高雄市明誠中學 高一數學複習測驗　　日期：95.09.28					
範圍	1-2、3 實數、直線	班級	普一　　　班	姓名	
		座號			

一、選擇題 (每題 5 分)

1. (複選)a，b，c，d 均為有理數，且 $abcd\neq 0$，x，y 均為無理數，則下列敘述何者恆真？
(A) $a+bx$ 為無理數　(B) xy 為無理數　(C)若 $a+b\sqrt{3}=c+d\sqrt{3}$，則 $a=c$，$b=d$
(D) $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}$ 為無理數　(E)若 $a+x=b+y$，則 $a=b$，$x=y$

【解答】(A)(C)

【詳解】

(A)對。a，b 為有理數且均不為零，故 $a+bx$ 為無理數

(B)錯。令 $x=\sqrt{2}$，$y=3\sqrt{2}$，則 $xy=6$ 為有理數

(C)對。設 $b\neq d$，由 $a+b\sqrt{3}=c+d\sqrt{3}$，得 $\sqrt{3}=\dfrac{c-a}{b-d}$，矛盾，故 $b=d$，則 $a=c$

(D)錯。令 $a=1$，$b=-1$，則 $x=y=\sqrt{2}$，則 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=0$ 為有理數

(E)錯。令 $a=1$，$x=\sqrt{3}$，$b=0$，$y=1+\sqrt{3}$，則 $a+x=b+y$，但 $a\neq b$，$x\neq y$

2. (複選)試選出正確的選項：
(A) $0.3\overline{43}$ 不是有理數　(B) $0.\overline{34}>\dfrac{1}{3}$　(C) $0.\overline{34}>0.343$　(D) $0.\overline{34}<0.35$　(E) $0.\overline{34}=0.3\overline{43}$

【解答】(B)(C)(D)(E)

【詳解】$0.\overline{34}=0.343434\cdots$

3. (複選)若a，b，c均是有理數之二次方程式$ax^2+bx+c=0$ 有兩根為α，β，則下列何者正確？(A) $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$　(B)兩根為α，β必皆是有理數　(C)兩根的和$\alpha+\beta$必是有理數　(D)兩根的積$\alpha\beta$必是有理數

【解答】(A)(C)(D)

【詳解】

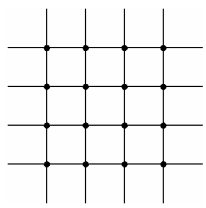
(A)對。$\because$　二根為α，β　$\therefore$　$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$

(B)錯。$ax^2+bx+c=0$ 之二根為 $\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

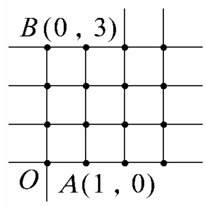
若b^2-4ac不為完全平方數，則兩根為α，β不是有理數

(C)對。$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$ 為有理數

(D)對。$\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$ 為有理數



4. 圖中是坐標平面上的十六個點（左、右、上、下間隔均相等），這些點中任意二點連成之直線不考慮無斜率的情形，則斜率最小者為下列哪一個數值？(A) -4　(B) -3　(C) -2　(D) $-\dfrac{3}{2}$　(E) -1



【解答】(B)

【詳解】建立座標系，利用斜率 $m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$，得 $m=\dfrac{3-0}{0-1}=-3$ 為最小

5. 下列各組點何者在同一直線上？

(A) $A(6，6)$，$B(4，7)$，$C(2，8)$ (B) $A(3，-2)$，$B(5，1)$，$C(10，0)$

(C) $A(0，-1)$，$B(3，-4)$，$C(2，1)$ (D) $A(-2，9)$，$B(10，-7)$，$C(12，-5)$

【解答】(A)

【詳解】

(A) $m_{\overline{AB}}=\dfrac{7-6}{4-6}=\dfrac{1}{-2}$，$m_{\overline{AC}}=\dfrac{8-6}{2-6}=\dfrac{2}{-4}=\dfrac{1}{-2}$， $m_{\overline{AB}}=m_{\overline{AC}}$ $\therefore$ $A，B，C$ 共線

(B) $m_{\overline{AB}}=\dfrac{1-(-2)}{5-3}=\dfrac{3}{2}$，$m_{\overline{AC}}=\dfrac{0-(-2)}{10-3}=\dfrac{2}{7}$， $m_{\overline{AB}}\neq m_{\overline{AC}}$ $\therefore$ $A，B，C$ 不共線

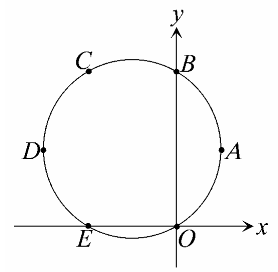
(C) $m_{\overline{AB}}=\dfrac{-4-(-1)}{3-0}=\dfrac{-3}{3}=-1$，$m_{\overline{AC}}=\dfrac{1-(-1)}{2-0}=1$， $m_{\overline{AB}}\neq m_{\overline{AC}}$ $\therefore A，B，C$ 不共線

(D) $m_{\overline{AB}}=\dfrac{-7-9}{10-(-2)}=\dfrac{-16}{12}=-\dfrac{4}{3}$，

$m_{\overline{AC}}=\dfrac{-5-9}{12-(-2)}=\dfrac{-14}{14}=-1$，$m_{\overline{AB}}\neq m_{\overline{AC}}$， $\therefore A，B，C$ 不共線

故選(A)

6. (複選)如圖，$O，A，B，C，D，E$ 六等分一個圓，此圓半徑為 2，則



(A) A 點的坐標為$(1，\sqrt{3})$ (B) B 點的坐標為$(0，2\sqrt{3})$

(C) C 點的坐標為$(-2，2\sqrt{3})$ (D) D 點的坐標為$(-3，\sqrt{3})$

(E) E 點的坐標為$(-2，0)$

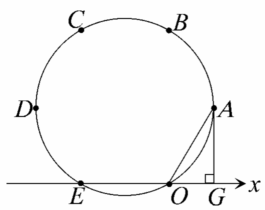
【解答】(A)(B)(C)(D)(E)

【詳解】

$\because$ $\overline{OA}$ = 半徑 $=2$，又$\angle AOE=120^\circ$

$\therefore$ $\angle AOG=60^\circ$ $\therefore$ $\overline{OG}=1$，$\overline{AG}=\sqrt{3}$ $\therefore$ $A(1，\sqrt{3})$

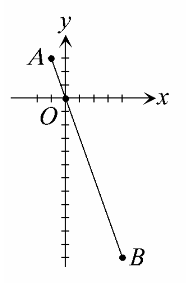
其餘同理可得。



7. (複選)設 $P(x，y)$為坐標平面上一點，且滿足 $\sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2}+\sqrt{(x-4)^2+(y+12)^2}=5\sqrt{10}$，則 P 點的位置可能在哪裡？(A)第一象限 (B)第二象限 (C)第三象限 (D)第四象限 (E)原點

【解答】(B)(D)(E)

【詳解】設 $A(-1，3)$，$B(4，-12)$，則



$\sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2}+\sqrt{(x-4)^2+(y+12)^2}=5\sqrt{10}$

表 $\overline{PA}+\overline{PB}=5\sqrt{10}=\overline{AB}$，所以 $P\in\overline{AB}$ (也就是 P 點於 $\overline{AB}$ 上)，即 P 點位在第 2 或第 4 象限或原點，故選(B)(D)(E)

二、填充題(每題 10 分)

1. 設$a=\sqrt{41-12\sqrt{5}}$，b為a的純小數部分，則$\dfrac{a}{4}+\dfrac{1}{b}$之值為__________。

【解答】$\dfrac{9}{4}$

【詳解】

$\because\quad a=\sqrt{41-12\sqrt{5}}=\sqrt{41-2\sqrt{180}}=6-\sqrt{5}\ =3.\cdots$，純小數部分 $b=(6-\sqrt{5})-3=3-\sqrt{5}$，

故 $\dfrac{a}{4}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{6-\sqrt{5}}{4}+\dfrac{1}{3-\sqrt{5}}=\dfrac{6-\sqrt{5}}{4}+\dfrac{3+\sqrt{5}}{4}=\dfrac{9}{4}$

2. 設 $a\in N$，若 $2+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{5}}}=\dfrac{803}{371}$，則 $a=$ ＿＿＿＿＿＿。

【解答】12

【詳解】$\because\quad \dfrac{803}{371}=2+\dfrac{61}{371}=2+\cfrac{1}{\cfrac{371}{61}}=2+\cfrac{1}{6+\cfrac{5}{61}}=2+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{\cfrac{61}{5}}}=2+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{12+\cfrac{1}{5}}}\quad\therefore\quad a=12$

3. 試寫出滿足 $|2x-1|<3$ 之所有整數 x 爲＿＿＿＿＿＿。

【解答】0，1

【詳解】

$|2x-1|<3\quad\Rightarrow -3<2x-1<3\quad\Rightarrow\quad -2<2x<4\quad\Rightarrow\quad -1<x<2$，故所求整數 x 爲 0，1

4. 設 a，b 均爲實數，若 $|x-1|\le b$ 的解爲 $-1\le x\le 3$，則 $b=$ ＿＿＿＿＿＿。

【解答】2

【詳解】由 $-1\le x\le 3\quad\Rightarrow\quad -2\le x-1\le 2\quad\Rightarrow\quad |x-1|\le 2\quad\therefore\quad b=2$

5. 設 a，$b\in R$ 且不等式 $|ax+1|>b$ 之解爲 $x>4$ 或 $x<-1$，則數對 $(a，b)=$ ＿＿＿＿＿＿。

【解答】$(-\dfrac{2}{3}，\dfrac{5}{3})$

【詳解】

【解一】即 $|ax+1|\le b$ 之解爲 $-1\le x\le 4$

(1) $b>0$

(2) $-b\le ax+1\le b$，$-b-1\le ax\le b-1$

(3)當 $a>0$ 時，$\dfrac{-b-1}{a}\le x\le\dfrac{b-1}{a}\quad\therefore\quad\dfrac{b-1}{a}=4$ 且 $\dfrac{-b-1}{a}=-1$

$\therefore\quad 4a=b-1$，$a=b+1\quad\therefore\quad a=-\dfrac{2}{3}$（不合）

當 $a<0$ 時，$\dfrac{-b-1}{a}\ge x\ge\dfrac{b-1}{a}\quad\therefore\quad\dfrac{-b-1}{a}=4$ 且 $\dfrac{b-1}{a}=-1\quad\therefore\quad a=-\dfrac{2}{3}$，$b=\dfrac{5}{3}$（合）

【解二】

$\dfrac{4-(-1)}{2}=\dfrac{5}{2}$；$\dfrac{4+(-1)}{2}=\dfrac{3}{2}\ |x-\dfrac{3}{2}|\le\dfrac{5}{2}\Rightarrow|2x-3|\le 5\Rightarrow|-\dfrac{2}{3}x+1|\le\dfrac{5}{3}$，即 $a=-\dfrac{2}{3}$，$b=\dfrac{5}{3}$

6. 設 $x\in N$，$f(x)$ 表 $\sqrt{x}$ 的整數部分，則 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(100)$ 之值爲＿＿＿＿＿＿。

【解答】625

【詳解】

$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(100)\ =[\sqrt{1}]+[\sqrt{2}]+[\sqrt{3}]+\cdots\cdots+[\sqrt{99}]+[\sqrt{100}]$

$=\overbrace{1+1+1}^{2^2-1^2\text{個}}+\overbrace{2+2+\cdots+2}^{3^2-2^2\text{個}}+\cdots+\overbrace{9+9+\cdots+9}^{10^2-9^2\text{個}}+10$

$=1(2^2-1^2)+2(3^2-2^2)+3(4^2-3^2)+\cdots+9(10^2-9^2)+10$

$=1\times 3+2\times 5+3\times 7+\cdots+9(19)+10=625$

7. $|2x+5|+|2x-1|=6$ 之解集合爲__________。

【解答】$\frac{-5}{2}\le x\le\frac{1}{2}$

【詳解】

【解一】利用$|a|+|b|\ge|a+b|$

$|2x+5|+|2x-1|=|2x+5|+|1-2x|\ge|2x+5+1-2x|=6$

此時$(2x+5)(1-2x)\ge0$，即$(2x+5)(2x-1)\le0 \quad\Rightarrow\quad \frac{-5}{2}\le x\le\frac{1}{2}$

【解二】利用距離和

$|2x+5|+|2x-1|=6\Rightarrow|x+\frac{5}{2}|+|x-\frac{1}{2}|=3$，表 x 與$-\frac{5}{2},\frac{1}{2}$距離和爲 3

因爲$-\frac{5}{2},\frac{1}{2}$距離亦爲 3$\Rightarrow$解爲$\frac{-5}{2}\le x\le\frac{1}{2}$

8. a是正實數，a的小數部分是b，$a^2+b^2=40$，則$a=$__________。

【解答】$3+\sqrt{11}$

【詳解】

$0<b<1 \quad\Rightarrow\quad 0<b^2<1$

$\because\quad a^2+b^2=40 \quad\Rightarrow\quad a^2=39.\cdots$，故$a=6.\cdots$

設$a=6+b$，則$a^2+b^2=40 \quad\Rightarrow\quad (6+b)^2+b^2=40 \quad\Rightarrow\quad b^2+6b-2=0$

$\therefore\quad b=\frac{-6\pm\sqrt{44}}{2}=-3\pm\sqrt{11}$（負不合），故$b=-3+\sqrt{11}$，則$a=6+b=3+\sqrt{11}$

9.設α，β爲$x^2+3x-2=0$ 之二根，求以 $|\alpha|$，$|\beta|$ 爲二根之一元二次方程式？（領導係數爲 1）

【解答】$x^2-\sqrt{17}\,x+2=0$

【詳解】

α，β爲$x^2+3x-2=0$ 之二根$\Rightarrow\begin{cases}\alpha+\beta=-3\\ \alpha\beta=-2\end{cases}$，

又以 $|\alpha|$，$|\beta|$ 爲二根之一元二次方程式爲$(x-|\alpha|)(x-|\beta|)=0$

$\Rightarrow\quad x^2-(|\alpha|+|\beta|)x+|\alpha||\beta|=0$，其中 $|\alpha||\beta|=|\alpha\beta|=|-2|=2$

$(|\alpha|+|\beta|)^2=|\alpha|^2+2|\alpha||\beta|+|\beta|^2=\alpha^2+\beta^2+2|\alpha\beta|=\alpha^2+\beta^2+4$

$=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+4=9-2(-2)+4=17\Rightarrow|\alpha|+|\beta|=\sqrt{17}$，方程式爲$x^2-\sqrt{17}\,x+2=0$

10.設 x，$y\in R$，$-2\le x<3$，$1<y\le4$，求

(1) $2x-y$ 的範圍______________。 (2) xy 的範圍__________。 (3) $\frac{x}{y}$ 的範圍________。

【解答】(1) $-8\le 2x-y<5$ (2) $-8\le xy<12$ (3) $-2<\frac{x}{y}<3$

【詳解】不等式只能相加，不能直接相減

(1)
$$\begin{array}{rcccc} & -4 & \le & 2x & < & 6 \\ +) & -4 & \le & -y & < & -1 \\ \hline & -8 & \le & 2x-y & < & 5 \end{array}$$

(2)取 4 個極端值的乘積 $\Rightarrow 4\times3=12; 3\times1=3; 4\times(-2)=-8; (-2)\times1=-2$
$$\begin{array}{rl} & -2 \le x < 3 \\ \times) & 1 < y \le 4 \\ \hline & -8 \le xy < 12 \end{array}$$

(3) $1<y\le4 \quad\Rightarrow\quad 1>\dfrac{1}{y}\ge\dfrac{1}{4}$
$$\begin{array}{rl} \times) & 3 > x \ge -2 \\ \hline \end{array}$$
仿(2)， $-2<\dfrac{x}{y}<3$

11. $x\in R$，求使 $|x-3|+|x+8|=k$ 有解之最小整數 k。

【解答】11

【詳解】

$\because\quad |x-3|+|x+8|=|3-x|+|x+8|\ge|(3-x)+(x+8)|=11$

$\therefore\quad |x-3|+|x+8|\ge11$

$\because\quad k=|x-3|+|x+8|$ 有實數解 $\quad\therefore\quad k\ge11$，故最小整數 $k=11$

12.設數線上三點$A(-5)$，$B(9)$，$P(x)$，已知$\overline{AP}$ ： $\overline{BP}$ $=3：4$，則$x=$__________。

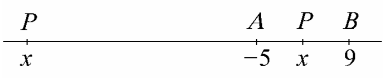
【解答】1 或 -47

【詳解】

當 A-P-B 時(內分點) $\quad\because\quad \overline{AP}$ ： $\overline{BP}$ $=3：4 \quad\therefore\quad x=\dfrac{3\times9+4\times(-5)}{3+4}=1$

當 P-A-B 時(外分點) $\quad\because\quad \overline{AP}$ ： $\overline{BP}$ $=3：4 \quad\therefore\quad x=\dfrac{-3\times9+4\times(-5)}{-3+4}=-47$

所以 $x=1$ 或 -47

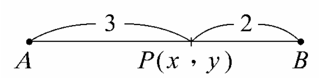


13.坐標平面上，若$A(-2，1)$，$B(8，6)$，P爲直線AB上的點，且滿足$\overline{AP}$ ： $\overline{PB}=3：2$，求P的坐標爲__________。

【解答】(4，4)或(28，16)

【詳解】

(i) $\begin{cases} x=\dfrac{(-2)\times2+8\times3}{3+2}=4 \\ y=\dfrac{1\times2+6\times3}{3+2}=4 \end{cases}$，得 $P(x，y)=(4，4)$



(ii) $\begin{cases} x=\dfrac{8\times3+(-2)\times(-2)}{3-2}=28 \\ y=\dfrac{6\times3+1\times(-2)}{3-2}=16 \end{cases}$，得 $P(x，y)=(28，16)$

14.已知直線L的方程式為 $3x-4y+5=0$

(1)過$(-3，2)$且平行L的直線方程式為__________。

(2)過$(1，-4)$且垂直L的直線方程式為__________。

【解答】(1) $3x-4y+17=0$　(2) $4x+3y+8=0$

【詳解】

(1)設過$(-3，2)$且平行 L 的直線方程式為 $3x-4y+k=0$

過$(-3，2)$ 代入 $3\times(-3)-4\times2+k=0 \Rightarrow k=17$ ，所求 $3x-4y+17=0$

(2)設過$(1，-4)$且垂直 L 的直線方程式為 $4x+3y+k=0$

過$(1，-4)$ 代入 $4\times1+3\times(-4)+k=0 \Rightarrow k=8$ ，所求 $4x+3y+8=0$