高雄市明誠中學 高一數學複習測驗					日期：96.02.08
範圍	3-6 多項不等式	班級	普一　　班	姓名	
		座號			

一、選擇題(每題 5 分)

1. 設 $f(x)$爲二次函數，且不等式 $f(x)>0$ 之解爲 $-2<x<4$，則 $f(2x)<0$ 之解爲
(A) $-1<x<2$　(B) $x<-1$ 或 $x>2$　(C) $x<-2$ 或 $x>4$　(D) $-4<x<8$
(E) $x<-4$ 或 $x>8$

【解答】(B)

【詳解】

$f(x)>0$ 的解爲 $-2<x<4$，即 $f(x)>0$ 的解爲 $a(x+2)(x-4)<0$ 的解，其中 $a<0$
而 $f(2x)<0$ 的解爲 $a(2x+2)(2x-4)<0$ 的解，即 $4a(x+1)(x-2)<0$
亦即$(x+1)(x-2)>0$ 的解，故 $f(2x)<0$ 的解爲 $x<-1$ 或 $x>2$

2. (複選)下列不等式，何者無實解？
(A) $x^2-x+2<0$　(B) $-x^2+2x-3\le 0$　(C) $x^2+3x-1>0$　(D) $-x^2+3x-5>0$
(E) $-x^2-2x+3>0$

【解答】(A)(D)

【詳解】

$\boxed{\text{性質：}f(x)=ax^2+bx+c\text{（}a\text{，}b\text{，}c\in R\text{，}a\neq 0\text{）恆正}\iff a>0\text{，}b^2-4ac<0}$

(A) $x^2-x+2>0$ 恆成立，$\therefore$　$x^2-x+2<0$ 無實解
(B) $x^2-2x+3>0$ 恆成立　$\Rightarrow$　$-x^2+2x-3<0$ 恆成立，$\therefore -x^2+2x-3\le 0$ 的解爲R
(D) $x^2-3x+5>0$ 恆成立　$\therefore$　$-x^2+3x-5<0$ 恆成立，$\therefore$　$-x^2+3x-5>0$ 無實解
(C)(E)的判別式$D>0$；$\therefore$　$x^2+3x-1>0$，$-x^2-2x+3>0$ 都有實解

3. (複選)設 a，$b\in R$，則下列敘述何者正確？
(A)若 $a>b$，則$\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$　(B)若$\dfrac{a}{b}>0$，則 $ab>0$　(C)若 $ab>0$，則$\dfrac{a}{b}>0$
(D)若 $ab\ge 0$，則$\dfrac{a}{b}\ge 0$　(E)若$\dfrac{a}{b}\ge 0$，則 $ab\ge 0$

【解答】(B)(C)(E)

【詳解】

(1) 當 $ab>0$ 時，$a>b\iff\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$；　當 $ab<0$ 時，$a>b\iff\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$
(2) $\dfrac{a}{b}>0\iff ab>0$；　$\dfrac{a}{b}\ge 0\iff ab\ge 0$，$b\neq 0$

4. (複選)不等式$(x-1)(x-2)(x-3)<0$ 與下列何者有相同解？
(A) $(x^3-1)(x-2)(x-3)<0$　(B) $(x-1)(x-2)^3(x-3)^5<0$　(C) $(x-1)^2(x-2)^4(x-3)^6>0$
(D)$\dfrac{x-1}{(x-2)(x-3)}<0$　(E)$\dfrac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}<0$

【解答】(A)(B)(D)(E)

【詳解】$(x-1)(x-2)(x-3)<0$ 之解爲$x<1$ 或 $2<x<3$
(A)對：$[(x-1)(x^2+x+1)](x-2)(x-3)<0\Rightarrow(x-1)(x-2)(x-3)<0$，其中$x^2+x+1$ 恆正
(B)對：$(x-2)^2(x-3)^4[(x-1)(x-2)(x-3)]<0$

$\Rightarrow\quad (x-1)(x-2)(x-3)<0$ 且 $x\neq 2$，$x\neq 3\quad\Rightarrow\quad x<1$ 或 $2<x<3$

(C)錯誤：$(x-1)^2(x-2)^4(x-3)^6>0$ 之解爲 $x\neq 1$，2，3

(D)對：原式 $\Rightarrow\quad (x-1)(x-2)(x-3)<0$ 且 $(x-2)(x-3)\neq 0\quad\Rightarrow\quad x<1$ 或 $2<x<3$

(E)對：原式 $\Rightarrow\quad (x-1)(x-2)(x-3)<0$

二、填充題(每題 10 分)

1. 一元二次不等式

(1) $6-5x-x^2>0$ 之解爲__________。　(2) $x^2-x+1>0$ 之解爲__________。

(3) $9x^2+1\leq 6x$ 之解爲__________。　(4) $2x^2-8x+11<0$ 之解爲__________。

【解答】(1) $-6<x<1$　(2) $x\in R$　(3) $x=\dfrac{1}{3}$　(4)無解

【詳解】

(1) $6-5x-x^2>0\Rightarrow x^2+5x-6<0\Rightarrow (x-1)(x+6)<0\Rightarrow -6<x<1$

(2) $\because$原式之 $D=(-1)^2-4\cdot 1\cdot 1=-3<0$，$x^2-x+1>0$ 恆成立，$\therefore\ x\in R$

(3) $9x^2+1\leq 6x\,(3x-1)^2\leq 0\Rightarrow (3x-1)^2=0\Rightarrow x=\dfrac{1}{3}$

(4)$\because$原式之 $D=(-8)^2-4\cdot 2\cdot 11=-24<0$，$2x^2-8x+11\quad>0$ 恆成立，

$\therefore\ 2x^2-8x+11<0$，無解

2. 設不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解爲 $-2<x<5$，則不等式 $ax^2+3bx-2c>0$ 之解爲________。

【解答】$4<x<5$

【詳解】

$-2<x<5\quad\Rightarrow\quad (x+2)(x-5)<0\quad\Rightarrow\quad x^2-3x-10<0\quad\Rightarrow\quad -x^2+3x+10>0$

$ax^2+bx+c>0$ 與 $-x^2+3x+10>0$ 爲同義不等式（即有相同解）

$\therefore\quad a=-t$，$b=3t$，$c=10t$，$t>0$，故 $ax^2+3bx-2c>0$，即 $-tx^2+9tx-20t>0$

$\Rightarrow\quad -x^2+9x-20>0\quad\Rightarrow\quad x^2-9x+20<0\quad\Rightarrow\quad (x-4)(x-5)<0\quad\Rightarrow\quad 4<x<5$

3. 設 a，b 爲常數，若 $ax^2+5x+b>0$ 的解爲 $\dfrac{1}{3}<x<\dfrac{1}{2}$，則 $a+b$ 的值爲__________。

【解答】-7

【詳解】

$\dfrac{1}{3}<x<\dfrac{1}{2}$ 爲 $(3x-1)(2x-1)<0$ 的解

$\therefore\quad ax^2+5x+b>0\quad\Leftrightarrow\quad (3x-1)(2x-1)<0$

$\Leftrightarrow\quad 6x^2-5x+1<0$

$\Leftrightarrow\quad -6x^2+5x-1>0$，

$\therefore\quad a=-6$，$b=-1$

4. 若二次函數 $y=2x^2-2ax+(5+2a)$ 的圖形恆在 $y=ax^2$ 圖形的上方，則實數 a 的範圍爲_____。

【解答】$-2<a<\dfrac{5}{3}$

【詳解】

$\because\quad y=2x^2-2ax+(5+2a)$的圖形恆在$y=ax^2$圖形的上方

$\therefore\quad 2x^2-2ax+(5+2a)>ax^2$恆成立，即$(2-a)x^2-2ax+(5+2a)>0$ 恆成立

$\therefore\quad 2-a>0$，且$D=a^2-(2-a)(5+2a)<0\quad\therefore\quad a<2$ 且$(a+2)(3a-5)<0$

$\therefore\quad a<2$ 且 $-2<a<\dfrac{5}{3}\quad\therefore\quad -2<a<\dfrac{5}{3}$

5. 不等式$(x+3)^{2007}\cdot(x-2)^{96}\cdot(x-5)^{95}<0$ 的解爲＿＿＿＿＿。

【解答】$-3<x<5$ 且 $x\neq 2$

【詳解】

$(x+3)^{2007}(x-2)^{96}(x-5)^{95}<0\quad\Leftrightarrow\quad(x+3)(x-2)^2(x-5)<0$

$x-2\neq 0$ 且$(x-2)^2>0\quad\Rightarrow\quad(x+3)(x-5)<0\quad\therefore\quad -3<x<5$

由(1)(2)交集得 $-3<x<5$，$x\neq 2$ 爲所求

6. 不等式$(2+x)(3-x)(x^2-x+2)(x^2-x-1)>0$ 的解爲＿＿＿＿＿。

【解答】$-2<x<\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ 或$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}<x<3$

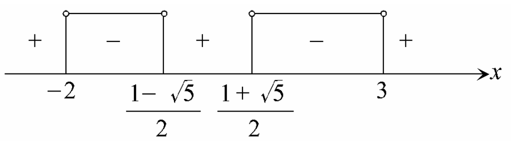
【詳解】

將各項領導係數化爲正

$(2+x)(3-x)(x^2-x+2)(x^2-x-1)>0\quad\Leftrightarrow\quad(x+2)(x-3)(x^2-x+2)(x^2-x-1)<0$

因$x^2-x+2=(x-\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{7}{4}>0$恆成立，且$x^2-x-1=(x-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2})(x-\dfrac{1-\sqrt{5}}{2})$

原式化爲$(x+2)(x-3)(x-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2})(x-\dfrac{1-\sqrt{5}}{2})<0$，



，$\therefore\quad -2<x<\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ 或$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}<x<3$

7.不等式$x^4-3x^3-3x^2+7x+6\leq 0$ 之解爲＿＿＿＿＿。

【解答】$x=-1$ 或 $2\leq x\leq 3$

【詳解】

令$f(x)=x^4-3x^3-3x^2+7x+6$

$\Rightarrow\quad f(2)=16-3\cdot 8-3\cdot 4+14+6=0$，$f(3)=81-3\cdot 27-3\cdot 9+21+6=0$

$\Rightarrow\quad(x-2)(x-3)\mid f(x)$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 1+2+\ 1 \\
\hline
1-5+6\ ) & 1-3-\ 3+\ 7+6 \\
 & 1-5+\ 6 \\
\hline
 & \ \ +2-\ 9+\ 7 \\
 & \ \ +2-10+12 \\
\hline
 & \ \ \ \ +\ 1-\ 5+6 \\
 & \ \ \ \ +\ 1-\ 5+6 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

$\Rightarrow\quad f(x)=(x-2)(x-3)(x^2+2x+1)=(x+1)^2(x-2)(x-3)$

$\Rightarrow\quad(x+1)^2(x-2)(x-3)\leq 0$

$\Rightarrow\quad$(1)當$x\neq -1$時 $\quad\Rightarrow\quad(x-2)(x-3)\leq 0$，$2\leq x\leq 3$

(2)當$x=-1$時 $\Rightarrow$ 亦滿足等號

故由(1)(2)得$x=-1$ 或 $2\le x\le 3$

8. 求滿足下列不等式組的正整數 x：$\begin{cases} 6x+\dfrac{5}{7}>4x+7 \\ 8x+3<4x+50 \end{cases}$

【解答】4，5，6，⋯，10，11

【詳解】

$\begin{cases} 6x+\dfrac{5}{7}>4x+7 \\ 8x+3<4x+50 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x>\dfrac{44}{7} \\ 4x<47 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{22}{7}<x<\dfrac{47}{4}$，$x$ 的正整數值爲 4，5，6，⋯，10，11

9. 不等式 $2-x\le 4+2x\le 6$ 的解爲__________。

【解答】$\dfrac{-2}{3}\le x\le 1$

【詳解】$2-x\le 4+2x\le 6 \Rightarrow \begin{cases} 2\le 4+3x \\ 4+2x\le 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2\le 3x \\ 2x\le 2 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{-2}{3}\le x\le 1$

10.高次不等式$(x^3+1)(x^3-8)>0$ 之解爲__________。

【解答】 $x<-1$ 或 $x>2$

【詳解】

$(x^3+1)(x^3-8)>0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2-x+1)(x-2)(x^2+4x+4)>0$

其中 $x^2-x+1>0, x^2+4x+4>0$ 恆成立 $\Rightarrow (x+1)(x-2)>0$，其解$x<-1$ 或$x>2$

11.若$x-1$ 爲$f(x)=x^4+kx^3+2x^2+x-6$ 的因式，則$f(x)\ge 0$ 之解爲__________。

【解答】$x\ge 1$ 或 $x\le -2$

【詳解】

$f(x)=x^4+kx^3+2x^2+x-6 \Rightarrow f(1)=1+k+2+1-6=0 \Rightarrow k=2$

$\therefore$ $f(x)=x^4+2x^3+2x^2+x-6=(x-1)(x^3+3x^2+5x+6)=(x-1)(x+2)(x^2+x+3)$

$\because$ $x^2+x+3>0$ $\therefore$ $f(x)\ge 0$ 之解爲$(x-1)(x+2)\ge 0$，即$x\ge 1$ 或$x\le -2$

12.已知$f(x)=x^4-5x^3+3x^2+19x-30$，$f(x)=0$ 有一根 $2+i$，則$f(x)<0$ 之解爲__________。

【解答】$-2<x<3$

【詳解】

$f(x)=[x-(2+i)][x-(2-i)]Q(x)=(x^2-4x+5)(x^2-x-6)$ (以除法除之，求得)

$f(x)<0$，$(x^2-4x+5)(x^2-x-6)<0 \Rightarrow x^2-x-6<0$（$\because$ $x^2-4x+5>0$ 恆成立）

$(x-3)(x+2)<0 \Rightarrow -2<x<3$

13.設$f(x)=x^2-ax+(a+2)$，$a\in R$，則

(1)若$\forall x\in R$，$f(x)>0$ 恆成立，則a之範圍爲__________。

(2)若$\forall x>0$，$f(x)>0$ 恆成立，則a之範圍爲__________。

【解答】(1) $2-\sqrt{3}<a<2+\sqrt{3}$ (2) $2-\sqrt{3}<a<2+\sqrt{3}$ 或 $-2<a<0$

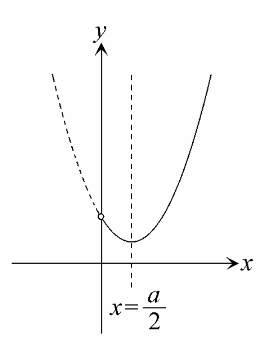
【詳解】

(1) $\forall x\in R$，$f(x)>0$ 恆成立 $\Rightarrow D<0$

$\therefore$ $a^2-4\cdot 1\cdot(a+2)<0 \Rightarrow a^2-4a-8<0 \Rightarrow 2-\sqrt{3}<a<2+\sqrt{3}$

(2) $y=f(x)=x^2-ax+(a+2)=(x-\dfrac{a}{2})^2-\dfrac{a^2}{4}+a+2$

①

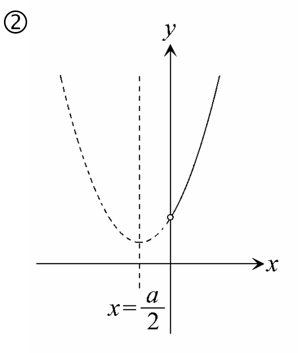


當 $\frac{a}{2} \geq 0$ 時，$f(\frac{a}{2}) = -\frac{a^2}{4} + a + 2 > 0$

$\Rightarrow \quad a^2 - 4a - 8 < 0 \quad \Rightarrow \quad 2-\sqrt{3} < a < 2+\sqrt{3}$

$\therefore$ 由 $a \geq 0$ 且 $2-\sqrt{3} < a < 2+\sqrt{3}$ 可得 $2-\sqrt{3} < a < 2+\sqrt{3}$

②



當 $\frac{a}{2} < 0$ 時，$f(0) = a + 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad a > -2$

$\therefore$ 由 $a < 0$ 且 $a > -2$ 可得 $-2 < a < 0$

由①，②可知 $2-\sqrt{3} < a < 2+\sqrt{3}$ 或 $-2 < a < 0$

14.解不等式 $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) \geq 120$。

【解答】$x \geq 6$ 或 $x \leq -1$

【詳解】

$\therefore \quad [(x-1)(x-4)][(x-2)(x-3)] - 120 \geq 0 \quad \therefore \quad (x^2-5x+4)(x^2-5x+6) - 120 \geq 0$

$\Rightarrow \quad (x^2-5x)^2 + 10(x^2-5x) - 96 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad (x^2-5x+16)(x^2-5x-6) \geq 0$

$\because \quad x^2 - 5x + 16 > 0$ 恆成立，$\forall x \in R$

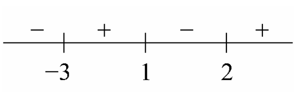
$\therefore \quad x^2 - 5x - 6 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad (x-6)(x+1) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \geq 6$ 或 $x \leq -1$

15.不等式 $\frac{x-2}{(x-1)(x+3)} \geq 0$ 之解爲__________。

【解答】$-3 \leq x \leq 1$ 或 $x \geq 2$

【詳解】

$\because \quad \frac{x-2}{(x-1)(x+3)} \geq 0 \quad \therefore \quad (x-1)(x+3)(x-2) \geq 0$，



故 $-3 \leq x \leq 1$ 或 $x \geq 2$

16.不等式 $\frac{2x}{x-1} \leq x+2$ 的解爲__________。

【解答】$-1 \leq x < 1$ 或 $x \geq 2$

【詳解】

$\frac{2x}{x-1} \leq x+2 \quad \Rightarrow \quad (x+2) - \frac{2x}{x-1} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{(x+2)(x-1)-2x}{x-1} \geq 0 \Rightarrow \quad \frac{x^2-x-2}{x-1} \geq 0$

$\Rightarrow \quad (x^2-x-2)(x-1) \geq 0$，但 $x \neq 1$

$\Rightarrow \quad (x-2)(x+1)(x-1) \geq 0$，但 $x \neq 1 \quad \Rightarrow \quad -1 \leq x \leq 1$ 或 $x \geq 2$，但 $x \neq 1$

得 $-1 \leq x \leq 1$ 或 $x \geq 2$

17.解不等式$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+4}\geq\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+2}$ 。

【解答】$-4<x<-3$ 或 $-\frac{5}{2}\leq x<-2$ 或 $x>-1$

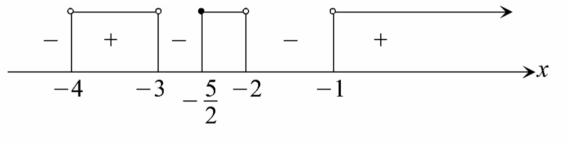
【詳解】

$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+4}\geq\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+2}\Rightarrow\quad\frac{2x+5}{(x+1)(x+4)}\geq\frac{2x+5}{(x+3)(x+2)}$

$\Rightarrow\quad(2x+5)\left[\frac{1}{(x+1)(x+4)}-\frac{1}{(x+2)(x+3)}\right]\geq 0$

$\Rightarrow\quad(2x+5)\cdot\frac{(x+2)(x+3)-(x+1)(x+4)}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}\geq 0\quad\Rightarrow(2x+5)\cdot\frac{2}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}\geq 0$

$\Rightarrow\quad(2x+5)(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)\geq 0$ 且$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)\neq 0$



$\therefore\quad -4<x<-3$ 或 $-\frac{5}{2}\leq x<-2$ 或 $x>-1$