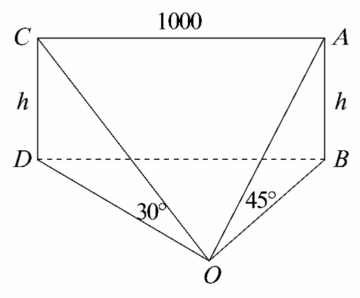
$= 480000 + 3600t^2 - 72000t$

令 $\overline{AC} = 80\sqrt{21}$，則 $480000 + 3600t^2 - 72000t = 134400$

$\Rightarrow \quad t^2-20t+96=0 \quad \Rightarrow \quad (t-8)(t-12)=0 \quad \Rightarrow \quad t=8$ 或 $t=12$

故 8 小時後 A 地進入暴風圈，12 小時後脫離暴風圈，共滯留了 4 小時

14.某人在一飛機的正南方見其仰角爲 45°，若此飛機平行地面向西飛行 1000 公尺後，在原地測得其仰角爲 30°，求飛機的高度。＿＿＿＿＿＿＿＿



【解答】$500\sqrt{2}$ 公尺

【詳解】 如上圖，

令飛機由 A 平行地面向西飛 1000 公尺至 C，其高度爲 h 公尺。

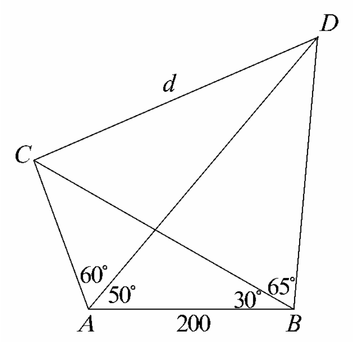
在△OBD 中，$\angle OBD=90°$，$\overline{OB}=h$，$\overline{OD}=h\cot 30°=\sqrt{3}\,h$

故由畢氏定理知：$\overline{OD}^2=\overline{OB}^2+\overline{BD}^2 \quad \Rightarrow \quad (\sqrt{3}\,h)^2=h^2+1000^2$

$\therefore \quad 2h^2=1000^2 \quad \therefore \quad h=500\sqrt{2}$，故飛行的高度爲 $500\sqrt{2}$ 公尺

15.在河同一岸邊的兩點 A，B 測得對岸二點 C，D，得 $\angle CAD=60°$，$\angle DAB=50°$，$\angle CBA=30°$，$\angle DBC=65°$，且 $\overline{AB}=200$ 公尺，試求 C，D 兩點間的距離。

θ	5°	35°	40°
$\sin\theta$	0.0872	0.5736	0.6428
$\cos\theta$	0.9962	0.8192	0.7660



【解答】301.4 公尺

【詳解】

在△ABC 中，$\angle ACB=180°-140°=40°$，

正弦定理 $\dfrac{\sin 30°}{\overline{AC}}=\dfrac{\sin 40°}{200} \quad \Rightarrow \quad \overline{AC}=\dfrac{100}{\sin 40°}$

在△ABD 中，$\angle ADB=180°-145°=35°$

由正弦定理，$\dfrac{\sin 95°}{\overline{AD}}=\dfrac{\sin 35°}{200} \quad \Rightarrow \quad \overline{AD}=\dfrac{200\sin 95°}{\sin 35°}=\dfrac{200\cos 5°}{\sin 35°}$

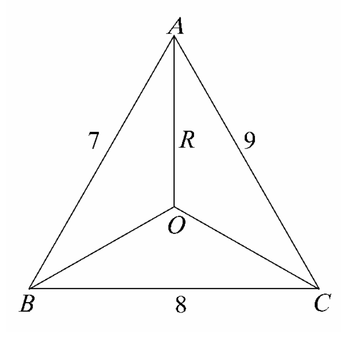
設 $\overline{CD}=d$，在△ACD 中，由餘弦定理知

$$d^2=\overline{AC}^2+\overline{AD}^2-2\,\overline{AC}\cdot\overline{AD}\cdot\cos 60°=\frac{100^2}{\sin^2 40°}+\frac{200^2\cdot\cos^2 5°}{\sin^2 35°}-\frac{100^2\cdot 2\cdot\cos 5°}{\sin 40°\sin 35°}$$

$$=100^2\left[\frac{(0.5736)^2+4(0.6428)^2(0.9962)^2-2(0.9962)(0.6428)(0.5736)}{(0.6428\times 0.5736)^2}\right]$$

$=100^2\times 90823.455$（利用計算器） $\Rightarrow \quad d \doteqdot 301.4$

16.市郊有甲、乙、丙三家，兩兩相距 70 公尺、80 公尺、90 公尺，今計畫公設一井，使此井到三家必須等距，試求此距離。



【解答】$21\sqrt{5}$ 公尺

【詳解】

如圖：所求爲△ABC 之外接圓半徑 R，由餘弦定理知

$$\cos B=\frac{70^2+80^2-90^2}{2\cdot 70\cdot 80}=\frac{2}{7}$$

$$\Rightarrow \quad \sin B=\frac{3\sqrt{5}}{7}=\frac{90}{2R} \quad \Rightarrow \quad R=21\sqrt{5}$$