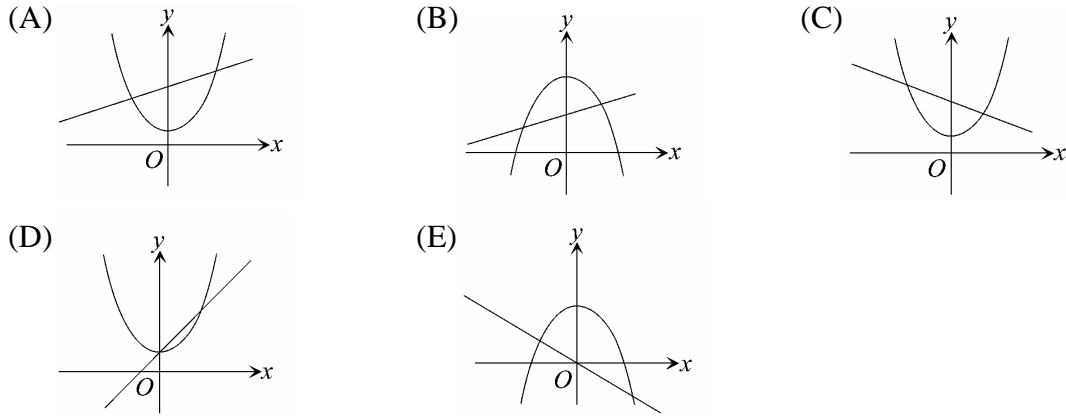


範圍	3-4 多項函數	班級	普一 班	姓名
		座號		名

一、選擇題(每題 10 分)

1. 下列何者可能是直線 $y = ax + b$ 與拋物線 $y = ax^2 + b$ 圖形的聯集？



【解答】(D)

【詳解】

直線 $y = ax + b$ ，拋物線 $y = ax^2 + b$ 與 y 軸交點均為 $(0, b)$

又若 $a > 0$ 時， $y = ax + b$ 的斜率 a 為正，直線向右上升，而拋物線 $y = ax^2 + b$ 開口向上

2. (複選) 在 xy 平面上，有關圖形的敘述，何者正確？

- (A) $y = x^2$ 圖形對稱於 x 軸
- (B) $y = x^2$ 對於 x 軸的對稱圖形為 $y = -x^2$
- (C) $y = x^2 + 2$ 圖形係由 $y = x^2$ 向上平移 2 單位而得
- (D) $y = (x + 1)^2 + 2$ 圖形係由 $y = x^2$ 向右平移 1 單位，再向上平移 2 單位而得
- (E) $y = (2x + 1)^2 - 2$ 圖形的對稱軸為 $2x + 1 = 0$

【解答】(B)(C)(E)

【詳解】

(A) $y = x^2$ 圖形對稱於 $x = 0$ (y 軸)

(B) $\because P(x, y)$ 對 x 軸的對稱點為 $Q(x, -y)$

將 y 用 $-y$ 代入 $\therefore y = x^2$ 對於 x 軸的對稱圖形為 $y = -x^2$

(C) 利用 $y = f(x)$ 向上平移 2 單位 $\rightarrow y - 2 = f(x)$ ，即 $y = f(x) + 2$

$\therefore y = x^2$ 向上平移 2 單位得 $y = x^2 + 2$

(D) $y = x^2$ 向右平移 1 單位得 $y = (x - 1)^2$ ，再向上平移 2 單位得 $y = (x - 1)^2 + 2$

(E) $y = (2x + 1)^2 - 2 = 4(x + \frac{1}{2})^2 - 2$ 的對稱軸為 $x + \frac{1}{2} = 0$ ，即 $2x + 1 = 0$

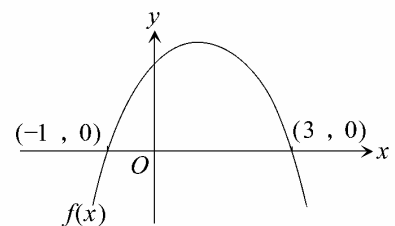
3. (複選) 若函數 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 的圖形如下圖，則下列敘

- 述何者正確？(A) $a < 0$ (B) $b > 0$ (C) $c < 0$
- (D) $b^2 - 4ac < 0$ (E) $9a + 4b + 2c > 0$

【解答】(A)(B)(E)

【詳解】

(A) \because 圖形向下凹 $\therefore a < 0$



(B) ∵ 頂點為 $(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a})$ 在第一象限, $b > 0$,

故 $-\frac{b}{2a} > 0 \Rightarrow \frac{b}{2a} < 0 \Rightarrow b > 0$ (即左同右異)

(C) ∵ 圖形交 y 軸於 $(0, c)$ ∴ $c > 0$

(D) ∵ 圖形交 x 軸於相異兩點 ∴ $f(x) = 0$ 有二不等實根, ∴ $D = b^2 - 4ac > 0$

(E) $f(3) = 9a + 3b + c = 0$

$$\Rightarrow 9a + 4b + 2c = (9a + 3b + c) + (b + c) = f(3) + (b + c) = 0 + (b + c) > 0$$

4. (複選) 坐標平面上有四個拋物線方程式的圖形, 試選出下列敘述

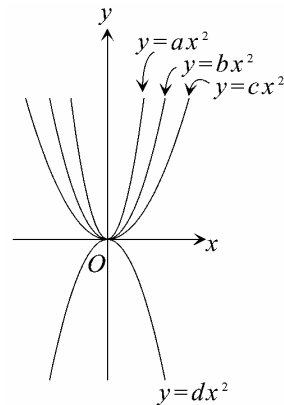
正確者? (A) $a > d$ (B) $b > d$ (C) $c > d$ (D) $c > b$ (E) $a > b$

【解答】(A)(B)(C)(E)

【詳解】

二次函數 $y = mx^2$, $m > 0$ 時開口向上, $m < 0$ 時開口向下

又 $|m|$ 愈大開口愈小 $\Rightarrow a > b > c > 0 > d$



二、填充題(每題 10 分)

1. 已知二次函數 $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, 圖形以 $(2, 3)$ 為頂點, 又通過點 $(3, 1)$, 則

數對 $(a, b, c) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【解答】 $(-2, 8, -5)$

【詳解】

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c = a(x-2)^2 + 3 \dots\dots \textcircled{1}, (3, 1) \text{ 代入 } \textcircled{1} \Rightarrow a = -2$$

$$\therefore f(x) = -2(x-2)^2 + 3 = -2x^2 + 8x - 5, \text{ 即數對 } (a, b, c) = (-2, 8, -5)$$

2. 某電影院的每張票價 200 元時, 觀眾有 600 人, 若票價每減少 10 元時, 則觀眾就增加 50 人, 則每張電影票價訂為 元時, 可使電影院的收入最多。

【解答】160

【詳解】

$$\begin{aligned} \text{設票價減 } 10x \text{ 元時, 可使收入最多, 收入 } y &= (200 - 10x)(600 + 50x) = 500(-x^2 + 8x + 240) \\ &= 500[-(x-4)^2 + 256] \end{aligned}$$

當 $x = 4$, 即票價為 $200 - 10 \times 4 = 160$ 元時, 收入最多 $500 \times 256 = 128000$ 元

3. 設 m 為實數, 若二次函數 $y = mx^2 + 2x + m - 2$ 之圖形恆在直線 $y = -2$ 的上方, 則 m 的範圍為 。

【解答】 $m > 1$

【詳解】

$mx^2 + 2x + m - 2 > -2$ 恆成立, 即 $mx^2 + 2x + m > 0$ 恆成立

$$\text{則 } \begin{cases} m > 0 \\ 4 - 4m^2 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m > 0 \dots\dots \textcircled{1} \\ m < -1 \text{ 或 } m > 1 \dots\dots \textcircled{2} \end{cases}$$

由 $\textcircled{1} \cap \textcircled{2}$ 得 $m > 1$

4. 設二次函數 $y = 2x^2 + 2x - 1$ 之圖形為 Γ , 若將圖形 Γ 沿坐標軸向右平移 3 個單位, 再向下平移 2 個單位, 則所得新圖形的函數為 $y = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【解答】 $2x^2 - 10x + 9$

【詳解】

圖形右移 3 單位，下移 2 單位， $(x-3, y+2)$ 代入原式，則

$$\text{原式} \Rightarrow y+2 = 2(x-3)^2 + 2(x-3) - 1 \Rightarrow y+2 = 2(x^2 - 6x + 9) + 2x - 6 - 1$$

$$\text{得 } y = 2x^2 - 10x + 9$$

5. 設 k 為實數，若二次函數 $f(x) = x^2 - 4x + (k+1)$ ，在 $0 \leq x \leq 3$ 時，有最大值 2007，求 k 之值為_____。

【解答】2006

【詳解】

$$f(x) = x^2 - 4x + (k+1) \quad (0 \leq x \leq 3) = (x-2)^2 + (k-3)$$

$$\text{當 } x=0 \text{ 時，有最大值 } k+1 = 2007 \Rightarrow k = 2006$$

6. 二次函數 $y = x^2 - (k+2)x + (k+2)$ 的圖形

(1) 都在 x 軸上方時， k 值的範圍是_____。(2) 與 x 軸相交時， k 值的範圍是_____。

【解答】(1) $-2 < k < 2$ (2) $k \leq -2$ 或 $k \geq 2$

【詳解】

(1) 在 x 軸上方時，即 $y = x^2 - (k+2)x + (k+2) > 0$ 恆成立

$$D = [-(k+2)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot (k+2) < 0 \Rightarrow k^2 - 4 < 0 \Rightarrow -2 < k < 2$$

(2) 與 x 軸相交時， $x^2 - (k+2)x + (k+2) = 0$

$$D = [-(k+2)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot (k+2) \geq 0 \Rightarrow k^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow k \leq -2, k \geq 2$$

7. 將函數 $y = 2x^2$ 的圖形向左移 3 單位，並向上移 4 單位，所得之圖形若是 $y = f(x)$ 的函數圖形，則 $f(x) =$ _____。

【解答】 $2(x+3)^2 + 4$

【詳解】還原 $(x, y) \Rightarrow (x+3, y-4)$

$$y = 2x^2 \xrightarrow{\text{向左平移3單位}} y = 2(x+3)^2 \xrightarrow{\text{向上平移4單位}} y - 4 = 2(x+3)^2 \Rightarrow y = 2(x+3)^2 + 4$$

8. 若二次函數 $y = 2x^2 - x + 4$ ，當 $-4 \leq x \leq 0$ 時， y 之最大值為 M ，最小值為 m ，則 $M + m$ 之值為_____。

【解答】44

【詳解】

$$y = 2x^2 - x + 4 = 2\left(x^2 - \frac{1}{2}x\right) + 4$$

$$= 2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + 4 - 2 \cdot \frac{1}{16} = 2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{31}{8}, \text{此拋物線頂點為 } \left(\frac{1}{4}, \frac{31}{8}\right)$$

\Rightarrow 當 $x=0$ 時，有最小值 $m=4$ ；

$$\text{當 } x=-4 \text{ 時，有最大值 } M = 2(-4)^2 - (-4) + 4 = 2 \cdot 16 + 4 + 4 = 40$$

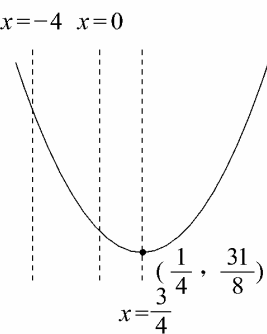
$$\therefore M + m = 44$$

9. 二次函數 $y = ax^2 + bx + 5$ 在 $x=2$ 時有最小值 3，則數對 $(a, b) =$ _____。

【解答】 $\left(\frac{1}{2}, -2\right)$

【詳解】

$$y = ax^2 + bx + 5 = a(x-2)^2 + 2 = ax^2 - 4ax + 4a + 2 \Rightarrow \begin{cases} b = -4a \\ 4a + 2 = 5 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{2}, b = -2$$



10.某班數學測驗，成績最低者為 20 分，最高者為 90 分。請你設計一線性函數，使原來 40 分者為 60 分，原來 90 分者為 100 分。則依函數，最低分者為_____分。

【解答】44

【詳解】

設線性函數 $y = ax + b$ (a, b 為常數)

由已知條件， $x = 40$ 時， $y = 60$ ； $x = 90$ 時， $y = 100$

$$\therefore 40a + b = 60 \cdots \cdots \textcircled{1}; 90a + b = 100 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\text{解}\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{得 } a = \frac{4}{5}, b = 28 \quad \therefore y = \frac{4}{5}x + 28$$

$$\text{於 } x = 20 \text{ 時, } y = \frac{4}{5} \times 20 + 28 = 16 + 28 = 44$$

11.一物體自 1000 公尺高處自由落下，則物體距離地面的高度 y 為落下時間 t 的函數，其關係式設 $y = 1000 - 4.9t^2$ ， y 的單位是公尺， t 的單位是秒，則

(1)落下 10 秒時，高度為_____。(2)第 10 秒落下的距離為_____。

(3)自落下到著地歷時_____秒。

【解答】(1) 510 公尺 (2)(3) $\frac{100}{7}$

【詳解】

$$(1) x = 10 \Rightarrow y = 1000 - 4.9 \times 10^2 = 510$$

$$(2) x = 11 \Rightarrow y = 1000 - 4.9 \times 11^2 = 407.1, \text{ 第 10 秒落下的距離為 } 510 - 407.1 = 102.9$$

$$(3) y = 0 \Rightarrow 0 = 1000 - 4.9x^2 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{10000}{49}} = \frac{100}{7}$$

12.二次函數 $y = f(x)$ 圖形通過 $(-2, 3)$, $(-1, 0)$, $(1, 6)$ 三點，則

(1) $f(x) =$ _____。(2) 對稱軸方程式為_____。

【解答】(1) $2x^2 + 3x + 1$ (2) $x = -\frac{3}{4}$

【詳解】

(1) 設 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ，過 $(-2, 3)$, $(-1, 0)$, $(1, 6)$ 三點代入

$$\begin{cases} 4a - 2b + c = 3 \\ a - b + c = 0 \\ a + b + c = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = 2x^2 + 3x + 1 = 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{8}$$

13.已知二次函數 $y = f(x) = ax^2 + bx + \frac{1}{a}$ ，在 $x = 3$ 時，有最大值 8，則數對 $(a, b) =$ _____。

【解答】 $(-1, 6)$

【詳解】

$$\therefore y = f(x) \text{ 在 } x = 3 \text{ 時, 有最大值 } 8 \quad \therefore y = f(x) = a(x - 3)^2 + 8 = ax^2 - 6ax + (9a + 8)$$

$$\text{又已知 } y = f(x) = ax^2 + bx + \frac{1}{a} \quad \therefore \begin{cases} b = -6a \cdots \cdots \textcircled{1} \\ \frac{1}{a} = 9a + 8 \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\text{由}\textcircled{2} \text{知 } 9a^2 + 8a - 1 = 0 \Rightarrow (9a - 1)(a + 1) = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{9} \text{ 或 } -1$$

$$\therefore y = f(x) \text{ 有最大值 } \therefore a = -1, b = 6, \text{ 即 } (a, b) = (-1, 6)$$

14. 設 $y = |4 - x^2| + 3x$ ，若 $|x| \leq 4$ ，

(1) 當 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 時， y 有最大值 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) 當 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 時， y 有最小值 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

【解答】(1) $x = 4$ 時， y 有最大值 24；(2) $x = -2$ 時， y 有最小值 -6

【詳解】

$y = |4 - x^2| + 3x$ 中

當 $x \geq 2$ 時， $y = x^2 - 4 + 3x = x^2 + 3x - 4$ ， $x = 2$ 時， $y = 6$

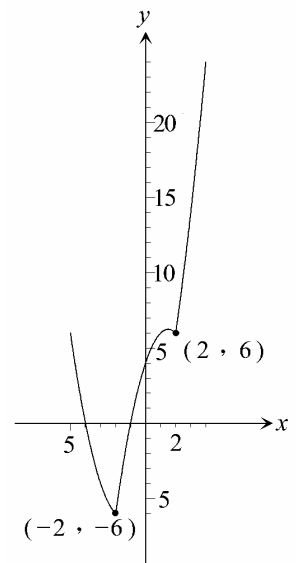
當 $-2 < x < 2$ 時， $y = 4 - x^2 + 3x = -x^2 + 3x + 4 = -(x - \frac{3}{2})^2 + \frac{25}{4}$

當 $x \leq -2$ 時， $y = x^2 - 4 + 3x = x^2 + 3x - 4$ ， $x = -2$ 時， $y = -6$

其圖形如右： $|x| \leq 4 \Rightarrow -4 \leq x \leq 4$

當 $x = 4$ 時， y 有最大值 $4^2 + 3 \times 4 - 4 = 24$ ；

當 $x = -2$ 時， y 有最小值 -6



15. 設三次函數 $f(x)$ 的部分圖形如下圖，求 $f(x)$ 。

【解答】 $(x - 1)(x + 2)(-\frac{1}{4}x + 1)$

【詳解】

$\because f(x)$ 圖形交 x 軸於 $(-2, 0)$ ， $(1, 0)$

$\therefore f(x) = 0$ 有 -2, 1 的根 $\therefore f(x)$ 有 $(x + 2)(x - 1)$ 的因式

令 $f(x) = (ax + b)(x + 2)(x - 1)$ ， $a, b \in R$ ， $a \neq 0$

$\because f(x)$ 圖形過點 $(-1, -\frac{5}{2})$ ， $(0, -2)$

$$\therefore \begin{cases} -\frac{5}{2} = (-a + b)(1)(-2) \\ -2 = (b)(2)(-1) \end{cases} \therefore b = 1, a = -\frac{1}{4},$$

$\therefore f(x) = (x - 1)(x + 2)(-\frac{1}{4}x + 1)$

