高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：96.05.24					
範圍	2-6,3-1 測量、弧度	班級	普一　　班	姓名	
		座號			

一、選擇題(每題 5 分)

1. 下列哪一個正切函數值最大？

(A) $\tan(-\frac{26\pi}{11})$ (B) $\tan(-\frac{7\pi}{11})$ (C) $\tan\frac{3\pi}{11}$ (D) $\tan\frac{13\pi}{11}$ (E) $\tan\frac{23\pi}{11}$

【解答】(B)

【詳解】

$\tan(-\frac{26\pi}{11}) = -\tan\frac{26\pi}{11} = -\tan(2\pi+\frac{4\pi}{11}) = -\tan\frac{4\pi}{11}$，

$\tan(-\frac{7\pi}{11}) = -\tan\frac{7\pi}{11} = -\tan(\pi-\frac{4\pi}{11}) = \tan\frac{4\pi}{11}$，

$\tan\frac{13\pi}{11} = \tan(\pi+\frac{2\pi}{11}) = \tan\frac{2\pi}{11}$，

$\tan\frac{23\pi}{11} = \tan(2\pi+\frac{2\pi}{11}) = \tan\frac{\pi}{11}$

$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$時，$\tan x$ 為遞增函數，$-\tan\frac{4\pi}{11} < 0 < \tan\frac{\pi}{11} < \tan\frac{2\pi}{11} < \tan\frac{3\pi}{11} < \tan\frac{4\pi}{11}$

即 $\tan(-\frac{26\pi}{11}) < \tan\frac{23\pi}{11} < \tan\frac{13\pi}{11} < \tan\frac{3\pi}{11} < \tan(-\frac{7\pi}{11})$，故 $\tan(-\frac{7\pi}{11})$最大

2. 設 $a=\cos1$，$b=\sin2$，$c=\tan3$，$d=\csc4$，$e=\sec5$，其中最大的數為

(A) a (B) b (C) c (D) d (E) e

【解答】(E)

【詳解】

$a=\cos1=\cos57.3^\circ<1$

$b=\sin2=\sin114.6^\circ=\cos24.6^\circ<1$

$c=\tan3=\tan171.9^\circ=-\tan8.1^\circ<0$

$d=\csc4=\csc229.2^\circ=-\csc49.2^\circ<0$

$e=\sec5=\sec286.5^\circ=\csc16.5^\circ>1$

∴ 最大為 e，應選(E)

3. 點 $P(\cos100$，$\sin100)$在

(A)第一象限 (B)第二象限 (C)第三象限 (D)第四象限 (E)坐標軸 上

【解答】(D)

【詳解】

100 弳(弧度) ≒ $100\times57^\circ17'45''=5700^\circ1700'4500''=5700^\circ1775'$

$=5729^\circ35'=360^\circ\times15+329^\circ35'$

∴ 100 弳(弧度)在第四象限 ⇒ $\cos100>0$，$\sin100<0$，$P(\cos100$，$\sin100)$在第四象限

4. $a=\cos1$，則下列敘述何者正確？

(A) $0\le a<0.2$ (B) $0.2\le a<0.4$ (C) $0.4\le a<0.6$ (D) $0.6\le a<0.8$ (E) $0.8\le a<1$

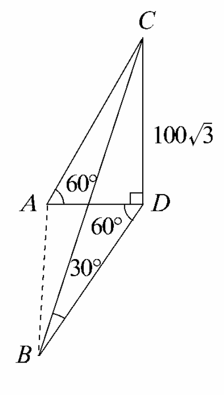
【解答】(C)

【詳解】

$\because$ 1 弧度 $=\dfrac{180°}{\pi} \doteqdot 57.3° \Rightarrow \cos 60° < \cos 1 < \cos 45° \Rightarrow \dfrac{1}{2} < \cos 1 < \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 0.5 < \cos 1 < 0.7$

二、填充題每題(10 分)

1. 有一塔高 $100\sqrt{3}$ 公尺，樹A在塔的正西方，樹B在塔的西 60°南，某人自塔頂測得樹A，樹B之俯角分別為 60°與 30°，則A，B的距離為____公尺。



【解答】$100\sqrt{7}$

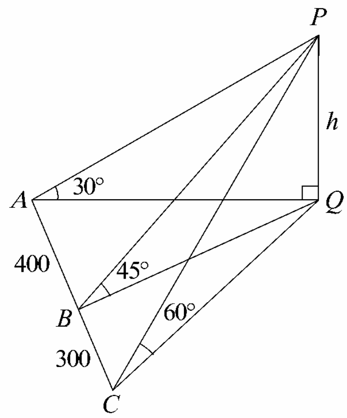
【詳解】

$\overline{DA} = \overline{CD}\cot 60° = 100\sqrt{3}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}} = 100$，$\overline{DB} = \overline{CD}\cot 30° = 100\sqrt{3}\cdot\sqrt{3} = 300$

$\overline{AB}^2 = \overline{DA}^2 + \overline{DB}^2 - 2\,\overline{DA}\cdot\overline{DB}\cos 60°$

$= 100^2 + 300^2 - 2\cdot 100\cdot 300\cdot\dfrac{1}{2} = 70000$，$\therefore\ \overline{AB} = 100\sqrt{7}$

2. 從地面一直線上三點A，B，C測得一山頂之仰角分別為 30°，45°，60°（山頂之垂足與A，B，C不共線）且 $\overline{AB} = 400$ 公尺，$\overline{BC} = 300$ 公尺，求山高 $=$ __________公尺。



【解答】$60\sqrt{70}$ 公尺

【詳解】

令 $\overline{PQ} = h$ $\because$ $\overline{AQ} = h\cot 30° = \sqrt{3}\,h$，$\overline{BQ} = h$，

$\overline{CQ} = h\cot 60° = \dfrac{1}{\sqrt{3}}h$

令 $\angle ABQ = \alpha$，$\angle CBQ = 180° - \alpha$

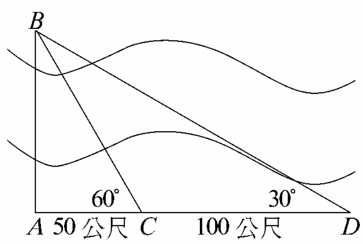
在△ABQ中，$(\sqrt{3}\,h)^2 = 400^2 + h^2 - 2\cdot 400\cdot h\cdot\cos\alpha$

$\Rightarrow\ 3h^2 = 400^2 + h^2 - 800h\cos\alpha$ ……①

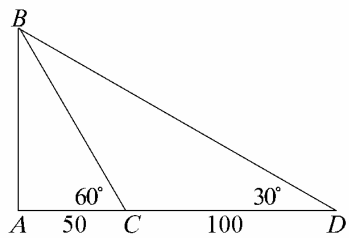
在△CBQ中，$(\dfrac{h}{\sqrt{3}})^2 = 300^2 + h^2 - 2\cdot 300\cdot h\cdot\cos(180° - \alpha)$

$\Rightarrow\ \dfrac{h^2}{3} = 300^2 + h^2 + 600h\cos\alpha$ ……②

① × 3 + ② × 4 $\Rightarrow$ $h = 60\sqrt{70}$



3. 如右上圖，A，B兩點分別位於一河口的兩岸邊。某人在通往A點的筆直公路上，距離A點 50 公尺的C點與距離A點 150 公尺的D點，分別測得 $\angle ACB = 60°$，$\angle ADB = 30°$，則A與B的距離為__________公尺。



【解答】$50\sqrt{3}$

【詳解】 $\angle ACB = 60°$，$\angle ADB = 30°$ $\Rightarrow$ $\overline{BC} = \overline{CD} = 100$

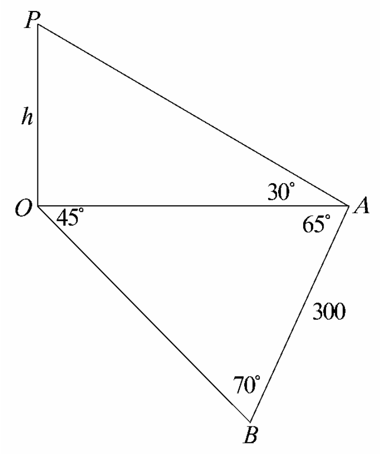
在△ABC 中，

$\overline{AB}^2 = 100^2 + 100^2 - 2\times 100\times 100\times\cos 60° = 7500 \Rightarrow \overline{AB} = 50\sqrt{3}$

4. 平面上有A，B兩點，A在塔的正東，B在塔的東南且在A的南 25°西 300 公尺處，在A測得塔頂的仰角為 30°，則塔高為__________公尺。（但$\sin 70° = 0.9397$，$\sin 45° = 0.7071$，$\sqrt{3} = 1.732$；塔高小數點以下完全捨去。）

【解答】231 公尺

【詳解】



如圖：塔 $\overline{OP}$ 之高度為 h 公尺，$\angle AOB = 45°$，$\angle OAB = 65°$

$\Rightarrow \quad \angle OBA = 70°$，$\overline{AB} = 300$，

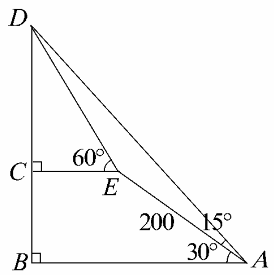
正弦定理，$\dfrac{300}{\sin 45°} = \dfrac{\overline{OA}}{\sin 70°} \quad \Rightarrow \quad \overline{OA} = \dfrac{300\sin 70°}{\sin 45°}$

$\Rightarrow \quad h = \dfrac{\overline{OA}}{\sqrt{3}} = \dfrac{300\sin 70°}{\sqrt{3}\sin 45°} = \dfrac{300\times 0.9397}{1.732\times 0.7071} \doteqdot 231$（公尺）

5. 甲生在山麓測得山頂的仰角為 $45°$，由此山麓循 $30°$ 斜坡上行 200 公尺，再測得山頂的仰角為 $60°$，則山高為＿＿＿＿＿＿公尺。

【解答】$100(\sqrt{3}+1)$

【詳解】



設 $\overline{BD} = h \quad \therefore \quad \overline{AD} = \sqrt{2}\,h$

$\because \quad \angle CED = 60°$，$\angle CEA = 150° \quad \therefore \quad \angle AED = 150°$

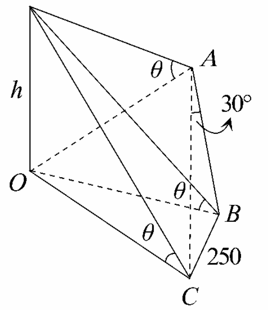
$\Rightarrow \quad \angle ADE = 15° \quad \therefore \quad \overline{DE} = \overline{AE} = 200$

$(\sqrt{2}h)^2 = 200^2 + 200^2 - 2\times 200\times 200\times \cos 150° \Rightarrow h = 100(\sqrt{3}+1)$ 公尺

6. 自平面上三點 A、B、C 測得某山頂之仰角均為 θ，若 $\angle BAC = 30°$，$\cot\theta = 2$，$\overline{BC} = 250$ 公尺，則山高為＿＿＿＿＿＿公尺。

【解答】125

【詳解】

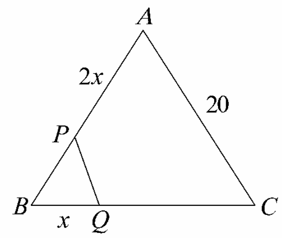


$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = h\cot\theta = 2h$

$\therefore \quad A$，B，C 在以 O 為圓心，$2h$ 為半徑之圓上

$\therefore \quad 2h = \dfrac{250}{2\sin 30°} \quad \Rightarrow \quad h = 125$

7. 正△ABC 之邊長為 20，動點 P 自 A 往 B 移動，Q 點自 B 往 C 移動，若 P 之速度為 Q 之兩倍，求 $\overline{PQ}$ 之最小值＿＿＿＿＿＿。



【解答】$\dfrac{10\sqrt{21}}{7}$

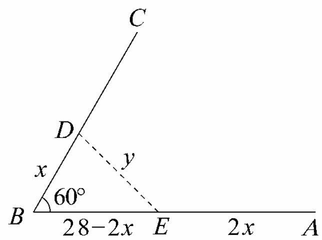
【詳解】

設 x 小時後，$\overline{PQ}$ 之值為 $\sqrt{(20-2x)^2 + x^2 - 2(20-2x)x\cdot\cos 60°}$

$= \sqrt{400 - 80x + 4x^2 + x^2 - 20x + 2x^2} = \sqrt{7x^2 - 100x + 400} = \sqrt{7(x - \dfrac{50}{7})^2 + \dfrac{300}{7}} \geq \dfrac{10\sqrt{21}}{7}$

$\therefore \quad \overline{PQ}$ 之最小值為 $\dfrac{10\sqrt{21}}{7}$

8. A，B 兩鎮相距 28 公里，道路 $\overrightarrow{BA}$，$\overrightarrow{BC}$ 夾角為 $60°$，若甲由 B 沿 $\overrightarrow{BC}$ 方向行走，乙同時由 A 以甲二倍速率沿 $\overrightarrow{AB}$ 方向行走，當甲，乙相距最近時，甲走了＿＿＿＿＿＿公里。



【解答】10

【詳解】

如上圖，設甲走 x 公里到 D，乙走 $2x$ 公尺到 E 時，$\overline{DE} = y$ 最小 $\quad \therefore \quad \overline{BE} = 28 - 2x$

在△BDE 中，利用餘弦定理

$y^2 = x^2 + (28-2x)^2 - 2\cdot x(28-2x)\cdot\cos 60° = 7x^2 - 140x + 784 = 7(x-10)^2 + 84 \geq 84$

∴　當$x = 10$時，$\overline{DE} = y$有最小值，即甲走 10 公里時，甲乙兩人最接近

9. $\dfrac{\sin(-\theta)}{\sin(\pi+\theta)} - \dfrac{\tan(\frac{3\pi}{2}+\theta)}{\cot(\pi+\theta)} - \dfrac{\cos(-\theta)}{\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)} =$ ＿＿＿＿＿＿。

【解答】1

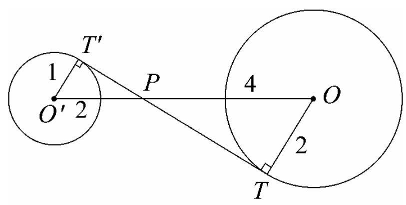
【詳解】原式 $= \dfrac{-\sin\theta}{-\sin\theta} - \dfrac{-\cot\theta}{\cot\theta} - \dfrac{\cos\theta}{\cos\theta} = 1 + 1 - 1 = 1$

10.設$\tan 10 = a$，則$\cos 10 =$＿＿＿＿＿＿。

【解答】$-\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}$

【詳解】$10 = 57.3°\times 10 = 573°$，在第三象限，$\tan 10 = a \Rightarrow \cos 10 = -\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}$

11.二輪半徑分別爲 1 與 2，輪心距爲 6，今以一皮帶交叉繞此二輪以相反方向旋轉，求此皮帶長 = ＿＿＿＿＿＿。



【解答】$4\pi + 6\sqrt{3}$

【詳解】

$\overline{OP}$：$\overline{PO'} = \overline{OT}$：$\overline{OT'} = 2$：$1$　∴　$\overline{OP} = 4$，$\overline{PO'} = 2$

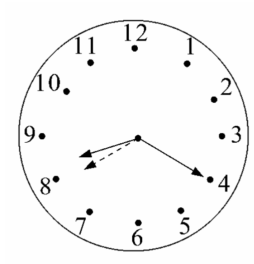
∴　$\angle TOP = \dfrac{\pi}{3}$，同理$\angle T'O'P = \dfrac{\pi}{3}$

∴　內公切線 $\overline{TT'} = \sqrt{6^2 - (2+1)^2} = \sqrt{36-9} = 3\sqrt{3}$

∴　皮帶 $= 2 \cdot \dfrac{4\pi}{3} + 1 \cdot \dfrac{4\pi}{3} + 2 \cdot 3\sqrt{3} = 4\pi + 6\sqrt{3}$

12.鐘面上，8 點 20 分時，時針與分針的銳夾角

(1)度數爲 = ＿＿＿＿＿。(2)換算成弧度爲=＿＿＿＿＿＿。



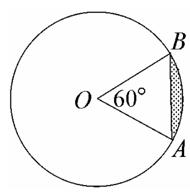
【解答】(1) 130°　(2)$\dfrac{13}{18}\pi$

【詳解】

分針走 20 分格，那麼時針走 $20 \times \dfrac{1}{12}$分格 = $\dfrac{5}{3}$分格

時鐘在 8 點 20 分時，時針與分針夾$[(40 + \dfrac{5}{3}) - 20] \times 6° = 130° = 130 \times \dfrac{\pi}{180} = \dfrac{13}{18}\pi$ 弧度

13.如圖，圓C的圓心爲O，半徑爲 1，$\angle AOB = 60°$，則陰影部分的面積爲＿＿。



【解答】$\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\sqrt{3}}{4}$

【詳解】∵　$\angle AOB = 60° = \dfrac{\pi}{3}$，半徑$r = 1$

∴陰影的面積= (扇形OAB面積) − (正三角形OAB的面積) $= \dfrac{1}{2} \times 1^2 \times \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{4} \times 1^2 = \dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\sqrt{3}}{4}$

14. (1)$216° =$ ＿＿＿＿＿＿弧度。(2)$\dfrac{13\pi}{12} =$＿＿＿＿＿＿度。

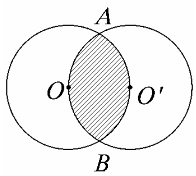
【解答】(1)$\dfrac{6}{5}\pi$　(2) 195

【詳解】

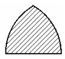
(1) $\because\ \ 1^\circ=\dfrac{\pi}{180}$（弧度） $\therefore\ \ 216^\circ=216\times\dfrac{\pi}{180}=\dfrac{6}{5}\pi$

(2) $\because\ \ 1$（弧度）$=\dfrac{180^\circ}{\pi}$ $\therefore\ \ \dfrac{13\pi}{12}=\dfrac{13\pi}{12}\times(\dfrac{180}{\pi})^\circ=195^\circ$

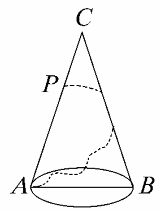
15.如下圖所示，兩單位圓（半徑爲 1）相交於A，B且互過圓心，求斜線部分面積爲 ________ 。



【解答】$\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

【詳解】所求面積 $=2$  $=2(2\cdot\dfrac{1}{2}\cdot1^2\cdot\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{4})=\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

16.如下圖：一直立圓錐之底圓直徑爲 5，斜高$\overline{CA}=\overline{CB}=15$，一螞蟻從$A$點沿著錐面繞行一圈，至$\overline{AC}$邊上之$P$點，若$\overline{CP}=5$，則其最短路徑爲__________ 。

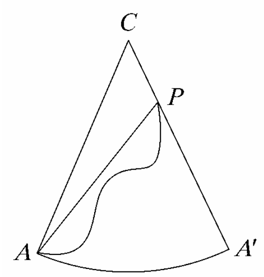


【解答】$5\sqrt{7}$

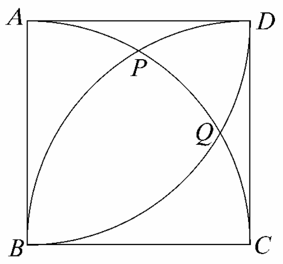
【詳解】

從$\overline{AC}$剪開，展成一扇形，AA'弧長爲 5π $\Rightarrow$ $\angle ACP=60^\circ$

故最短路徑爲$\overline{AP}$，由餘弦定理得$\overline{AP}=5\sqrt{7}$



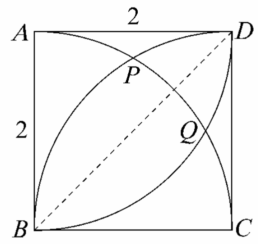
17.正方形$ABCD$邊長爲 2，分別以A，B，C爲圓心，2 爲半徑，在正方形內部作三個圓弧如下圖，則



(1) $\overset{\frown}{BPD}$ 與 $\overset{\frown}{BQD}$ 兩弧圍成眼形區域面積爲 $=$__________ 。

(2) $\overset{\frown}{BP}$，$\overset{\frown}{PC}$ 與 $\overline{BC}$ 圍成區域面積爲 $=$__________ 。

【解答】(1) $2\pi-4$ (2) $\dfrac{4\pi}{3}-\sqrt{3}$



【詳解】

(1)弓形BPD面積 $=$ 扇形$C-\overset{\frown}{BD}$ 面積 $-$ $\triangle BCD$面積

$=\dfrac{1}{2}\cdot2^2\cdot\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{1}{2}\cdot2^2=\pi-2$

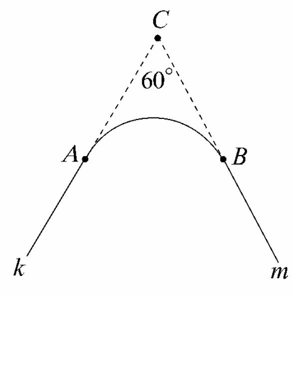
故所求眼形區域面積 $=2(\pi-2)=2\pi-4$

(2)因爲$\overline{BC}=\overline{BP}=\overline{PC}=1$，故$\angle PBC=\angle PCB=\dfrac{\pi}{3}$

故所求區域面積 $=$ 扇形$B-\overset{\frown}{PC}$ $+$ 扇形$C-\overset{\frown}{PB}$ $-$ $\triangle BCP$

$=\dfrac{1}{2}\cdot2^2\cdot\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{1}{2}\cdot2^2\cdot\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{1}{2}\cdot2^2\cdot\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{4\pi}{3}-\sqrt{3}$

18.兩條公路k及m，如果筆直延伸將交會於C處成 60°夾角，如圖所示。爲銜接此二公路，規劃在兩公路各距C處 300 公尺的A，B兩點間開拓成圓弧型公路，使k，m分別在A，B與此圓弧相切，則此圓弧長$=$__________公尺。（公尺以下四捨五入）（$\sqrt{3}\doteqdot1.732$，$\pi\doteqdot3.142$）

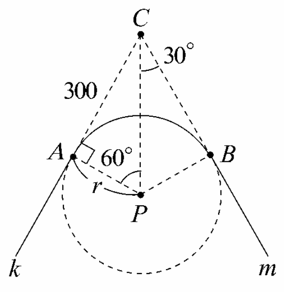


【解答】363

【詳解】

$r=\overline{AP}=\dfrac{300}{\sqrt{3}}=100\sqrt{3}$，$\angle APB=120^\circ=\dfrac{2\pi}{3}$

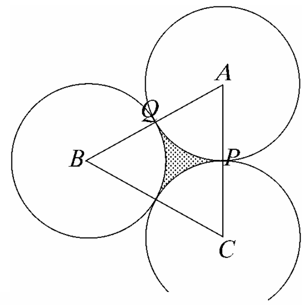
$\therefore\ \ \widehat{AB}=100\sqrt{3}\cdot\dfrac{2\pi}{3}=(\dfrac{200\sqrt{3}}{3})\pi\doteqdot 363$



19.半徑爲1的三個圓互相外切,則此三圓間所圍成的面積爲________。

【解答】$\sqrt{3}-\dfrac{\pi}{2}$

【詳解】



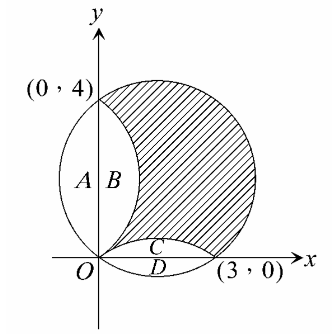
三圓間所圍成的面積就是陰影部分的面積

= (正三角形ABC的面積) − (三個扇形APQ的面積)

$=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2-3\times\dfrac{1}{2}\times 1^2\times\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}-\dfrac{\pi}{2}$

20.如圖，弓形A與B全等，弓形C與D也全等，則斜線部分面積爲____。

【解答】12



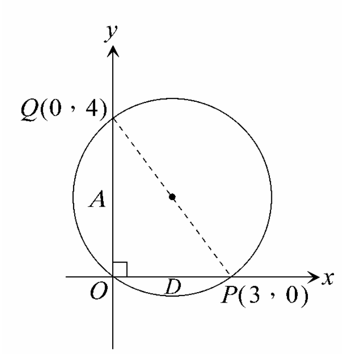
【解一】

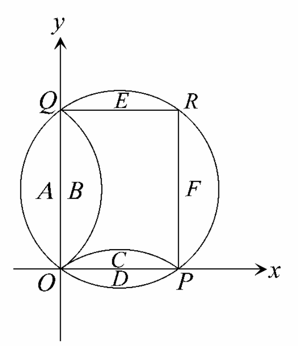
$\overline{PQ}=5$，$\overline{PQ}$爲直徑

弓形A與D的面積和 $=\dfrac{1}{2}\pi(\dfrac{5}{2})^2-\triangle OPQ=\dfrac{25}{8}\pi-6$

斜線部分面積 = 圓面積−弓形A，B，C，D面積

$=\pi(\dfrac{5}{2})^2-2(\dfrac{25}{8}\pi-6)=\dfrac{25}{4}\pi-\dfrac{25}{4}\pi+12=12$





即如上圖　∵　弓形A，B，F面積相同；弓形C，D，E面積相同

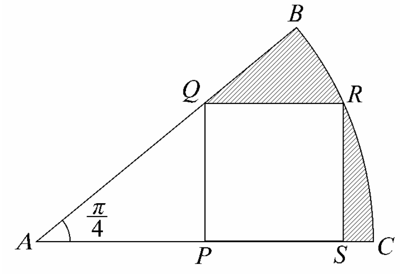
∴　所求斜線部分面積 = 矩形$OPRQ$面積 $=3\times 4=12$

21.下圖扇形A - $\widehat{BC}$，中心角$\angle BAC=\dfrac{\pi}{4}$，半徑$\overline{AB}=\overline{AC}=10$，

$PQRS$爲內接正方形，則

(1)正方形$PQRS$的邊長爲 = ______________。

(2)斜線部分面積爲 = _______________。



【解答】(1) $2\sqrt{5}$　(2) $\dfrac{25\pi}{2}-30$

【詳解】

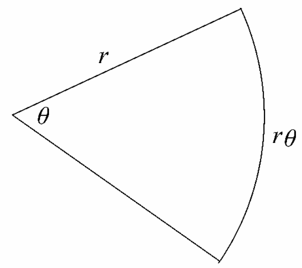
(1)$PQRS$爲正方形，設$\overline{PQ}=\overline{PS}=x$，又$\angle BAC=\dfrac{\pi}{4}$，故$\overline{AP}=x$，在$\triangle ARS$中，因爲$\angle ASR=\dfrac{\pi}{2}$

故$\overline{AR}=\sqrt{\overline{AS}^2+\overline{RS}^2}\quad\Rightarrow\quad 10=\sqrt{(2x)^2+x^2}\quad\Rightarrow\quad x=2\sqrt{5}$

(2)所求斜線面積 ＝ 扇形$A-\overset{\frown}{BC}$面積 － △APQ面積 － 正方形$PQRS$

$$=\frac{1}{2}\cdot 10^2\cdot\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\cdot(2\sqrt{5})^2-(2\sqrt{5})^2=\frac{25\pi}{2}-30$$

22.一扇形周長爲 6，當此扇形有最大面積時，其半徑爲__________，而圓心角爲__________弧度。



【解答】$\frac{3}{2}$；2

【詳解】

設扇形半徑爲r，圓心角爲θ，則弧長爲$r\theta$

∴ 周長 $2r+r\theta=6$，面積$A=\frac{1}{2}r^2\theta$

由$A.M.\geq G.M.$知$\frac{2r+r\theta}{2}\geq\sqrt{2r\cdot r\theta}\Rightarrow\frac{6}{2}\geq\sqrt{2r^2\theta}\Rightarrow 3\geq\sqrt{4A}$，$9\geq 4A\Rightarrow A\leq\frac{9}{4}$

當 $2r=r\theta$時，$A=\frac{9}{4}$爲最大面積，此時$\theta=2$ ∴ $2r+2r=6\Rightarrow r=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$