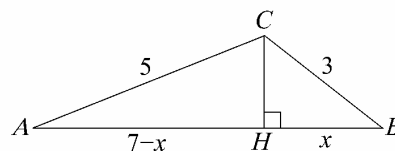


高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：96.04.27				
範圍	2-3、4 三角測量、廣義角	班級	普一 班	姓名
		座號		名

一、選擇題(每題 5 分)

1. $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = 7$ ， $\overline{BC} = 5$ ， $\overline{CA} = 3$ ，則(A) $\sin B = \frac{3}{5}$ (B) $\sin B = \frac{3}{7}$ (C) $\cos B = \frac{5}{7}$
 (D) $\cos B = \frac{4}{5}$ (E) 以上皆非



【解答】(E)

【詳解】

過 C 點作 $\overline{CH} \perp \overline{AB}$ 於 H

$$\text{設 } \overline{BH} = x, \overline{AH} = 7 - x, \text{ 則 } \sqrt{5^2 - (7-x)^2} = \sqrt{3^2 - x^2} \Rightarrow x = \frac{33}{14}$$

$$\therefore \overline{CH} = \frac{15\sqrt{3}}{14} \quad \therefore \sin B = \frac{\frac{15\sqrt{3}}{14}}{5} = \frac{5\sqrt{3}}{14}, \cos B = \frac{\frac{33}{14}}{7} = \frac{11}{14}$$

2. θ 不是象限角且 $\tan \theta > 0$ ， $\sec \theta < 0$ ，則點 $P(\cos \theta, \sin \theta)$ 在
 (A) 第一象限 (B) 第二象限 (C) 第三象限 (D) 第四象限 (E) 兩坐標軸上

【解答】(C)

【詳解】

$\tan \theta > 0 \Rightarrow \theta$ 在第一、三象限； $\sec \theta < 0 \Rightarrow \theta$ 在第二、三象限

$\Rightarrow \theta$ 在第三象限

$\therefore \sin \theta < 0, \cos \theta < 0 \Rightarrow$ 點 $P(\cos \theta, \sin \theta)$ 在第三象限

3. 下列何者無意義？_____。

(A) $\csc 90^\circ$ (B) $\cot 630^\circ$ (C) $\sec 360^\circ$ (D) $\tan 480^\circ$ (E) $\sec(-90^\circ)$

【解答】(E)

【詳解】

$$(A) \csc 90^\circ = \frac{1}{\sin 90^\circ} = \frac{1}{1} = 1 \quad (B) \cot 630^\circ = \cot 270^\circ = \frac{\cos 270^\circ}{\sin 270^\circ} = \frac{0}{-1} = 0$$

$$(C) \sec 360^\circ = \frac{1}{\cos 360^\circ} = \frac{1}{1} = 1 \quad (D) \tan 480^\circ = \tan 120^\circ = -\sqrt{3}$$

$$(E) \sec(-90^\circ) = \sec 90^\circ = \frac{1}{\cos 90^\circ} = \frac{1}{0} \text{ 無意義}$$

4. 已知點 $P(\sin \theta \cdot \sec \theta, \tan \theta \cdot \cos \theta)$ 在第四象限內，則 θ 的終邊可能在

(A) 第一象限內 (B) 第二象限內 (C) 第三象限內 (D) 第四象限內 (E) x 軸上

【解答】(C)

【詳解】

$P(\sin \theta \cdot \sec \theta, \tan \theta \cdot \cos \theta)$ 在第四象限 $\therefore (+, -)$ ，即 $\sin \theta \cdot \sec \theta > 0, \tan \theta \cdot \cos \theta < 0$

①若 $\sin \theta > 0$ ，則 $\sec \theta > 0 \Rightarrow \theta$ 在第一象限 $\Rightarrow \tan \theta > 0, \cos \theta > 0$ ，不合

②若 $\sin \theta < 0$ ，則 $\sec \theta < 0 \Rightarrow \theta$ 在第三象限 $\Rightarrow \tan \theta > 0, \cos \theta < 0$ ，合

$\therefore \theta$ 的終邊可能在第三象限，應選(C)

5. 如下圖， A 為單位圓與 y 軸負向的交點， $\overline{AC} \perp y$ 軸與角 θ 終邊交點為 C ，則 $\overline{AC} =$

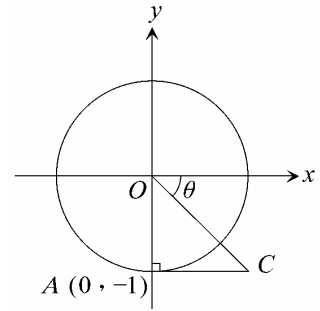
(A) $|\tan\theta|$ (B) $|\cot\theta|$ (C) $|\sec\theta|$ (D) $|\csc\theta|$ (E) $|\sin\theta|$

【解答】(B)

【詳解】

在 $\triangle AOC$ 中， $\angle C = \theta$ ， $\overline{OA} = 1$

$$\therefore |\cot\theta| = \frac{\overline{AC}}{\overline{OA}} \Rightarrow \overline{AC} = \overline{OA} \cdot |\cot\theta| = |\cot\theta|$$



6. (複選)下列選項何者為真？

(A) $\sin 50^\circ < \cos 50^\circ$ (B) $\tan 50^\circ < \cot 50^\circ$ (C) $\tan 50^\circ < \sec 50^\circ$ (D) $\sin 230^\circ < \cos 230^\circ$
 (E) $\tan 230^\circ < \cot 230^\circ$

【解答】(C)(D)

【詳解】

(A) $\cos 50^\circ = \sin 40^\circ < \sin 50^\circ$

(B) $\cot 50^\circ = \tan 40^\circ < \tan 50^\circ$

(C) $\tan 50^\circ = \frac{\sin 50^\circ}{\cos 50^\circ} < \frac{\sin 90^\circ}{\cos 50^\circ} = \frac{1}{\cos 50^\circ} = \sec 50^\circ$

(D) $\sin 230^\circ = \sin(180^\circ + 50^\circ) = -\sin 50^\circ$ ， $\cos 230^\circ = \cos(180^\circ + 50^\circ) = -\cos 50^\circ$

由(A)可知 $\cos 50^\circ < \sin 50^\circ$ ，故 $-\cos 50^\circ > -\sin 50^\circ$ ，即 $\cos 230^\circ > \sin 230^\circ$

(E) $\tan 230^\circ = \tan(180^\circ + 50^\circ) = \tan 50^\circ$ ， $\cot 230^\circ = \cot(180^\circ + 50^\circ) = \cot 50^\circ$

由(B)可知 $\tan 50^\circ > \cot 50^\circ$ ，故 $\tan 230^\circ > \cot 230^\circ$

7. (複選)若以下各角皆為廣義角，試判斷下列敘述何者正確？

(A)若 $\theta = \varphi + 360^\circ$ ，則 θ ， φ 是同界角

(B) $\cos\theta \cdot \tan\theta = \sin\theta$

(C)若 $\sin\theta > 0$ 且 $\tan\theta < 0$ ，則 θ 在第一象限

(D)若有兩角度 α ， β ，滿足 $\sec\alpha = \sec\beta$ ， $\tan\alpha = \tan\beta$ ，則 α ， β 必定是同界角

(E)若 $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，則 $\theta = 60^\circ$ 或 120°

【解答】(A)(B)(D)

【詳解】

(A) $\theta - \varphi = (\varphi + 360^\circ) - \varphi = 360^\circ \therefore \theta, \varphi$ 是同界角

(B) $\cos\theta \cdot \tan\theta = \cos\theta \cdot \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \sin\theta$

(C) $\begin{cases} \sin\theta > 0, \theta \in 1, 2 \text{象限} \\ \tan\theta < 0, \theta \in 2, 4 \text{象限} \end{cases} \therefore \theta$ 在第2象限

(D)

$\sec\alpha = \sec\beta$ ，則 $\alpha - \beta = 360^\circ k$ 或 $\alpha + \beta = 360^\circ k \dots\dots ①$

$\tan\alpha = \tan\beta$ ，則 $\alpha - \beta = 360^\circ k$ 或 $\alpha - \beta = 360^\circ k - 180^\circ \dots\dots ②$

$① \cap ② \Rightarrow \alpha - \beta = 360^\circ k \therefore \alpha, \beta$ 必定是同界角

(E) $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，則 $\theta = 360^\circ k + 60^\circ$ 或 $360^\circ k + 120^\circ$

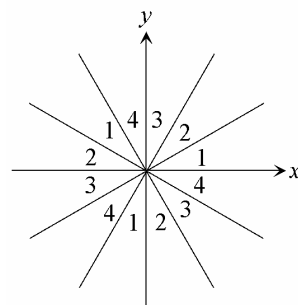
8. (複選) θ 是第二象限角，則 $\frac{\theta}{3}$ 可能是第幾象限角？

(A)第一象限 (B)第二象限 (C)第三象限 (D)第四象限 (E) $\frac{\theta}{3}$ 可能不是象限角

【解答】(A)(B)(D)

將每一象限三等分($\frac{\theta}{3}$)，依序寫上 1, 2, 3, 4; 1, 2, 3, 4; ...

$\therefore \theta$ 在第二象限，編號 2 者得 $\frac{\theta}{3}$ 可能落在第一、二、四象限



9. (複選)已知 $\cot 260^\circ = k$ ，下列何者正確？

(A) $\sin 260^\circ = -\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$ (B) $\cos 10^\circ = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$ (C) $\tan 10^\circ = k$

(D) $\sec 260^\circ = -\frac{\sqrt{1+k^2}}{k}$ (E) $\csc 10^\circ = -\frac{\sqrt{1+k^2}}{k}$

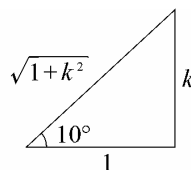
【解答】(A)(B)(C)(D)

【詳解】

$\cot 260^\circ = k \Rightarrow \cot(270^\circ - 10^\circ) = k \Rightarrow \tan 10^\circ = k \Rightarrow$

$\therefore \sin 260^\circ = -\cos 10^\circ = \frac{-1}{\sqrt{1+k^2}}$ ， $\cos 10^\circ = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$

(C) $\tan 10^\circ = k$ (D) $\sec 260^\circ = -\csc 10^\circ = \frac{\sqrt{1+k^2}}{-k}$ (E) $\csc 10^\circ = \frac{\sqrt{1+k^2}}{k}$



二、填充題(每題 10 分)

1. 測量員欲測河流的寬度，在岸邊取兩點 A 、 B ，並在對岸取一目標 C ，若測得 $\angle CAB = 45^\circ$ ， $\angle CBA = 60^\circ$ 且 $\overline{AB} = 100$ 公尺，則河寬為_____公尺。

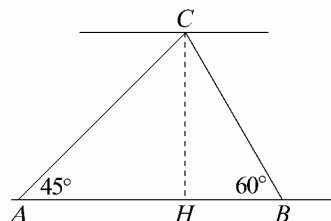
【解答】 $50(3 - \sqrt{3})$

【詳解】

設河寬為 x 公尺，則於 $\triangle AHC$ 中， $\overline{AH} = x \cot 45^\circ = x$ ，

$\triangle BHC$ 中， $\overline{BH} = x \cot 60^\circ = \frac{x}{\sqrt{3}}$

得 $\overline{AB} = \overline{AH} + \overline{HB} \Leftrightarrow x + \frac{x}{\sqrt{3}} = 100 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}x = 100 \Leftrightarrow x = \frac{100\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} = 50(3 - \sqrt{3})$



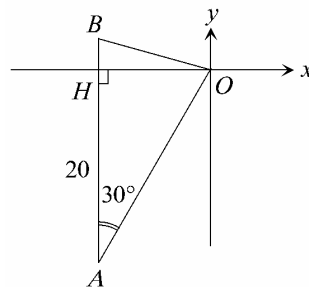
2. 一島在船之北 30° 東，此船往北行駛 20 公里後，發現島在南 60° 東，則船與島之最近距離為_____公里。

【解答】 $5\sqrt{3}$

【詳解】設島為原點 O ，如右圖

由 $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ 定理知 $\overline{OB} = 10$ ， $\overline{OA} = 10\sqrt{3}$

$\therefore \overline{OH} = \frac{10 \cdot 10\sqrt{3}}{20} = 5\sqrt{3}$

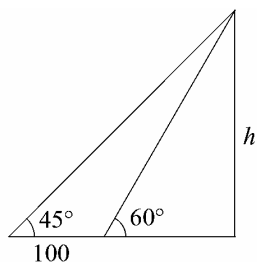


3. 某人在 A 處測得高樓頂之仰角為 45° ，前進 100 公尺到 B 處，再測得仰角為 60° ，則樓高為_____公尺。

【解答】 $50(3 + \sqrt{3})$

【詳解】

設樓高為 h ，則由下圖知



$$h - \frac{h}{\sqrt{3}} = 100 \Rightarrow (\sqrt{3} - 1)h = 100\sqrt{3}$$

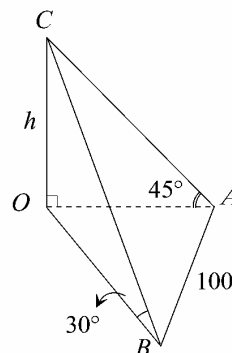
$$\Rightarrow h = \frac{100\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1} = 50\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1) = 50(3 + \sqrt{3})$$

4. 自塔的正東 A 處測得塔頂的仰角為 45° ，自塔的正南 B 處再測得仰角為 30° ，若 $\overline{AB} = 100$ 公尺，則塔高為_____公尺。

【解答】 50

【詳解】

設塔高為 h ，則 $\overline{OA} = h$ ， $\overline{OB} = \sqrt{3}h$ $\therefore h^2 + 3h^2 = 100^2$
 $\Rightarrow 4h^2 = 10000 \Rightarrow h = 50$



5. 一船向北航行，在北 30° 東的方位發現一燈塔後，繼續向北前進 5 公里，此時，燈塔的方位為南 60° 東，則該船航線與燈塔的最短距離為多少公里？_____

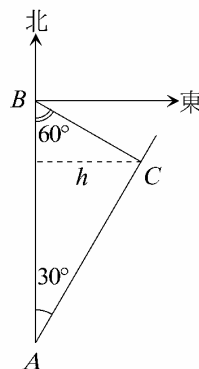
【解答】 $\frac{5}{4}\sqrt{3}$ 公里

【詳解】

$\therefore \overline{AB} = 5$ ， $\triangle ABC$ 為 30° ， 60° ， 90° 的直角三角形
 $\therefore \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\overline{AC}}{5} \Rightarrow \overline{AC} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ ， $\frac{1}{2} = \frac{\overline{BC}}{5} \Rightarrow \overline{BC} = \frac{5}{2}$

設最短距離 h 公里

$\therefore \frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{BC} = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times h \quad \therefore \frac{5}{2} \sqrt{3} \times \frac{5}{2} = 5 \times h \Rightarrow h = \frac{5}{4}\sqrt{3}$



6. 海中有一小島，其四周 6 哩內鋪設水雷，今有一船自西向東行駛，於 A 點見島在北 60° 東，繼續行駛 5 哩，見島在其北 45° 東，若此船航向不變，則此船是否會觸及水雷？

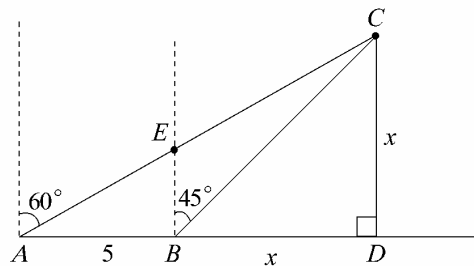
【解答】 不會觸及水雷

【詳解】

如圖，令 $\overline{CD} = \overline{BD} = x$

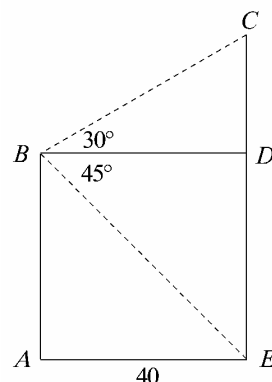
由 $\triangle ABE \sim \triangle ADC \quad \therefore \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{DC}} \quad \therefore \frac{5}{x+5} = \frac{\sqrt{3}}{x}$

$\therefore x = \frac{5}{\sqrt{3}-1} = \frac{5}{2}(\sqrt{3}+1) \doteq 6.8 > 6 \quad \therefore$ 不會觸及水雷



7. 從大馬路旁某大廈一窗口，測得馬路對面另一大廈屋頂的仰角為 30° ，屋基的俯角為 45° ，已知馬路寬為 40 公尺，求對面大廈的高度 = _____ 公尺。

【解答】 $\frac{40\sqrt{3} + 120}{3}$



【詳解】

$$\because \angle DBE = 45^\circ \quad \therefore \overline{AE} = 40 = \overline{BD} = \overline{DE}$$

$$\text{在}\triangle CBD\text{中}, \angle CBD = 30^\circ, \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{CD}}{40}$$

$$\Rightarrow \overline{CD} = \frac{40}{\sqrt{3}} = \frac{40\sqrt{3}}{3} \quad \Rightarrow \overline{CE} = \overline{CD} + \overline{DE} = \frac{40\sqrt{3}}{3} + 40 = \frac{40\sqrt{3} + 120}{3}$$

8. 已知 $\sin 29.1^\circ = 0.4863$, $\sin 29.2^\circ = 0.4879$, $\sin 29.3^\circ = 0.4893$, $\sin 29.4^\circ = 0.4909$, $\sin 29.5^\circ = 0.4924$ 。利用內插法可求得 $\sin 1230^\circ 51'$ 之近似值為_____。

【解答】0.4871

【詳解】

$$\sin 1230^\circ 51' = \sin 1230.85^\circ = \sin(90^\circ \times 14 - 29.15^\circ) = \sin 29.15^\circ$$

$$\text{設 } \sin 29.15^\circ = x$$

$$0.1 \left[\begin{array}{l} 0.05 \left[\begin{array}{l} \sin 29.1^\circ = 0.4863 \\ \sin 29.15^\circ = x \end{array} \right] x - 0.4863 \\ \sin 29.2^\circ = 0.4879 \end{array} \right] 0.0016$$

$$\text{由內插法知 } \frac{0.05}{0.1} = \frac{x - 0.4863}{0.0016} \quad \Rightarrow \quad x = 0.4863 + 0.0008 = 0.4871$$

9. $\sin 120^\circ \cos 150^\circ - \cos 405^\circ \sin(-225^\circ) + \tan 2100^\circ \sec 180^\circ =$ _____。

【解答】 $-\frac{5}{4} + \sqrt{3}$

【詳解】

$$\cos 405^\circ = \cos(90^\circ \times 4 + 45^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \tan 2100^\circ = \tan(90^\circ \times 24 - 60^\circ) = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\therefore \text{原式} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{-\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + (-\sqrt{3})(-1) = -\frac{5}{4} + \sqrt{3}$$

10. 設 $\tan \theta = -\frac{4}{3}$ 且 $\sec \theta > 0$, 則 $\frac{3\sin \theta + 2\cos \theta}{\sin \theta + 4\cos \theta} =$ _____。

【解答】 $-\frac{3}{4}$

【詳解】

$$\tan \theta = -\frac{4}{3} \text{ 且 } \sec \theta > 0 \Rightarrow \theta \text{ 爲第四象限角；原式} = \frac{3 \cdot \frac{-4}{5} + 2 \cdot \frac{3}{5}}{-\frac{4}{5} + 4 \cdot \frac{3}{5}} = \frac{-\frac{6}{5}}{\frac{8}{5}} = -\frac{3}{4}$$

11. 求值： $\cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \cos 60^\circ + \cdots + \cos 160^\circ + \cos 180^\circ =$ _____。

【解答】-1

【詳解】

$$\text{原式} = \cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \cos 60^\circ + \cos 80^\circ + (-\cos 80^\circ) + (-\cos 60^\circ) + (-\cos 40^\circ) + (-\cos 20^\circ) + (-1) = -1$$

12. 坐標平面上, O 爲原點, $P(x, 3)$ 爲角 θ 終邊上一點, $\cos \theta = -\frac{3}{5}$, 則

(1) x 之值爲_____。 (2) $\sin \theta =$ _____。

【解答】(1) $-\frac{9}{4}$ (2) $\frac{4}{5}$

【詳解】

$$(1) r = \sqrt{x^2 + 9}, \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}} = -\frac{3}{5}, x < 0 \Rightarrow \frac{x^2}{x^2 + 9} = \frac{9}{25} \Rightarrow 16x^2 = 81 \Rightarrow x = \pm \frac{9}{4}$$

$$\because x < 0 \quad \therefore x = -\frac{9}{4}$$

$$(2) r = \sqrt{\left(-\frac{9}{4}\right)^2 + 9} = \frac{15}{4} \quad \therefore \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{3}{\frac{15}{4}} = \frac{4}{5}$$

13. $(\log_2 \sin 855^\circ)^2 + \log_3 \tan(-510^\circ)$ 之值為 _____。

【解答】 $-\frac{1}{4}$

【詳解】

$$(\log_2 \sin 855^\circ)^2 + \log_3 \tan(-510^\circ) = (\log_2 \sin 45^\circ)^2 + \log_3(-\tan 510^\circ) = (\log_2 \sin 45^\circ)^2 + \log_3 \tan 30^\circ$$

$$= (\log_2 \frac{1}{\sqrt{2}})^2 + \log_3 \frac{1}{\sqrt{3}} = (\log_2 2^{-\frac{1}{2}})^2 + \log_3 3^{-\frac{1}{2}} = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$

14. 設 $\sin\theta = \frac{1}{3}$, $90^\circ < \theta < 180^\circ$, 則: (1) $\cos\theta =$ _____。 (2) $\tan(-630^\circ + \theta) =$ _____。

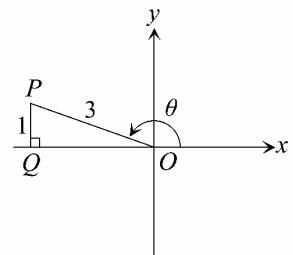
【解答】(1) $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (2) $2\sqrt{2}$

【詳解】

(1) 如圖所示, 令 $\overline{PO} = 3$, $\overline{PQ} = 1$, 則 $\overline{OQ} = \sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2}$

$$\because 90^\circ < \theta < 180^\circ \quad \therefore \cos\theta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$(2) \tan(-630^\circ + \theta) = -\tan(630^\circ - \theta) = -\cot\theta = 2\sqrt{2}$$



15. 化簡求值:

$$(1) \frac{\sin(-\theta)}{\sin(180^\circ + \theta)} - \frac{\tan(270^\circ - \theta)}{\cot(180^\circ + \theta)} + \frac{\cos(90^\circ + \theta)}{\sin(360^\circ - \theta)} = \text{_____}。$$

$$(2) \cos^2(55^\circ + \theta) + \cos^2(35^\circ - \theta) = \text{_____}。$$

【解答】(1) 1 (2) 1

【詳解】

$$(1) \text{原式} = \frac{-\sin\theta}{-\sin\theta} - \frac{\cot\theta}{\cot\theta} + \frac{-\sin\theta}{-\sin\theta} = 1 - 1 + 1 = 1$$

$$(2) \text{原式} = \sin^2[90^\circ - (55^\circ + \theta)] + \cos^2(35^\circ - \theta) = \sin^2(35^\circ - \theta) + \cos^2(35^\circ - \theta) = 1$$

16. 設 2000° 的最小正同界角為 α , 最大負同界角為 β , 則數對 $(\alpha, \beta) =$ _____。

【解答】 $(200^\circ, -160^\circ)$

【詳解】

$$2000^\circ = 360^\circ \times 5 + 200^\circ = 360^\circ \times 6 - 160^\circ$$

$$\Rightarrow \text{最小正同界角 } 200^\circ$$

$$\Rightarrow \text{最大負同界角 } -160^\circ$$

17. 若 $270^\circ < \theta < 360^\circ$ 且 $6\sin^2\theta - \sin\theta = 1$ ，則 $\tan\theta =$ _____。

【解答】 $-\frac{\sqrt{2}}{4}$

【詳解】

$$6\sin^2\theta - \sin\theta - 1 = 0 \Rightarrow (3\sin\theta + 1)(2\sin\theta - 1) = 0 \Rightarrow \sin\theta = -\frac{1}{3} \text{ 或 } \frac{1}{2} \text{ (不合)}$$

$$\Rightarrow \tan\theta = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

18. 若 θ 為第三象限角且 $\sin\theta = -\frac{3}{5}$ ，則

$$\tan(90^\circ + \theta) + \sin(270^\circ - \theta) - \sec(180^\circ - \theta) + \cos(270^\circ + \theta) = \text{_____}。$$

【解答】 $-\frac{143}{60}$

【詳解】

$$\text{原式} = -\cot\theta - \cos\theta + \sec\theta + \sin\theta = -\frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{5}{4} - \frac{3}{5} = -\frac{143}{60}$$

