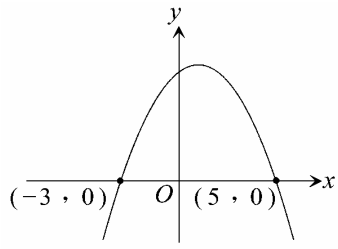
高雄市明誠中學 高一數學複習測驗 日期：96.01.18					
範圍	3-4、5 多項函數、方程式	班級	普一 班	姓名	
		座號			

一、選擇題(每題 5 分)



1. (複選)如圖$y = ax^2 + bx + c$且知$f(x)$有極大值 6，則下列哪些關係式是正確的？

(A) $a < 0$，$b^2 - 4ac > 0$ (B) $f(1) - f(-1) = 0$ (C) $a - b + c > 0$

(D) $f(8) - f(-6) = 0$ (E) $a < 0$，$b^2 - 4ac < 0$

【解答】(A)(C)(D)

【詳解】

$f(x) = ax^2 + bx + c$，由圖形知開口向下

$\therefore\ a < 0$ 且$f(x) = 0$ 有解 -3 及 5 $\therefore\ b^2 - 4ac > 0$

$\therefore$ 當$x = 1$ 時，$f(x)$有極大值 6$\Rightarrow$頂點$(1, 6)$

設$f(x) = a(x-1)^2 + 6$，$(-3, 0)$代入，$\therefore\ a = -\dfrac{3}{8}$

$\therefore\ f(x) = -\dfrac{3}{8}(x-1)^2 + 6 = -\dfrac{3}{8}x^2 + \dfrac{3}{4}x + \dfrac{45}{8}$

$\Rightarrow\ f(1) - f(-1) = a + b + c - (a - b + c) = 2b = 2 \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{2} \neq 0$

由圖形知$f(-1) = a - b + c > 0$

$f(8) - f(-6) = [-\dfrac{3}{8}(8-1)^2 + 6] - [-\dfrac{3}{8}(-6-1)^2 + 6] = 0$

2. (複選)對於二次函數$f(x) = -x^2 + x + 3$的敘述，下列何者正確？

(A)頂點($\dfrac{1}{2}$，3) (B)對稱軸$x + \dfrac{1}{2} = 0$ (C)若$-1 \le x \le 1$，則$f(x)$之最大值$\dfrac{13}{4}$

(D)若$-2 \le x \le 0$，則$f(x)$之最大值 3 (E)將$y = -x^2 + x + 3$的圖形水平右移 2 單位，再鉛直下移 1 單位所得的拋物線方程式爲$y = -(x - \dfrac{5}{2})^2 + \dfrac{9}{4}$

【解答】(C)(D)(E)

【詳解】

(A)錯。$f(x) = -(x - \dfrac{1}{2})^2 + \dfrac{13}{4}$ $\Rightarrow$ 頂點爲($\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{13}{4}$)

(B)錯。對稱軸：$x - \dfrac{1}{2} = 0$

(C)對。由$x = \dfrac{1}{2}$在 $-1 \le x \le 1$ 範圍內，故最大值爲 $f(\dfrac{1}{2}) = \dfrac{13}{4}$

(D)對。由$x = \dfrac{1}{2}$不在 $-1 \le x \le 1$ 範圍內，故最大值爲$f(0) = 3$

(E)對。經配方 $y = -(x - \dfrac{1}{2})^2 + \dfrac{13}{4}$，原頂點($\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{13}{4}$) 經右移 2，下移 1，新頂點($\dfrac{5}{2}$，$\dfrac{9}{4}$)

$\Rightarrow y = -(x - \dfrac{5}{2})^2 + \dfrac{9}{4}$

3. (複選)設 $f(x)$爲實係數多項式，a，$b \in R$，$a < b$，則下列敘述何者正確？

(A)若 $f(a)f(b) < 0$，則 $f(x) = 0$ 在 a，b 間至少有一個實根

(B)若 $f(a)f(b)<0$，則 $f(x)=0$ 在 a，b 間可能恰有兩個實根

(C)若 $f(a)f(b)>0$，則 $f(x)=0$ 在 a，b 間無實根

(D)若 $f(x)=0$ 在 a，b 間至少有一實根，則 $f(a)f(b)<0$

(E)若 $f(x)=0$ 在 a，b 間恰有兩個實根，則 $f(a)f(b)>0$

【解答】(A)(E)

【詳解】

根據勘根定理：若 $f(a)f(b)<0$，則 $f(x)=0$ 至少有一實根介在 a，b 間

其實此時介在 a，b 間的實根共有奇數個

而若 $f(a)f(b)>0$，則 $f(x)=0$ 介在 a，b 間的實根共有偶數個（含 0 個）

$\therefore$ 選(A)(E)

4. (複選)關於整係數三次函數 $f(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$，判斷下列選項何者爲真？

(A) $f(x)=0$ 至少有一實根 (B)若 $f(i)=1-i$，則 $f(-i)=1+i$，其中 $i^2=-1$

(C)若 p 和 q 是互質的整數且 $p\mid a_1$，$q\mid a_0$，則 $px-q$ 是 $f(x)$ 的因式

(D)設 a，b 爲兩相異實數，若 $f(a)f(b)>0$，則 $f(x)=0$ 在 a 與 b 之間沒有實根

【解答】(A)(B)

【詳解】

(A)對。$\because$ $f(x)\in R[x]$，若有虛根，必有共軛虛根

故若無實根，則會產生 4 個虛根，矛盾（$\because$ $\deg f(x)=3$，只有 3 個根）

故至少有一實根

(B)對。若 $f(x)\in R[x]$，則 $f(\bar{z})=\overline{f(z)}$，故 $f(-i)=f(\bar{i})=\overline{f(i)}=\overline{1-i}=1+i$

(C)錯。由整係數一次因式檢驗法，$px-q$ 可能是 $f(x)$ 的因式，但不一定是 $f(x)$ 的因式

(D)錯。$f(a)f(b)>0$，則 $f(x)=0$ 在 a，b 之間可能有零或偶數個實根

5. (複選)下列何者是方程式 $32x^4+24x^3-44x^2-6x+9=0$ 的有理根？

(A) $\frac{-3}{2}$ (B) $\frac{-3}{4}$ (C) $\frac{-1}{2}$ (D) $\frac{3}{2}$ (E) $\frac{3}{4}$

【解答】(A)(C)(E)

【詳解】

設 $32x^4+24x^3-44x^2-6x+9=0$ 的有理根爲 $\frac{b}{a}$，a，b 爲互質的整數，則 $a\mid 32$，$b\mid 9$，

$a=\pm1,\pm2,\pm4,\pm8,\pm32$; $b=\pm1,\pm3,\pm9$，則 $\frac{b}{a}$ 之值可能爲 ±1，±3，±9，$\pm\frac{1}{2}$，$\pm\frac{3}{2}$，$\pm\frac{9}{2}$，

$\pm\frac{1}{4}$，$\pm\frac{3}{4}$，$\pm\frac{9}{4}$，$\pm\frac{1}{8}$，$\pm\frac{3}{8}$，$\pm\frac{9}{8}$，…以綜合除法運算如下：（只列出可整除者）

$$
\begin{array}{r|l}
 & 32+24-44-6+9 \quad \left|\, \frac{1}{2}\right. \\
 & \quad +16+20-12-9 \\
\hline
2 & 32+40-24-18,+0 \\
 & 16+20-12-9 \quad \left|\, -\frac{1}{2}\right. \\
 & \quad -8-6+9 \\
\hline
2 & 16+12-18,+0 \\
 & 8+6-9 \quad \left|\, \frac{3}{4}\right. \\
 & \quad +6+9 \\
\hline
4 & 8+12,+0 \\
 & 2+3
\end{array}
$$

(除到商爲二次式 $8x^2+6x-9$ 時即可因式分解之)，得有理根爲 $\frac{1}{2}$，$-\frac{1}{2}$，$\frac{3}{4}$，$-\frac{3}{2}$

6. (複選)對於方程式 $x^4+5x^3+x^2-13x-7=0$ 的敘述，下列何者正確？

(A)在 -5 與 -4 之間有一實根　　(B)在 -3 與 -2 之間有一實根

(C)在 1 與 2 之間有一實根　　(D)只有一正根　　(E)恰有 2 個虛根

【解答】(A)(C)(D)

【詳解】

	$f(x)$	x
$1+5+1-13$	-7	0
$1+6+7-6$	-13	1
$1+7+15+17$	$+27$	2

	$f(x)$	x
$1+5+1-13$	-7	0
$1+4-3-10$	$+3$	-1
$1+3-5-3$	-1	-2
$1+2-5+2$	-13	-3
$1+1-3-1$	-3	-4
$1+0+1-18$	$+83$	-5
$1-1+7-55$	$+323$	-6

由上可知在(1，2)，(0，-1)，(-1，-2)，(-4，-5)之間各有一實根

故選(A)(C)(D)

二、填充題(每題 10 分)

1. a，$b\in R$，若 $2i-1$ 爲 $x^4+3x^3+(a+1)x^2+ax+b=0$ 之一根，則數對(a，b) =__________。

【解答】(7，5)

【詳解】

a，$b\in R$，$x^4+3x^3+(a+1)x^2+ax+b=0$，有一根 $2i-1$，必有一根 $-2i-1$

$[x-(-1+2i)][x-(-1-2i)]=x^2+2x+5$，整除 $x^4+3x^3+(a+1)x^2+ax+b$

$$
\begin{array}{ccccc|c}
1 & +3 & +(a+1) & +a & +b & \\
 & -2 & -2 & -2a+12 & & -2 \\
 & & -5 & -5 & -5a+30 & -5 \\
\hline
1 & +1 & a-6, & -a+7 & -5a+b+30 &
\end{array}
$$

$\therefore\quad -a+7=0$，$-5a+b+30=0$，故$a=7$，$b=5$

2. a，$b\in R$，已知方程式$x^4-x^3+x^2+ax+b=0$ 有一根 $1+2i$，則

(1)數對$(a，b)=$__________。 (2)此方程式之四個根爲__________。

【解答】(1) $(9，-10)$ (2) $1\pm 2i$，-2，1

【詳解】

(1)$\because\ \ x^4-x^3+x^2+ax+b=0$ 爲實係數方程式 $\Rightarrow$虛根必共軛存在，故 $1+2i$爲一根，則 $1-2i$亦爲一根

$\Rightarrow\quad [x-(1+2i)][x-(1-2i)]=x^2-(1-2i)x-(1+2i)x+1+4=x^2-2x+5$

$\Rightarrow\quad (x^2-2x+5)\mid x^4-x^3+x^2+ax+b \quad\Rightarrow$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 1+1-2 \\
\hline
1-2+5 & 1-1+1+a+b \\
 & \underline{1-2+5} \\
 & \quad +1-4+a \\
 & \quad \underline{+1-2+5} \\
 & \qquad -2+(a-5)+b \\
 & \qquad \underline{-2+\quad 4\quad -10} \\
 & \qquad\qquad (a-9)+(b+10)
\end{array}
$$

整除 $\Rightarrow\ \begin{cases}a-9=0\\ b+10=0\end{cases}\ \Rightarrow\ a=9$，$b=-10$

(2)由(1)知$x^4-x^3+x^2+ax+b=(x^2-2x+5)(x^2+x-2)=(x^2-2x+5)(x+2)(x-1)$

$\therefore$ 四根爲 $1\pm 2i$，-2，1

3. $ax^2+(a-1)x-8=0$ 有一根介於 1 和 2 之間，另一根介於 -2 和 -1 之間，則a值的範圍爲__________。

【解答】$3<a<\dfrac{9}{2}$

【詳解】

利用勘根定理$\begin{cases}f(1)f(2)<0\\ f(-2)f(-1)<0\end{cases}$，$\begin{cases}(2a-9)(6a-10)<0\\ (2a-6)(-7)<0\end{cases}$，$\begin{cases}\dfrac{5}{3}<a<\dfrac{9}{2}\cdots\cdots ①\\ a>3\cdots\cdots ②\end{cases}$

①與②交集 $\Rightarrow\ 3<a<\dfrac{9}{2}$

4. 求含有 -2 及i兩根的最低次實係數方程式：__________。

【解答】$x^3+2x^2+x+2=0$

【詳解】

$(x+2)(x-i)(x+i)=0 \quad\Rightarrow\quad (x+2)(x^2+1)=0 \quad\Rightarrow\quad x^3+2x^2+x+2=0$

5. 方程式 $6x^4+5x^3+9x^2-4x-4=0$ 之有理根爲__________。

【解答】$-\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{2}{3}$

【詳解】

設 $ax-b$ 爲其整係數一次因式，$(a，b)=1$，則 $a\mid 6$，$b\mid -4$

$\therefore\ \dfrac{b}{a}$之可能値爲± 1，± 2，± 4，$\pm\dfrac{1}{2}$，$\pm\dfrac{1}{3}$，$\pm\dfrac{2}{3}$，$\pm\dfrac{4}{3}$，$\pm\dfrac{1}{6}$，利用綜合除法

$$\begin{array}{r|rrrrr|l}
 & 6 & +5 & +9 & -4 & -4 & \frac{-1}{2} \\
 & & -3 & -1 & -4 & +4 & \\
\hline
2 & 6 & +2 & +8 & -8 & 0 & \\
 & 3 & +1 & +4 & -4 & & \frac{2}{3} \\
 & & +2 & +2 & +4 & & \\
\hline
3 & 3 & +3 & +6 & & 0 & \\
 & 1 & +1 & +2 & & &
\end{array}$$

$\therefore$ 有理根爲$-\frac{1}{2}$，$\frac{2}{3}$

6. 若二次函數$y = ax^2 + bx$在$x = 1$時有最小值 $-\frac{1}{a}$，則$3a + b$之值爲__________。

【解答】1

【詳解】

$y = ax^2 + bx$在$x = 1$時有最小值 $-\frac{1}{a}$

$\Rightarrow\ \ y = a(x-1)^2 - \frac{1}{a}$且$a > 0\ \ \Rightarrow\ \ y = ax^2 - 2ax + a - \frac{1}{a}$

比較係數，得$b = -2a$且$a - \frac{1}{a} = 0\ \ \therefore\ \ a^2 = 1\ \ \Rightarrow\ \ a = 1$，$b = -2$，故$3a + b = 3 - 2 = 1$

7. 二次函數$y = f(x)$之圖形通過(1，5)，(4，11)兩點且對稱軸爲$x = 2$，則

(1) $f(x) =$__________。 (2)頂點爲__________。

【解答】(1) $2x^2 - 8x + 11$ (2) (2，3)

【詳解】

設$y = a(x-2)^2 + k$，過(1，5)，(4，11) $\Rightarrow \begin{cases} 5 = a + k \\ 11 = 4a + k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ k = 3 \end{cases}$

即$y = 2(x-2)^2 + 3 = 2x^2 - 8x + 11$，且頂點(2，3)

8. 設二次函數$y = 2x^2 + 2x - 1$之圖形爲Γ，若將圖形Γ沿坐標軸向右平移3個單位，再向下平移2個單位，則所得新圖形的函數爲$y =$__________。

【解答】$2x^2 - 10x + 9$

【詳解】經配方

$y = 2(x + \frac{1}{2})^2 - \frac{3}{2}$，原頂點($-\frac{1}{2}$，$-\frac{3}{2}$)，圖形經右移3單位，下移2單位，

新頂點($\frac{5}{2}$，$-\frac{7}{2}$) $\Rightarrow\ \ y = 2(x - \frac{5}{2})^2 - \frac{7}{2}\ \ \Rightarrow\ \ y = 2x^2 - 10x + 9$

9. 二次函數$y = 2x^2 - x + 3$，$-2 \le x \le 1$，y的最小值爲__________，最大值爲__________。

【解答】$\frac{23}{8}$；13

【詳解】

$y = 2x^2 - x + 3 = 2(x^2 - \frac{1}{2}x) + 3 = 2(x - \frac{1}{4})^2 + \frac{23}{8}$，$-2 \le x \le 1$

由$x = \frac{1}{4}$在 $-2 \le x \le 1$範圍內，故最小值爲$f(\frac{1}{4}) = \frac{23}{8}$，$x = -2$時，最大值13

10.某班數學測驗，成績最低者爲20分，最高者爲90分。請你設計一線性函數，使原來40分者爲60分，原來90分者爲100分。則依函數，最低分者爲__________分。

【解答】44
【詳解】
設線性函數 $y = ax + b$（a，b 爲常數）
由已知條件，$x = 40$ 時，$y = 60$；$x = 90$ 時，$y = 100$
$\therefore\ \ 40a + b = 60$……①；$90a + b = 100$……②
解①，②得 $a = \frac{4}{5}$，$b = 28$ $\therefore\ \ y = \frac{4}{5}x + 28$； 當 $x = 20$ 時，$y = \frac{4}{5} \times 20 + 28 = 16 + 28 = 44$

11.$k \in R$，且不論x爲任何實數，$kx^2 + 2x + k$恆爲負，求k的範圍＿＿＿＿＿。
【解答】$k < -1$
【詳解】
$\forall x \in R$，$kx^2 + 2x + k$恆爲負 $\Leftrightarrow$ $k < 0$，$D < 0$
$\Rightarrow$ $k < 0$，$2^2 - 4k^2 < 0$ $\Rightarrow$ $k < 0$，$k^2 - 1 > 0$
$\Rightarrow$ $k < 0$，$(k - 1)(k + 1) > 0$ $\Rightarrow$ $k < 0$，$k > 1$ 或$k < -1$ $\Rightarrow$ $k < -1$

12.設m爲實數，若二次函數$y = mx^2 + 2x + m - 2$ 之圖形恆在直線$y = -2$ 的上方，則m的範圍爲＿＿＿＿＿。
【解答】$m > 1$
【詳解】
$mx^2 + 2x + m - 2 > -2$ 恆成立，即$mx^2 + 2x + m > 0$ 恆成立
則$\begin{cases} m > 0 \\ 4 - 4m^2 < 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} m > 0 & \cdots\cdots① \\ m < -1 \text{ 或 } m > 1 & \cdots\cdots② \end{cases}$ 由①與②交集得$m > 1$

13.已知二次函數$y = f(x) = ax^2 + bx + c$，圖形以(2，3)爲頂點，又通過點(3，1)，則數對(a，b，c) =＿＿＿＿＿。
【解答】(－2，8，－5)
【詳解】
$y = f(x) = ax^2 + bx + c$
令$f(x) = a(x - 2)^2 + 3$ ……①，(3，1)代入① $\Rightarrow$ $a = -2$
$\therefore\ \ f(x) = -2(x - 2)^2 + 3 = -2x^2 + 8x - 5$，即數對($a$，$b$，$c$) = (－2，8，－5)

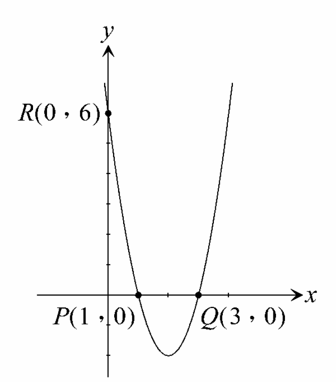
14.某電影院的每張票價 200 元時，觀眾有 600 人，若票價每減少 10 元時，則觀眾就增加 50 人，則每張電影票價訂爲＿＿＿＿＿元時，可使電影院的收入最多。
【解答】160
【詳解】
設票價減 $10x$元時，可使收入最多
收入$= (200 - 10x)(600 + 50x) = 500(-x^2 + 8x + 240) = 500[-(x - 4)^2 + 256]$
當$x = 4$，即票價爲 $200 - 10 \times 4 = 160$ 元時，收入最多

15.設二次函數$y = ax^2 + bx + 6$ 在$x = 2$ 時，有最小値-2，且此函數的圖形與x軸交於P，Q兩點，與y軸交於R點，試求此△PQR的面積爲＿＿＿＿＿。
【解答】6
【詳解】
由題意，設$f(x) = a(x - 2)^2 - 2 = ax^2 - 4ax + (4a - 2)$

又已知$y=ax^2+bx+6$)，$\begin{cases} b=-4a \\ 6=4a-2 \end{cases}$得$\begin{cases} a=2 \\ b=-8 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $y=2x^2-8x+6$

令$y=0$ $\Rightarrow$ $2x^2-8x+6=0$ $\Rightarrow$ $x=1$，3，即$P(1，0)$，$Q(3，0)$

令$x=0$ $\Rightarrow$ $y=6$，即$R=(0，6)$，則△PQR之面積=$\frac{1}{2}\overline{PQ}\times$高=$\frac{1}{2}\times 2\times 6=6$



16.已知二次函數$y=f(x)=ax^2+bx+\frac{1}{a}$，在$x=3$時，有最大值 8，則數對$(a，b)=$__________。

【解答】$(-1，6)$

【詳解】

$\because$ $y=f(x)$在$x=3$時，有最大值 8 $\therefore$ $y=f(x)=a(x-3)^2+8=ax^2-6ax+(9a+8)$

又已知$y=f(x)=ax^2+bx+\frac{1}{a}$ 比較係數 $\begin{cases} b=-6a & \cdots\cdots① \\ \frac{1}{a}=9a+8 & \cdots\cdots② \end{cases}$

由②知 $9a^2+8a-1=0$ $\Rightarrow$ $(9a-1)(a+1)=0$ $\Rightarrow$ $a=\frac{1}{9}$或 -1

$\because$ $y=f(x)$有最大值 $\therefore$ $a=-1$，$b=6$，即$(a，b)=(-1，6)$

17.設$f(x)$爲實係數多項式，已知$f(2-3i)=21-9i$，則$f(2+3i)=$__________。

【解答】$21+9i$

【詳解】

$f(\overline{z})=\overline{f(z)}\Rightarrow f(2+3i)=21+9i$

18.$x\in R$，則函數$g(x)=(x-1)^2+2(x-2)^2+3(x-3)^2+\cdots+10(x-10)^2$有最小値時，$x$之值爲__________。

【解答】7

【詳解】

$g(x)=(1+2+3+\cdots+10)x^2-2(1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2)x+(1^3+2^3+3^3+\cdots+10^3)$

$=55x^2-2(\frac{10\times 11\times 21}{6})x+[\frac{10(11)}{2}]^2=55(x-7)^2+55^2-55\times 49=55(x-7)^2+330$

$\therefore$ 當$x=7$時，$g(x)$有最小値爲 330

公式法：當$x=1，2，2，3，3，3，\cdots，\overbrace{10，10，\cdots，10}^{10個}$的算術平均數時，即當$x=7$時$g(x)$有最小値

19.已知二次函數$y=ax^2+bx+c$的圖形通過三點$(-1，\frac{9}{2})$，$(0，3)$，$(2，-3)$，求y的最大值。

【解答】5

【詳解】

$y = ax^2 + bx + c$的圖形通過三點$(-1，\frac{9}{2})$，$(0，3)$，$(2，-3)$

得$a - b + c = \frac{9}{2}$，$c = 3$，$4a + 2b + c = -3$，解之得$a = \frac{-1}{2}$，$b = -2$，$c = 3$

$\therefore\ y = \frac{-1}{2}x^2 - 2x + 3 = \frac{-1}{2}(x+2)^2 + 5$，故$y$的最大值為 5