高雄市明誠中學 高一數學複習測驗　　日期：96.04.11					
範圍	2-1、2 三角函數	班級	普一　　　班	姓名	
		座號			

一、選擇題(每題 5 分)

1. (複選)設 θ 是一個銳角，則下列何者為真？

(A) $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$　(B) $\tan\theta=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$　(C) $\sin\theta=\dfrac{\tan\theta}{\cot\theta}$　(D) $\cos\theta=\dfrac{\cot\theta}{\csc\theta}$　(E) $\sec\theta=\dfrac{\tan\theta}{\sin\theta}$

【解答】(A)(D)(E)

【詳解】商數關係：$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$，$\cot\theta=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

2. (複選)下列各式何者成立？

(A) $\sin^2 10°+\cos^2 10°=1$　(B) $\sin^2 20°+\cos^2 20°=1$　(C) $\tan^2 30°+\cot^2 30°=1$

(D) $\sec^2 40°+\csc^2 40°=1$　(E) $\tan^2 50°+\sec^2 50°=1$

【解答】(A)(B)

【詳解】

平方關係：$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，$\tan^2\theta+1=\sec^2\theta$，$\cot^2\theta+1=\csc^2\theta$

3. (複選)下列各式何者成立？　(A) $\sin 20°=\cos 70°$　(B) $\cos 40°=\sin 60°$

(C) $\tan 25°=\cot 35°$　(D) $\sec 33°=\csc 67°$　(E) $\csc 50°=\sin 40°$

【解答】(A)

【詳解】

(B)$\cos 40°=\sin 50°$　(C)$\tan 25°=\cot 65°$　(D)$\sec 33°=\csc 57°$　(E)$\csc 50°=\sec 40°$

4. (複選)設 θ 是一個銳角，則下列何者為真？

(A) $\sin\theta\cdot\cos\theta=1$　(B) $\tan\theta\cdot\cot\theta=1$　(C) $\sec\theta\cdot\csc\theta=1$　(D) $\sin\theta\cdot\sec\theta=1$

(E) $\cos\theta\cdot\sec\theta=1$

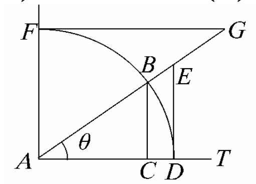
【解答】(B)(E)

【詳解】

倒數關係：$\sin\theta\cdot\csc\theta=1$，$\cos\theta\cdot\sec\theta=1$，$\tan\theta\cdot\cot\theta=1$

5. (複選)如圖，以 A 為圓心，1 為半徑作一個圓，此圓過 D，B，F 三點，若 $\overline{BC}$，$\overline{ED}$，$\overline{FA}$ 都垂直 $\overline{AT}$，$\overline{FG}\perp\overline{FA}$，$\angle BAC=\theta$，則下列敘述何者正確？

(A) $\overline{AC}=\cos\theta$　(B) $\overline{DE}=\tan\theta$　(C) $\overline{AE}=\sec\theta$　(D) $\overline{FG}=\cot\theta$　(E) $\overline{AG}=\csc\theta$



【解答】(A)(B)(C)(D)(E)

【詳解】

$\because$　$\overline{FA}\perp\overline{AT}$，$\overline{FG}\perp\overline{FA}$　$\therefore$　$\overline{FG}\,//\,\overline{AT}$　$\therefore$　$\angle FGA=\angle GAT=\theta$

(A) $\cos\theta=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$　$\Rightarrow$　$\overline{AC}=\overline{AB}\cos\theta=\cos\theta$　(B) $\tan\theta=\dfrac{\overline{DE}}{\overline{AD}}=\dfrac{\overline{DE}}{1}=\overline{DE}$

(C) $\sec\theta=\dfrac{\overline{AE}}{\overline{AD}}=\overline{AE}$　(D) $\cot\theta=\dfrac{\overline{FG}}{\overline{AF}}=\overline{FG}$　(E) $\csc\theta=\dfrac{\overline{AG}}{\overline{AF}}=\overline{AG}$

6. (複選)設 $0° < \theta < 90°$，$\tan\theta = k$，則下列敘述何者正確？

(A) $\sec\theta = \sqrt{k^2+1}$　(B) $\csc\theta = k^2+1$　(C) $\cot\theta = \dfrac{1}{k}$　(D) $\sin\theta = \dfrac{k}{\sqrt{k^2+1}}$

(E) $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{k^2+1}}$

【解答】(A)(C)(D)(E)

【詳解】

$\tan^2\theta = k^2 \quad\Rightarrow\quad \sec^2\theta = 1+k^2 \quad\Rightarrow\quad \sec\theta = \sqrt{1+k^2}$

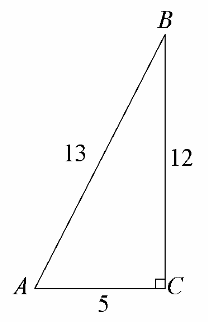
$\therefore\quad \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{1+k^2}} \quad \therefore\quad \sin\theta = \tan\theta\cdot\cos\theta = k\cdot\dfrac{1}{\sqrt{k^2+1}} = \dfrac{k}{\sqrt{k^2+1}} \quad\Rightarrow\quad \csc\theta = \dfrac{\sqrt{k^2+1}}{k}$

二、填充題(每題 10 分)

1. 設θ爲銳角且$\sec\theta = \dfrac{13}{5}$，則$\sin\theta =$ ＿＿＿＿＿，而$\tan\theta + \cot\theta =$ ＿＿＿＿＿。

【解答】$\dfrac{12}{13}$，$\dfrac{169}{60}$

【詳解】



如上圖：作一$\triangle ABC$使得$\angle C = 90°$，$\overline{AC} = 5$，$\overline{AB} = 13$，而$\angle BAC = \theta$

由畢氏定理可得$\overline{BC} = 12$，故由銳角三角函數定義知$\sin\theta = \dfrac{12}{13}$，$\tan\theta = \dfrac{12}{5}$及$\cot\theta = \dfrac{5}{12}$

故可得$\tan\theta + \cot\theta = \dfrac{12}{5} + \dfrac{5}{12} = \dfrac{169}{60}$

2. 求下列各式的值：

(1) $1 - \sin^2 45° - \tan 30° \cot 60° + \sin^2 38° + \sin^2 52° =$ ＿＿＿＿＿。

(2) $\dfrac{1}{1+\sin\theta} + \dfrac{1}{1-\cos\theta} + \dfrac{1}{1-\sec\theta} + \dfrac{1}{1+\csc\theta} =$ ＿＿＿＿＿。

【解答】(1) $\dfrac{7}{6}$　(2) 2

【詳解】

(1)原式 $= 1 - (\dfrac{1}{\sqrt{2}})^2 - \dfrac{1}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{3}} + (\sin^2 38° + \cos^2 38°) = 1 - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + 1 = \dfrac{7}{6}$

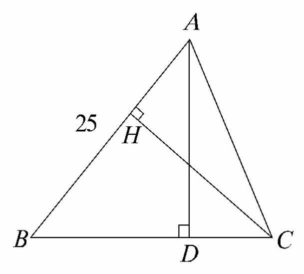
(2)原式 $= \dfrac{1}{1+\sin\theta} + \dfrac{1}{1-\cos\theta} + \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{\cos\theta}} + \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\sin\theta}} = (\dfrac{1}{1+\sin\theta} + \dfrac{\sin\theta}{1+\sin\theta}) +$

$(\dfrac{1}{1-\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\cos\vartheta-1})=1+1=2$

3. $\triangle ABC$ 中，$\overline{AD}$ 垂直 $\overline{BC}$ 於 D，已知 $\overline{AB}=25$，$\sin B=\dfrac{3}{5}$，$\sin C=\dfrac{15}{17}$，則下列敘述何者正確？(1) $\overline{AD}=$ ______________；(2) $\overline{AC}=$ ______________ ；(3) $\sin A=$______________

【解答】(1)15　(2)17　(3) $\dfrac{15}{17}$

【詳解】



(1) $\sin B=\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AB}}=\dfrac{\overline{AD}}{25}=\dfrac{3}{5}\quad\Rightarrow\quad\overline{AD}=15$

(2) $\sin C=\dfrac{15}{17}\quad\Rightarrow\quad\tan C=\dfrac{15}{8}=\dfrac{\overline{AD}}{\overline{CD}}\quad\Rightarrow\quad\overline{CD}=8$

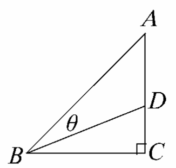
(3) $\cos B=\dfrac{\overline{BD}}{25}=\dfrac{4}{5}\quad\therefore\quad\overline{BD}=20\quad\Rightarrow\quad\overline{BC}=28$

(4) $\sin C=\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AC}}=\dfrac{15}{17}\quad\Rightarrow\quad\overline{AC}=17$

(5)作 $\overline{CH}\perp\overline{AB}$

$\because\quad\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\overline{BC}\cdot\overline{AD}=\dfrac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{CH}\quad\Rightarrow\quad\overline{CH}=\dfrac{84}{5}\quad\therefore\quad\sin A=\dfrac{\overline{CH}}{\overline{AC}}=\dfrac{84}{85}$

4. 如下圖：$\overline{AC}=\overline{BC}$，$\overline{AD}:\overline{DC}=3:2$，則 $\tan\theta=$ __________。

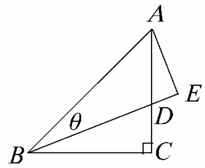


【解答】$\dfrac{3}{7}$

【詳解】

設 $\overline{AD}=3$，$\overline{DC}=2$，$\overline{BC}=5$，$\overline{AE}=5t$，$\overline{DE}=2t$

$\Rightarrow\quad t=\dfrac{3}{\sqrt{29}}\quad\Rightarrow\quad\tan\theta=\dfrac{\overline{AE}}{\overline{BE}}=\dfrac{\frac{15}{\sqrt{29}}}{\sqrt{29}+\frac{6}{\sqrt{29}}}=\dfrac{15}{35}=\dfrac{3}{7}$



5. $\sin 27°\cdot\csc 27°+\tan 38°-\cot 52°=$ __________。

【解答】1

【詳解】原式 $=1+\tan 38°-\tan 38°=1$

6. $\sin 30°\cdot\cos 45°\cdot\tan 60°\cdot\cot 45°=$ ＿＿＿＿＿＿。

【解答】$\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

【詳解】原式 $=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{3}\cdot 1=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

7. $\triangle ABC$中，$\overline{AB}=5$，$\overline{BC}=3$，$\overline{CA}=4$，$\angle B$的分角線交$\overline{AC}$於D，則

(1) $\cos B=$ ＿＿＿＿＿＿。 (2) $\tan\angle DBC=$ ＿＿＿＿＿＿。

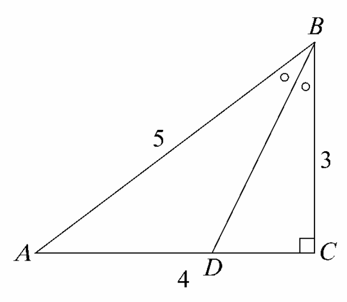
【解答】(1)$\dfrac{3}{5}$ (2)$\dfrac{1}{2}$

【詳解】

(1)$\triangle ABC$ 中，$\overline{BC}^2+\overline{CA}^2=9+16=25=\overline{AB}^2$ $\therefore$ $\angle C=90°$ $\Rightarrow$ $\cos B=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\dfrac{3}{5}$

(2)$\because$ $\overline{BD}$ 爲$\angle B$ 之分角線 $\therefore$ $\overline{AD}:\overline{DC}=\overline{AB}:\overline{BC}=5:3$

$\Rightarrow$ $\overline{CD}=4\times\dfrac{3}{8}=\dfrac{3}{2}$，故 $\tan\angle DBC=\dfrac{\overline{CD}}{\overline{BC}}=\dfrac{\frac{3}{2}}{3}=\dfrac{1}{2}$



8. $\sin 15°\cdot\cos 15°\cdot\tan 15°\cdot\cot 15°\cdot\sec 15°\cdot\csc 15°$之值爲 ＿＿＿＿＿＿。

【解答】1

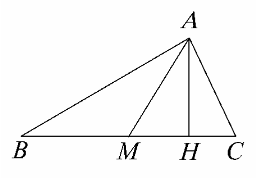
【詳解】

由倒數關係得知 $\sin 15°\cdot\cos 15°\cdot\tan 15°\cdot\cot 15°\cdot\sec 15°\cdot\csc 15°$

$=(\sin 15°\cdot\csc 15°)(\cos 15°\cdot\sec 15°)(\tan 15°\cdot\cot 15°)=1\cdot 1\cdot 1=1$

9. $\triangle ABC$中，若$\cos B=\dfrac{4}{5}$，$\cos C=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，$\overline{BC}$邊上之高$\overline{AH}$，中線$\overline{AM}$，若$\overline{MH}=5$，則$\overline{AH}$

$=$ ＿＿＿＿＿＿，$\triangle ABC$的面積 $=$ ＿＿＿＿＿＿，$\overline{AB}=$ ＿＿＿＿＿＿。



【解答】12；132；20

【詳解】

由已知條件得

$\cos B=\dfrac{4}{5}$ $\Rightarrow$ $\sin B=\dfrac{3}{5}$，$\tan B=\dfrac{3}{4}$，$\cos C=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ $\Rightarrow$ $\sin C=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，$\tan C=2$

$\tan B=\dfrac{3}{4}=\dfrac{\overline{AH}}{\overline{BM}+5}$，$\tan C=\dfrac{2}{1}=\dfrac{\overline{AH}}{\overline{MC}-5}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{3}{8}=\dfrac{\overline{MC}-5}{\overline{BM}+5}$ $\Rightarrow$ $\overline{BM}=\overline{MC}=11$

隨之，代回得 $\overline{AH}=12$，又 $\overline{BC}=22$，故△ABC 的面積 $=\dfrac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{AH}=\dfrac{1}{2}\times 22\times 12=132$

又由 $\overline{AB}\times\sin B=\overline{AH}$ $\Rightarrow$ $\overline{AB}=\overline{AH}\times\dfrac{5}{3}=20$

10.(1) $\tan 15°=$ ＿＿＿＿＿。 (2) $\cot 15°=$ ＿＿＿＿＿。

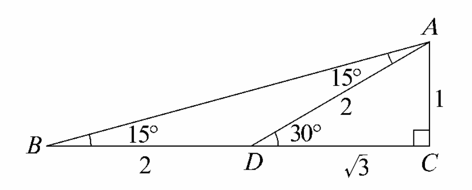
【解答】(1) $2-\sqrt{3}$ (2) $2+\sqrt{3}$

【詳解】

作直角三角形 ABC，使$\angle C=90°$，$\angle A=15°$，又作$\angle BAD=\angle B$，D 在 $\overline{BC}$ 上，則$\angle ADC=30°$

令 $\overline{AC}=1$，則 $\overline{AD}=2=\overline{BD}$，$\overline{CD}=\sqrt{3}$

$\therefore$ $\tan 15°=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$，$\cot 15°=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\dfrac{2+\sqrt{3}}{1}=2+\sqrt{3}$



11.$\dfrac{2\sin 60°\cos 30°-\sin^2 45°\tan^2 60°+\tan 45°}{\sin 30°\cos 60°-\cos^2 45°\tan^2 30°}$之值爲 ＿＿＿＿＿。

【解答】12

【詳解】

$$\frac{2\sin 60°\cos 30°-\sin^2 45°\tan^2 60°+\tan 45°}{\sin 30°\cos 60°-\cos^2 45°\tan^2 30°}=\frac{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-(\frac{\sqrt{2}}{2})^2\cdot(\sqrt{3})^2+1}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}-(\frac{\sqrt{2}}{2})^2\cdot(\frac{\sqrt{3}}{3})^2}=\frac{1}{\frac{1}{4}-\frac{1}{6}}=12$$

12.求$\cos^2 10°+\cos^2 20°+\cos^2 30°+\cos^2 40°+\cos^2 50°+\cos^2 60°+\cos^2 70°+\cos^2 80°=$＿＿＿＿。

【解答】4

【詳解】

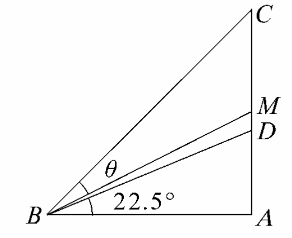
$\cos^2 10°+\cos^2 20°+\cos^2 30°+\cos^2 40°+\cos^2 50°+\cos^2 60°+\cos^2 70°+\cos^2 80°$

$=(\cos^2 10°+\cos^2 80°)+(\cos^2 20°+\cos^2 70°)+(\cos^2 30°+\cos^2 60°)+(\cos^2 40°+\cos^2 50°)$

$=(\sin^2 80°+\cos^2 80°)+(\sin^2 70°+\cos^2 70°)+(\sin^2 60°+\cos^2 60°)+(\sin^2 50°+\cos^2 50°)$

$=1+1+1+1=4$

13.如下圖，等腰直角△ABC中，$\overline{BD}$ 爲$\angle B$之角平分線，$\overline{BM}$ 爲 $\overline{AC}$ 之中線，若$\angle CBM=\theta$，則$\cot\theta=$ ＿＿＿＿＿。



【解答】3

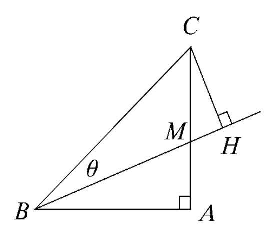
【詳解】

$\triangle ABM \sim \triangle HCM$

$\Rightarrow \quad \overline{AB} : \overline{BM} : \overline{MA} = \overline{HC} : \overline{CM} : \overline{MH} \quad \Rightarrow \quad 1 : \dfrac{\sqrt{5}}{2} : \dfrac{1}{2} = \overline{CH} : \dfrac{1}{2} : \overline{MH}$

$\Rightarrow \quad 2 : \sqrt{5} : 1 = 2\overline{CH} : 1 : 2\overline{MH} = 2\sqrt{5}\,\overline{CH} : \sqrt{5} : 2\sqrt{5}\,\overline{MH} \quad \Rightarrow \quad \overline{CH} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$，$\overline{MH} = \dfrac{1}{2\sqrt{5}}$

$\therefore \quad \overline{BH} = \dfrac{\sqrt{5}}{2} + \dfrac{1}{2\sqrt{5}} = \dfrac{3\sqrt{5}}{5} \quad \therefore \quad \cot\theta = \dfrac{\overline{BH}}{\overline{CH}} = \dfrac{\frac{3\sqrt{5}}{5}}{\frac{\sqrt{5}}{5}} = 3$



14.設$\tan\theta = \dfrac{1}{3}$，則$\dfrac{3\cos\theta + 4\sin\theta}{\cos\theta + 2\sin\theta}$之值爲__________。

【解答】$\dfrac{13}{5}$

【詳解】

$$\frac{3\cos\theta + 4\sin\theta}{\cos\theta + 2\sin\theta} = \frac{\frac{3\cos\theta}{\cos\theta} + \frac{4\sin\theta}{\cos\theta}}{\frac{\cos\theta}{\cos\theta} + \frac{2\sin\theta}{\cos\theta}} = \frac{3 + 4\tan\theta}{1 + 2\tan\theta} = \frac{3 + 4 \cdot \frac{1}{3}}{1 + 2 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{13}{5}$$

15.設$\angle A$爲銳角，且 $0^\circ < 4\angle A < 90^\circ$，若$\tan 4A = \cot 2A$，則$\sin 2A + \cos 3A$之值爲__________。

【解答】$\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$

【詳解】

因爲 $0^\circ < 4\angle A < 90^\circ$，所以 $0^\circ < 90^\circ - 2\angle A < 90^\circ$

又由餘角公式，則$\tan 4A = \cot 2A = \tan(90^\circ - 2A)$，故得 $4A = 90^\circ - 2A \quad \Leftrightarrow \quad 6A = 90^\circ$

$\therefore \quad A = 15^\circ$，因此$\sin 2A + \cos 3A = \sin 30^\circ + \cos 45^\circ = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$

16. θ爲銳角，設方程式$x^2 - (\tan\theta + \cot\theta)\,x - 2 = 0$ 有一根爲 $3 + \sqrt{7}$，則

(1)$\sin\theta\cos\theta$ 之值爲__________。(2) $(\sin\theta + \cos\theta)^2$ 之值爲__________

【解答】(1)$\dfrac{\sqrt{7}}{14}$ (2)$\dfrac{7+\sqrt{7}}{7}$

【詳解】

設$x^2 - (\tan\theta + \cot\theta)\,x - 2 = 0$ 之二根爲 $3 + \sqrt{7}$，β

二根之積$(3 + \sqrt{7})\,\beta = -2$，$\beta = \dfrac{-2}{3+\sqrt{7}} = \sqrt{7} - 3$

則(1)二根之和$(3 + \sqrt{7}) + (\sqrt{7} - 3) = \tan\theta + \cot\theta = \dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}$，$\therefore \quad \sin\theta\cos\theta = \dfrac{1}{2\sqrt{7}} = \dfrac{\sqrt{7}}{14}$

(2)$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=1+2\sin\theta\cos\theta=1+2\times\frac{\sqrt{7}}{14}=\frac{7+\sqrt{7}}{7}$