高雄市明誠中學　高一數學平時測驗　　日期：96.05.03					
範圍	2-5 正、餘弦定理	班級	普一　　　班	姓名	
		座號			

一、選擇題(每題 5 分)

1. $\triangle ABC$ 中，$\overline{BC}=\sqrt{3}$，$\angle B=75°$，$\angle C=45°$，則$\overline{AB}=$

(A) 1　(B) 2　(C) $\sqrt{3}-1$　(D) $\sqrt{2}$　(E) $\sqrt{6}-\sqrt{2}$

【解答】(D)

【詳解】

$\angle A=180°-\angle B-\angle C=60°$

由正弦定理，$\dfrac{\overline{AB}}{\sin C}=\dfrac{\overline{BC}}{\sin A}\Rightarrow\dfrac{\overline{AB}}{\sin 45°}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sin 60°}\quad\Rightarrow\quad\overline{AB}=\sqrt{2}$

2. $\triangle ABC$ 中，$2\cos B\sin C=\sin A$，則$\triangle ABC$ 形狀是

(A)正三角形　(B)直角三角形　(C)等腰三角形　(D)鈍角三角形　(E)等腰直角三角形

【解答】(C)

【詳解】

$\because\quad 2\cos B\sin C=\sin A\quad\therefore\quad 2\cos B=\dfrac{\sin A}{\sin C}=\dfrac{a}{c}$（正弦定理）

$\Rightarrow\quad 2(\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca})=\dfrac{a}{c}\quad\Rightarrow\quad c^2+a^2-b^2=a^2\quad\Rightarrow\quad b=c$

3. 在$\triangle ABC$ 中，$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 之三對邊長分別爲 a，b，c，若滿足 $3(a-b+c)=14(\sin A-\sin B+\sin C)$，則此三角形的外接圓半徑 $R=$

(A)$\dfrac{14}{3}$　(B)$\dfrac{7}{3}$　(C)$\dfrac{3}{14}$　(D)$\dfrac{3}{7}$　(E)21

【解答】(B)

【詳解】

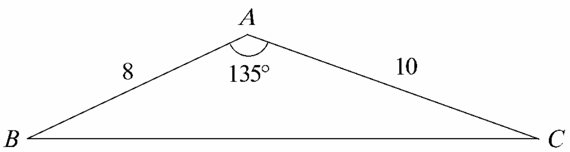
$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R\Rightarrow a=2R\sin A,\quad b=2R\sin B,\quad c=2R\sin C$

$\therefore\quad a-b+c=2R\,(\sin A-\sin B+\sin C)$

$=\dfrac{14}{3}(\sin A-\sin B+\sin C)$，$\therefore\quad R=\dfrac{7}{3}$

4. 在$\triangle ABC$ 中，已知$\overline{AC}=10$，$\overline{AB}=8$，$\angle A=135°$，則$\triangle ABC$ 的面積爲(A) $20\sqrt{2}$

(B) $40\sqrt{2}$　(C) $80\sqrt{2}$　(D) $20\sqrt{3}$　(E) $40\sqrt{3}$



【解答】(A)

【詳解】

$\triangle ABC$ 面積 $=\dfrac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\sin A=\dfrac{1}{2}\cdot 8\cdot 10\cdot\sin 135°=20\sqrt{2}$

5. $\triangle ABC$ 中，$\overline{BC}=3$，$\overline{CA}=5$，$\overline{AB}=6$，則$\triangle ABC$ 的內切圓面積 $=$

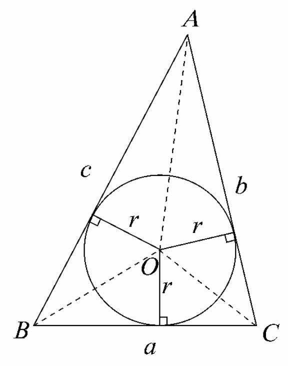
(A) 5π　(B)$\dfrac{7}{2}\pi$　(C)$\dfrac{6}{5}\pi$　(D)$\dfrac{8\pi}{7}$　(E)$\dfrac{4}{3}\pi$

【解答】(D)

【詳解】

由（<u>海龍</u>Heron公式），$s=\dfrac{a+b+c}{2}=7$

$\triangle ABC=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{7(4)(2)(1)}=r\cdot 7\Rightarrow \quad r=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$



又$\triangle ABC=\triangle OAB+\triangle OBC+\triangle OCA$

$=\dfrac{1}{2}cr+\dfrac{1}{2}ar+\dfrac{1}{2}br=\dfrac{1}{2}r(a+b+c)=\dfrac{1}{2}r(2s)=r\cdot s$

$\therefore\quad \triangle ABC$內切圓面積$=\pi r^2=\dfrac{8}{7}\pi$

6. $\triangle ABC$ 中，$\sin A：\sin B：\sin C=\sqrt{2}：2：(\sqrt{3}+1)$，則$\angle A=$

(A) 30° (B) 45° (C) 60° (D) 120° (E) 135°

【解答】(A)

【詳解】

由正弦定理，$a：b：c=\sin A：\sin B：\sin C=\sqrt{2}：2：(\sqrt{3}+1)$

$\therefore\quad \cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{(2k)^2+[(\sqrt{3}+1)k]^2-(\sqrt{2}k)^2}{2\cdot 2k\cdot(\sqrt{3}+1)k}=\dfrac{2\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{4(\sqrt{3}+1)}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\angle A=30°$

7. $\triangle ABC$ 中，若 $a+c=2b$，$3a+b=2c$，下列何者正確？

(A) $a:b:c=-3:-5:-7$ (B) $\sin A:\sin B:\sin C=3:5:7$ (C) $\angle C=60°$ (D) $\sin A=\dfrac{3\sqrt{3}}{14}$

(E) $\cos B=\dfrac{11}{14}$

【解答】(A)(B)(D)(E)

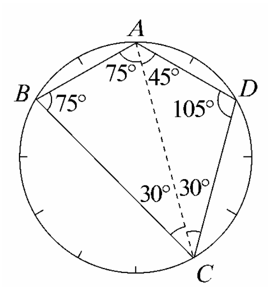
【詳解】

$\begin{cases} a-2b+c=0 \\ 3a+b-2c=0 \end{cases} \quad \begin{array}{cccccccc} -2 & \times & 1 & \times & 1 & \times & -2 \\ 1 & & -2 & & 3 & & 1 \end{array} \quad ?$

$\therefore\quad a：b：c=3：5：7 \quad \therefore\quad \cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{9+25-49}{2\cdot 3\cdot 5}=-\dfrac{1}{2}\quad\Rightarrow\quad \angle C=120°$

$\therefore\quad \sin C=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\quad\Rightarrow\quad \sin A=\dfrac{3}{7}\sin C=\dfrac{3\sqrt{3}}{14}$，$\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\dfrac{49+9-25}{2\cdot 7\cdot 3}=\dfrac{11}{14}$

8. 圓內切四邊形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}=\overline{AD}=2$，$\angle C=60°$，$\angle D=105°$，下列何者正確？



(A) $\overline{BD}=2\sqrt{3}$ (B)此圓半徑= 2 (C) $\overline{AC}=\sqrt{6}-\sqrt{2}$ (D) $\angle ACB=30°$ (E) $\angle CAD=45°$

【解答】(A)(B)(D)(E)

【詳解】

$\overline{BD}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{AD}^2-2\overline{AB}\cdot\overline{AD}\cdot\cos 120°}=\sqrt{4+4+4}=2\sqrt{3}$

$$R=\frac{\overline{BD}}{2\sin A}=\frac{2\sqrt{3}}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}=2$$

$$\frac{2}{\sin 30^\circ}=\frac{\overline{AC}}{\sin 105^\circ}\quad\Rightarrow\quad\overline{AC}=\frac{2}{\frac{1}{2}}\cdot\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=\sqrt{6}+\sqrt{2}$$

二、填充題(每題 10 分)

1. $\triangle ABC$之三邊長分別為$\overline{AB}=5$，$\overline{BC}=6$，$\overline{AC}=7$，則

(1)$\triangle ABC$之內切圓半徑為__________。

(2)若$\angle A$之外角平分線交直線BC於D，則$\overline{AD}$長為__________。

【解答】(1) $\frac{2}{3}\sqrt{6}$　(2) $2\sqrt{70}$

【詳解】

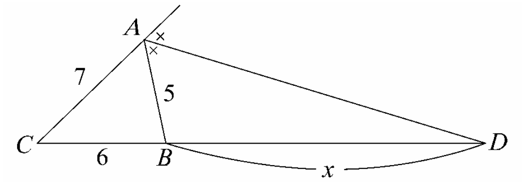
(1) $s=\frac{1}{2}(5+6+7)=9$，海龍公式：$\triangle=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{9(9-5)(9-6)(9-7)}=6\sqrt{6}$

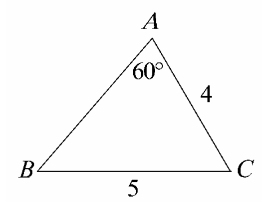
內切圓半徑 $r=\frac{\triangle}{s}=\frac{6\sqrt{6}}{9}=\frac{2}{3}\sqrt{6}$

(2)內分比 $\frac{\overline{CD}}{\overline{BD}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}\quad\Rightarrow\quad\frac{x+6}{x}=\frac{7}{5}\quad\Rightarrow\quad\overline{BD}=x=15$

由$\triangle ABC$ 及$\triangle ACD$ 中，利用餘弦定理

得 $\cos C=\frac{7^2+6^2-5^2}{2\cdot 7\cdot 6}=\frac{7^2+21^2-\overline{AD}^2}{2\cdot 7\cdot 21}\quad\Rightarrow\quad\overline{AD}=\sqrt{280}=2\sqrt{70}$





2. $\triangle ABC$中，$\overline{AC}=4$，$\overline{BC}=5$，$\angle A=60^\circ$，則$\overline{AB}$之長為__________。

【解答】$2+\sqrt{13}$

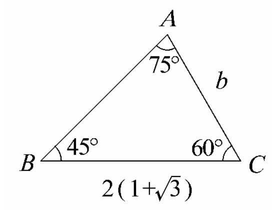
【詳解】

由餘弦定理知 $\cos 60^\circ=\frac{16+\overline{AB}^2-25}{2\cdot 4\cdot\overline{AB}}\quad\Rightarrow\quad 4\overline{AB}=\overline{AB}^2-9\quad\Rightarrow\quad\overline{AB}^2-4\overline{AB}-9=0$

$\Rightarrow\quad\overline{AB}=\frac{4\pm\sqrt{16+36}}{2\cdot 1}=\frac{4\pm 2\sqrt{13}}{2}=2\pm\sqrt{13}$（負不合）

$\therefore\quad\overline{AB}=2+\sqrt{13}$

3. $\angle B=45^\circ$，$\angle C=60^\circ$，$a=2(1+\sqrt{3})$，求$\triangle ABC$的面積__________。



【解答】$2(3+\sqrt{3})$

【詳解】

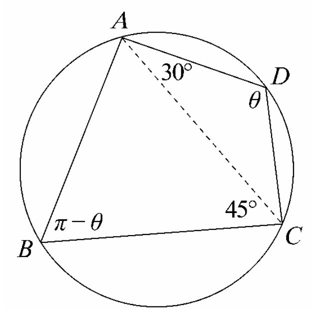
由正弦定理知：$\frac{2(1+\sqrt{3})}{\sin 75^\circ}=\frac{b}{\sin 45^\circ}\quad\Rightarrow\quad\frac{2(1+\sqrt{3})}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}=\frac{b}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\quad\Rightarrow\quad b=4$

$\therefore$ $\triangle ABC$ 之面積$=\dfrac{1}{2}\times 4\times 2(1+\sqrt{3})\times\sin 60^\circ=2(3+\sqrt{3})$

4. 設圓內接四邊形$ABCD$中，$\angle CAD=30^\circ$，$\angle ACB=45^\circ$，$\overline{CD}=2$，試求：

(1) $\overline{AB}$ 之長 ＝＿＿＿＿＿。 (2)劣弧$\overset{\frown}{CD}$的弧長 ＝＿＿＿＿＿。

【解答】(1) $2\sqrt{2}$ (2) $\dfrac{2\pi}{3}$



【詳解】

(1)設$\angle ADC=\theta$，$\angle ABC=\pi-\theta$

在$\triangle ACD$ 中，$\dfrac{\overline{AC}}{\sin\theta}=\dfrac{2}{\sin 30^\circ}$，在$\triangle ABC$ 中，

$$\frac{\overline{AC}}{\sin(\pi-\theta)}=\frac{\overline{AC}}{\sin\theta}=\frac{\overline{AB}}{\sin 45^\circ}$$

$$\therefore\ \frac{2}{\sin 30^\circ}=\frac{\overline{AB}}{\sin 45^\circ}\quad\Rightarrow\quad\overline{AB}=\frac{2\sin 45^\circ}{\sin 30^\circ}=2\sqrt{2}$$

(2)$\triangle ACD$ 之外接圓半徑 $2R=\dfrac{2}{\sin 30^\circ}$ $\Rightarrow$ $R=2$，又$\angle CAD=30^\circ=\dfrac{\pi}{6}$

則劣弧$\overset{\frown}{CD}$之圓心角爲$\dfrac{\pi}{6}\times 2=\dfrac{\pi}{3}$ $\therefore$ 劣弧$\overset{\frown}{CD}$之長 $=2\times\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{2\pi}{3}$

5. $\triangle ABC$之三邊長爲 8，10，12，則

(1)$\triangle ABC$之面積爲＿＿＿＿＿。 (2)$\triangle ABC$之外接圓半徑爲＿＿＿＿＿。

(3)$\triangle ABC$最大邊上之中線長爲＿＿＿＿＿。

【解答】(1) $15\sqrt{7}$ (2) $\dfrac{16\sqrt{7}}{7}$ (3) $\sqrt{46}$

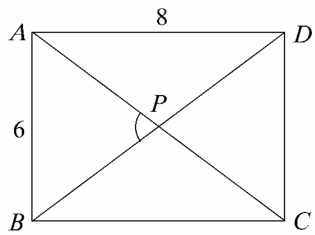
【詳解】

(1)設$a=8$，$b=10$，$c=12$，則$s=\dfrac{1}{2}(8+10+12)=15$，海龍公式$\triangle=\sqrt{15\cdot 3\cdot 5\cdot 7}=15\sqrt{7}$

(2)由$\triangle=\dfrac{abc}{4R}$ $\Rightarrow$ $15\sqrt{7}=\dfrac{8\times 10\times 12}{4R}$ $\Rightarrow$ $R=\dfrac{240}{15\sqrt{7}}=\dfrac{16\sqrt{7}}{7}$

(3)最大邊上之中線長

$=\dfrac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{2\cdot 8^2+2\cdot 10^2-12^2}=\sqrt{46}$



6. 長方形$ABCD$，令$\overline{AB}=6$，$\overline{AD}=8$，對角線$\overline{AC}$與$\overline{BD}$相交於P點，求$\cos\angle APB=$＿＿＿。

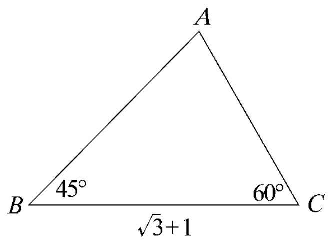
【解答】$\dfrac{7}{25}$

【詳解】

$\overline{AB}=6$，$\overline{AD}=8$，$\overline{AC}=\overline{BD}=10$，$\overline{AP}=\overline{BP}=5$ $\Rightarrow\cos\angle APB=\dfrac{5^2+5^2-6^2}{2\times 5\times 5}=\dfrac{14}{2\times 5\times 5}=\dfrac{7}{25}$

7. $\triangle ABC$中，$\angle B=45^\circ$，$\angle C=60^\circ$，$a=\sqrt{3}+1$，求$\overline{AB}$的值 ＝＿＿＿，外接圓半徑 ＝＿＿＿。

【解答】$\sqrt{6}$，$\sqrt{2}$

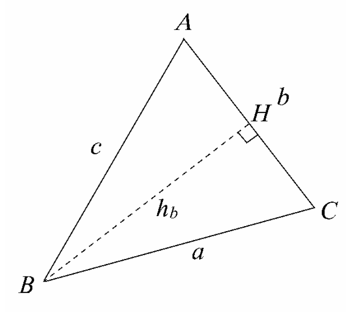


【詳解】

$\angle B=45^\circ$，$\angle C=60^\circ$ $\Rightarrow$ $\angle A=75^\circ$

由正弦定理知$\dfrac{\overline{BC}}{\sin A}=\dfrac{\overline{AB}}{\sin C}$ $\Rightarrow$ $\overline{AB}=\dfrac{\overline{BC}\sin C}{\sin A}=\dfrac{(\sqrt{3}+1)\sin 60^\circ}{\sin 75^\circ}=\dfrac{(\sqrt{3}+1)\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}=\sqrt{6}$

又 $2R=\dfrac{\overline{AB}}{\sin C}$ $\Rightarrow$ $R=\dfrac{\overline{AB}}{2\sin C}=\dfrac{\sqrt{6}}{2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{2}$



8. △ABC中，三邊$\overline{AB}$，$\overline{BC}$，$\overline{CA}$的高分別爲$h_c=3$，$h_a=6$，$h_b=4$，則$\cos A=$____，$\overline{BC}=$____，△ABC的外接圓半徑$R=$______。

【解答】$\dfrac{7}{8}$，$\dfrac{16}{\sqrt{15}}$，$\dfrac{64}{15}$

【詳解】

∵ $a：b：c=\dfrac{1}{h_a}：\dfrac{1}{h_b}：\dfrac{1}{h_c}=\dfrac{1}{6}：\dfrac{1}{4}：\dfrac{1}{3}=2：3：4$ ∴ $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{7}{8}$

在直角△BCH中，$h_b=\overline{BH}=\overline{BC}\sin C$

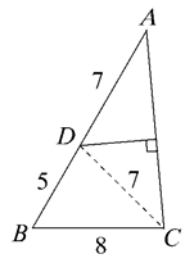
∵ $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=-\dfrac{1}{4}$ $\Rightarrow\sin C=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$ ∴$4=a\cdot\dfrac{\sqrt{15}}{4}$ $\Rightarrow$ $a=\dfrac{16}{\sqrt{15}}$

∵ $\cos A=\dfrac{7}{8}$ $\Rightarrow$ $\sin A=\dfrac{\sqrt{15}}{8}$ ，$\dfrac{a}{\sin A}=2R\Rightarrow R=\dfrac{a}{2\sin A}=\dfrac{64}{15}$

9. △ABC中，若$\overline{AC}$的中垂線交$\overline{AB}$於D，若$\overline{AD}=7$，$\overline{BD}=5$，$\overline{BC}=8$，則$\overline{AC}=$______。

【解答】$4\sqrt{7}$

【詳解】



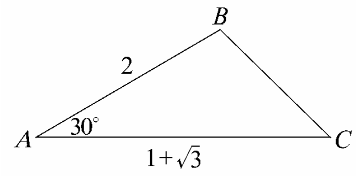
$\cos B=\dfrac{25+64-49}{2\cdot5\cdot8}=\dfrac{1}{2}$

∴ $\overline{AC}^2=12^2+8^2-2\cdot12\cdot8\cdot\dfrac{1}{2}=112$ $\Rightarrow$ $\overline{AC}=4\sqrt{7}$

10. 設△ABC中，$\overline{AB}=2$，$\overline{CA}=1+\sqrt{3}$，$\angle A=30^\circ$，則$\overline{BC}$的長度爲__________，$\angle C$的大小爲__________度。

【解答】$\sqrt{2}$ ；45°

【詳解】



餘弦定理$\overline{BC}^2=2^2+(1+\sqrt{3})^2-2\cdot2\cdot(1+\sqrt{3})\cos30^\circ$

$=4+(4+2\sqrt{3})-2\sqrt{3}\cdot(1+\sqrt{3})=2$

∴ $\overline{BC}=\sqrt{2}$

因爲$b=1+\sqrt{3}>2=c$，故$\angle C$爲銳角，正弦定理知$\dfrac{2}{\sin C}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sin 30^\circ}$ $\Rightarrow\sin C=\dfrac{2}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

∴ $\angle C=45^\circ$

11. △ABC中，$b=4$，$c=2$，$\tan B=\sqrt{15}$，則$a=$__________。

【解答】4

【詳解】

$\tan B=\sqrt{15}$ $\Rightarrow$ $\cos B=\dfrac{1}{4}$ ∴ $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$

$\Rightarrow \quad 16 = 4 + a^2 - 2 \cdot 2 \cdot a \cdot \dfrac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad a^2 - a - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 4$

12.$\triangle ABC$中，$\overline{AB} = \sqrt{3}$，$\overline{AC} = 1$，$\angle B = 30°$，且$\triangle ABC$不是直角三角形，則

(1) $\overline{BC}$ =__________。 (2) $\angle C$ =__________。

【解答】(1) 1　(2) 120°

【詳解】

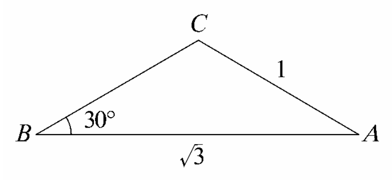
(1)由餘弦定理知$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$

$\Rightarrow \quad 1^2 = a^2 + (\sqrt{3})^2 - 2a \cdot \sqrt{3}\cos 30° \quad \Rightarrow \quad a^2 - 3a + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 1$ 或 2

$\because$　$\triangle ABC$不是直角三角形　$\therefore$　$a = 1$

(2)$\triangle ABC$中　$\because$　$\overline{AC} = \overline{BC} = 1$　$\therefore$　$\angle A = \angle B = 30°$

$\therefore$　$\angle C = 180° - 30° - 30° = 120°$



13.$\triangle ABC$中，$\overline{AB} = 3$，$\overline{BC} = 7$，$\overline{CA} = 5$，則

(1) $\angle A$ =__________。 (2)設M爲$\overline{BC}$中點，則$\overline{AM}$ =__________。

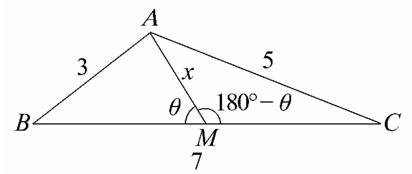
【解答】(1) 120°　(2) $\dfrac{\sqrt{19}}{2}$

【詳解】

(1)由餘弦定理$\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \dfrac{5^2 + 3^2 - 7^2}{2 \cdot 5 \cdot 3} = -\dfrac{1}{2}$，　$\angle A = 120°$

(2)設$\overline{AM} = x$，$\angle AMB = \theta$，則$\angle AMC = 180° - \theta$，$\because$　$\cos\theta = -\cos(180° - \theta)$

$$\therefore \quad \frac{x^2 + (\frac{7}{2})^2 - 3^2}{2 \cdot x \cdot \frac{7}{2}} = -\frac{x^2 + (\frac{7}{2})^2 - 5^2}{2 \cdot x \cdot \frac{7}{2}} \quad \Rightarrow \quad 2x^2 = \frac{19}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \pm\frac{\sqrt{19}}{2}$$（負不合）



14.$\triangle ABC$中，若$(b + c)$：$(c + a)$：$(a + b) = 7$：8：9，則$\sin B$之值爲__________。

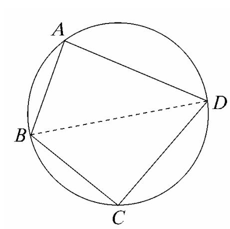
【解答】$\dfrac{4}{5}$

【詳解】

設 $b + c = 7k$，$c + a = 8k$，$a + b = 9k$　$\Rightarrow$　$a + b + c = 12k$，$\therefore$　$a = 5k$，$b = 4k$，$c = 3k$

$\therefore$　$\cos B = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \dfrac{3}{5}$　$\Rightarrow$　$\sin B = \dfrac{4}{5}$

15.圓內接四邊形中，$\overline{AB} = 1$，$\overline{BC} = 2$，$\overline{CD} = 3$，$\overline{DA} = 4$，則$\overline{BD}$的長爲____。



【解答】$\sqrt{\dfrac{77}{5}}$

【詳解】

如上圖，$\angle A+\angle C=180°$

在△ABD中，$\overline{BD}^2=\overline{AB}^2+\overline{AD}^2-2\overline{AB}\cdot\overline{AD}\cos A \quad\Rightarrow\quad \overline{BD}^2=1+16-2\times1\times4\cos A$

在△BCD中，$\overline{BD}^2=\overline{BC}^2+\overline{CD}^2-2\overline{BC}\cdot\overline{CD}\cos(180°-A)\Rightarrow\overline{BD}^2=4+9-2\times2\times3(-\cos A)$

消去$\cos A \quad\Rightarrow\quad \overline{BD}^2=\dfrac{77}{5} \quad\Rightarrow\quad \overline{BD}=\sqrt{\dfrac{77}{5}}$

16.設△ABC的外接圓半徑為 10，而 $\overset{\frown}{AB}:\overset{\frown}{BC}:\overset{\frown}{CA}=4:5:3$，則三角形的面積為__________。

【解答】$25(3+\sqrt{3})$

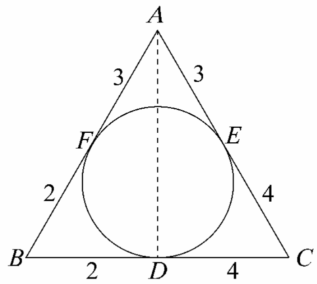
【詳解】

$\overset{\frown}{AB}:\overset{\frown}{BC}:\overset{\frown}{CA}=4:5:3$

$$\Rightarrow\quad\begin{cases}\angle A=\dfrac{5}{12}\times180°=75°\\ \angle B=\dfrac{3}{12}\times180°=45°\\ \angle C=\dfrac{4}{12}\times180°=60°\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}a=2R\sin A=20\cdot\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=5(\sqrt{6}+\sqrt{2})\\ b=2R\sin B=20\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=10\sqrt{2}\\ c=2R\sin C=20\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{3}\end{cases}$$

$\Rightarrow\quad \triangle=\dfrac{1}{2}bc\sin A=12\cdot10\sqrt{2}\cdot10\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=25(3+\sqrt{3})$

17.設△ABC中，$\overline{AB}=5$，$\overline{BC}=6$，$\overline{CA}=7$，其內切圓切三邊$\overline{BC}$，$\overline{CA}$，$\overline{AB}$於點D，E，F，則$\overline{AD}=$__________，而面積比$\dfrac{\triangle ABC}{\triangle DEF}=$________。



【解答】5；$\dfrac{35}{8}$

【詳解】

如圖，$s=\dfrac{1}{2}(5+6+7)=9$，故$\overline{BD}=\overline{BF}=s-b=9-7=2$

分別在△ABD，△ABC 中，由餘弦定理，可得$\dfrac{5^2+2^2-\overline{AD}^2}{2\cdot5\cdot2}=\cos B=\dfrac{5^2+6^2-7^2}{2\cdot5\cdot6}$

$\therefore\quad 3(29-\overline{AD}^2)=61-49 \quad\therefore\quad \overline{AD}^2=25 \quad\therefore\quad \overline{AD}=5$

同理可得$\overline{AE}=\overline{AF}=s-a=9-6=3$，$\overline{CE}=\overline{CD}=s-c=9-5=4$

故由幾何性質，得△$DEF=$ △$ABC-$ △$AEF-$ △$BDF-$ △CDE

$=\triangle ABC-\dfrac{3\cdot3}{5\cdot7}\triangle ABC-\dfrac{2\cdot2}{5\cdot6}\triangle ABC-\dfrac{4\cdot4}{7\cdot6}\triangle ABC$

$=(1-\dfrac{9}{35}-\dfrac{2}{15}-\dfrac{8}{21})\triangle ABC=\dfrac{8}{35}\triangle ABC$，故$\dfrac{\triangle ABC}{\triangle DEF}=\dfrac{35}{8}$