高雄市明誠中學　高一數學複習測驗　　日期：96.01.04					
範圍	3-3　HCF、LCM	班級	普一　　　班	姓名	
		座號			

一、選擇題(每題 5 分)

1. 設$f(x) = x^3 + 5x^2 + 11x + 10$與$g(x) = x^4 + 3x^3 + 6x^2 + ax + 5$之最高公因式為二次式，則實數$a$的值為(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4　(E) 5

【解答】(C)

【詳解】

$f(x) = (x + 2)(x^2 + 3x + 5)$

$\because$　最高公因式為二次式　$\therefore$　$x^2 + 3x + 5 \mid g(x)$

$$\begin{array}{r|l}
 & 1+0+1 \\ \hline
1+3+5 & 1+3+6+a+5 \\
 & 1+3+5 \\ \hline
 & \quad 1+a+5 \\
 & \quad 1+3+5 \\ \hline
 & \quad 0+(a-3)+0
\end{array}$$

$\Rightarrow$　$a - 3 = 0$得$a = 3$

2. (複選)a，b，c，k皆為整數，若$x + k$為$x^2 + ax - 6$與$x^3 + bx^2 + cx + 3$的公因式，則k值可為
(A) 1　(B) -1　(C) 2　(D) 3　(E) 6

【解答】(A)(B)(D)

【詳解】

a，b，c，$k \in Z$

$x + k \mid x^2 + ax - 6$且$x + k \mid x^3 + bx^2 + cx + 3$　$\Rightarrow$　$k \mid 6$且$k \mid 3$　$\Rightarrow$　$k \mid 3$　$\Rightarrow$　$k = \pm 1$，± 3

3. (複選)若$f(x) = 2x^2 + ax + b$，$g(x) = 3x^2 + cx + d$的HCF為$x + 1$，LCM為$6x^3 + 17x^2 + 14x + e$，a，b，c，d，$e \in R$，則(A) $a = 5$　(B) $b = 3$　(C) $c = 4$　(D) $d = 1$　(E) $e = 3$

【解答】(A)(B)(C)(D)(E)

【詳解】

HCF | LCM　$\therefore$　$x + 1 \mid 6x^3 + 17x^2 + 14x + e$　$\therefore$　$e = 3$

$\therefore$　LCM $= 6x^3 + 17x^2 + 14x + 3 = (x + 1)(2x + 3)(3x + 1)$

$\therefore$　$f(x) = 2x^2 + ax + b = (x + 1)(2x + 3)$　$\therefore$　$a = 5$，$b = 3$

又$g(x) = 3x^2 + cx + d = (x + 1)(3x + 1)$　$\therefore$　$c = 4$，$d = 1$

4. (複選)設 $\deg f(x) = 5$，$\deg g(x) = 3$，則下列敘述何者正確？
(A) deg (HCF) $\le$ deg (LCM)　(B) deg (HCF) + deg (LCM) = 8　(C) deg (HCF) 最大是 3
(D) deg (LCM) 最小是 5　　(E) deg (LCM) 最大是 7

【解答】(A)(B)(C)(D)

【詳解】

(A)$\because$　HCF | LCM　$\therefore$　deg (HCF) $\le$ deg (LCM)

(B)$\because$　$\deg f(x) + \deg g(x) =$ deg (HCF) + deg (LCM) = 8

(C)(D) deg (HCF)最大 $= \deg f(x)$，$\deg g(x)$中之較小者　$\Leftrightarrow$　deg (LCM)最小

(E) deg (LCM)最大 $= \deg f(x) + \deg g(x) = 8$

5. (複選)下列何者爲 x^4-1 與 x^3+2x^2-x-2 的公因式？

(A) $x+1$ (B) $x-1$ (C) $x+2$ (D) x^2+1 (E) $2x+2$

【解答】(A)(B)(E)

【詳解】

$x^4-1=(x+1)(x-1)(x^2+1)$，$x^3+2x^2-x-2=(x+1)(x-1)(x+2)$

公因式爲 $k(x+1)$，$\ell(x-1)$，$t(x+1)(x-1)$，其中 k，ℓ，t 爲非 0 常數

二、填充題(每題 10 分)

1. 設 $f(x)=(x+1)^2(2x-1)^3(x+3)$，$g(x)=(x+1)(2x-1)^2(x+5)^2$，則

(1) $f(x)$ 與 $g(x)$ 的HCF爲__________。

(2) $f(x)$ 與 $g(x)$ 的LCM爲__________。

【解答】(1) $(x+1)(2x-1)^2$ (2) $(x+1)^2(2x-1)^3(x+3)(x+5)^2$

2. 設 $f(x)=x^4+x^3-9x^2-3x+18$，$g(x)=x^5+6x^2-49x+42$，則 $f(x)$ 與 $g(x)$ 的HCF =_______。

【解答】x^2+x-6

【詳解】

$1+1$	$1+1-9-3+18$	$1+0+0+6-49+42$	$1-1$
	$1+0-7+6$	$1+1-9-3+18$	
	$1-2-9+18$	$-1+9+9-67+42$	
	$1+0-7+6$	$-1-1+9+3-18$	
	-2 | $-2-2+12$	10 | $10+0-70+60$	
	$1+1-6$	$1+0-7+6$	$1-1$
		$1+1-6$	
		$-1-1+6$	
		$-1-1+6$	
		0	

由輾轉相除法得HCF爲 x^2+x-6

3. 若 $x+3$ 爲 x^2+ax-6 與 x^2+bx+3 的公因式，則數對$(a，b)$ = __________。

【解答】(1，4)

【詳解】

$x+3 \mid x^2+ax-6$ 且 $x+3 \mid x^2+bx+3$

$\Rightarrow\ (-3)^2+a(-3)-6=0$ 且 $(-3)^2-3b+3=0\ \Rightarrow\ a=1，b=4$

4. 設 a 爲整數，若 $f(x)=x^3+x^2-4x+(a-7)$ 與 $g(x)=2x^3-7x^2+7x+(2a-8)$ 的最高公因式爲一次式，則 a 的值爲__________。

【解答】3

【詳解】

設 $f(x)=x^3+x^2-4x+(a-7)$ 與 $g(x)=2x^3-7x^2+7x+(2a-8)$ 之HCF $d(x)$ 爲一次式，

則 $d(x)\mid 2f(x)-g(x)\ \Rightarrow\ d(x)\mid 3(3x^2-5x-2)\ \Rightarrow\ d(x)\mid 3(x-2)(3x+1)$

$\therefore$ 取 $d(x)=x-2$，或 $d(x)=3x+1$(不合)（$\because 3\nmid 1, 3\nmid 2$）

$d(x)=x-2$，則 $x-2\mid f(x)\ \Rightarrow\ f(2)=0\ \Rightarrow\ 8+4-8+(a-7)=0\ \Rightarrow\ a=3$

5. $a，b，c\in N$，設 x^3+3x^2+ax+2，x^3+4x^2+bx+6 的HCF爲 $x+c$，則$(a，b，c)$ = __________。

【解答】(4，9，1)或(3，7，2)

【詳解】

利用一次因式檢查法

由$x+c\mid x^3+3x^2+ax+2$，$x+c\mid x^3+4x^2+bx+6$，

$\therefore$ $c\mid 2$ 且$c\mid 6$ $\therefore$ $c\mid(2，6)=2$，又 $c\in N$ $\therefore$ $c=1$ 或 2

(1)當$c=1$ 時，$x+1\mid x^3+3x^2+ax+2$ $\therefore$ $a=4$；$x+1\mid x^3+4x^2+bx+6$ $\therefore$ $b=9$

(2)當$c=2$ 時，$x+2\mid x^3+3x^2+ax+2$ $\therefore$ $a=3$；$x+2\mid x^3+4x^2+bx+6$ $\therefore$ $b=7$

6. 若多項式$f(x)=x^2+px+6$，$g(x)=x^3+px+6$ 的LCM爲四次式，則常數p之值爲________。

【解答】-7

【詳解】

$f(x)\cdot g(x)=\text{HCF}\cdot\text{LCM}$ 故$f(x)$ 與$g(x)$ 之HCF 爲一次式

$\because$ $\text{HCF}\mid f(x)$，$\text{HCF}\mid g(x)$ $\therefore$ $\text{HCF}\mid g(x)-f(x)=x^3-x^2=x^2(x-1)$

但$f(0)=6\neq 0\Rightarrow x\nmid f(x)$ $\therefore$ $\text{HCF}=x-1$，由$f(1)=0$ $\therefore$ $p=-7$

7. 若兩多項式x^2+x+a與x^3+ax+b的HCF爲$x+1$，則LCM爲 __________ 。

【解答】x^4+x

【詳解】

$x+1\mid x^2+x+a \Rightarrow 1-1+a=0 \Rightarrow a=0$

$x+1\mid x^3+ax+b \Rightarrow x+1\mid x^3+b \Rightarrow -1+b=0 \Rightarrow b=1$

$\therefore$ $\text{LCM}=\dfrac{(x^2+x)(x^3+1)}{x+1}=x(x^3+1)=x^4+x$

8. 若$f(x)=x^3+x^2+ax+1$，$g(x)=x^3+2x^2+bx+2$ 之LCM爲四次式，則數對$(a，b)=$______。

【解答】(1，1)

【詳解】

$f(x)\cdot g(x)=\text{HCF}\cdot\text{LCM}$ $\because$ LCM爲四次式，故HCF爲二次式

又$f(x)-g(x)=-x^2+(a-b)x-1$，$2f(x)-g(x)=x^3+(2a-b)x=x[x^2+(2a-b)]$，

且 $x\nmid f(x), x\nmid g(x)$，$\therefore$ $\dfrac{-1}{1}=\dfrac{-1}{2a-b}$ 且$a-b=0$ $\Rightarrow$ $\begin{cases}a=b\\2a-b=1\end{cases}$ $\Rightarrow$ $(a，b)=(1，1)$

9. 設$d(x)$爲x^3-2x^2-5x+6 與$x^3+k^2x^2-2kx-16$ 之一最高公因式，其中k爲一實數，若$d(x)$爲二次式，則$k=$__________。

【解答】-3

【詳解】

$f(x)=x^3-2x^2-5x+6=(x-1)(x-3)(x+2)$，$g(x)=x^3+k^2x^2-2kx-16$

則$d(x)=(x-1)(x+2)$爲$f(x)$，$g(x)$之最高公因式（$\because 3\nmid 16$）

$\begin{cases}g(1)=k^2-2k-15=(k-5)(k+3)=0\\g(-2)=4k^2+4k-24=4(k+3)(k-2)=0\end{cases}$，$\therefore$ $k=-3$

10. 多項式$x^5-2x^3-2x^2-3x-2$，x^4-2x^3-2x-1 的LCM爲________。(以質因式乘積表之)

【解答】$(x^2+1)(x^3-3x-2)(x^2-2x-1)$

【詳解】

先用輾轉相除法，求得$\text{HCF}=x^2+1$； $\text{LCM}=\dfrac{f(x)\cdot g(x)}{\text{HCF}}$

$=\dfrac{(x^2+1)(x^3-3x-2)(x^2+1)(x^2-2x-1)}{x^2+1}=(x^2+1)(x^3-3x-2)(x^2-2x-1)$

11.設$f(x)=x^3+ax^2-8x+5$，$g(x)=2x^3+bx^2-7x-5$，若$f(x)$與$g(x)$的最高公因式爲二次式，

求(1)數對$(a，b)=$__________。

(2)最高公因式爲__________。（寫最高次項係數爲 1 者）

【解答】(1) (2，7)　(2) x^2+3x-5

【詳解】

設$d(x)=(f(x)，g(x))$，且$\deg d(x)=2$

則$d(x)\mid 2f(x)-g(x) \Rightarrow d(x)\mid(2a-b)x^2-9x+15$……①

$d(x)\mid f(x)+g(x) \Rightarrow d(x)\mid x[3x^2+(a+b)x-15]$……②

由① $\Rightarrow d(x)=(2a-b)x^2-9x+15$

由② $\Rightarrow d(x)=3x^2+(a+b)x-15$（$\because f(0)\neq 0$，$g(0)\neq 0 \Rightarrow x\nmid f(x), x\nmid g(x)$）

$\therefore \dfrac{2a-b}{3}=\dfrac{-9}{a+b}=\dfrac{15}{-15} \Rightarrow \begin{cases}2a-b=-3\\a+b=9\end{cases}$

得數對$(a，b)=(2，7)$，$\text{HCF}=d(x)=x^2+3x-5$

12.設k爲實數，$f(x)=x^3-2x^2-5x+6$，$g(x)=x^3+k^2x^2+2kx-16$。

(1) $f(x)$與$g(x)$有一次式的最高公因式時，k之值爲__________

(2) $f(x)$與$g(x)$有二次式的最高公因式時，k之值爲__________

【解答】(1) $k=-5$ 或 -2　(2) $k=3$

【詳解】

$f(x)=x^3-2x^2-5x+6$，$g(x)=x^3+k^2x^2+2kx-16$

先將$f(x)$因式分解得$f(x)=(x-1)(x+2)(x-3)$

$x-1\mid g(x) \Rightarrow g(1)=0 \Rightarrow k^2+2k-15=0 \Rightarrow k=3$ 或 -5

$x+2\mid g(x) \Rightarrow g(-2)=0 \Rightarrow 4k^2-4k-24=0 \Rightarrow k=3$ 或 -2

$x-3\mid g(x) \Rightarrow g(3)=0 \Rightarrow 9k^2+6k+11=0 \Rightarrow k$無實數解

(1) $f(x)$與$g(x)$有一次式的HCF$\Rightarrow k=-5,-2$

$k=-5$時，HCF爲$x-1$；$k=-2$時，HCF爲$x+2$

(2) $k=3$時，HCF爲二次式 $(x-1)(x+2)$

13.兩多項式$f(x)$，$g(x)$的LCM爲$x^4+4x^3-15x^2-58x-40$，$f(x)+g(x)=2x^3+11x^2-x-30$，

求$f(x)$及$g(x)$。______________________________；______________________________

【解答】$f(x)=(x+1)(x^2+7x+10)$，$g(x)=(x-4)(x^2+7x+10)$

或$f(x)=(x-4)(x^2+7x+10)$，$g(x)=(x+1)(x^2+7x+10)$

【詳解】設$(f(x)，g(x))=d(x)$且$f(x)=d(x)\,h(x)$，$g(x)=d(x)\,k(x)$，$(h(x)，k(x))=1$

則$f(x)+g(x)=d(x)\,[h(x)+k(x)]=2x^3+11x^2-x-30$

$[f(x)，g(x)]=d(x)\,h(x)\,k(x)=x^4+4x^3-15x^2-58x-40$

$f(x)+g(x)$與$[f(x)，g(x)]$之HCF，即爲 $2x^3+11x^2-x-30$，$x^4+4x^3-15x^2-58x-40$ 之HCF，由輾轉相除法得$d(x)=x^2+7x+10$

$\Rightarrow h(x)+k(x)=2x-3$，$h(x)\,k(x)=x^2-3x-4=(x+1)(x-4)$

$\Rightarrow h(x)=(x+1)$或$(x-4)$，$k(x)=(x-4)$或$(x+1)$

故$f(x)=(x+1)(x^2+7x+10)$，$g(x)=(x-4)(x^2+7x+10)$

或$f(x)=(x-4)(x^2+7x+10)$，$g(x)=(x+1)(x^2+7x+10)$

14.$a，b，c\in N$，若 $f(x)=x^3-2x^2-ax+6$，$g(x)=x^3+11x^2+bx-35$，其 HCF 爲一次式 $x-c$，求 $a，b，c$ 的值。

【解答】$a = 5$，$b = 23$，$c = 1$

【詳解】a，b，$c\in N$，$(x-c) \mid x^3-2x^2-ax+6 \Rightarrow c \mid 6$，$(x-c) \mid x^3+11x^2+bx-35 \quad\Rightarrow\quad c \mid 35$

$\therefore\quad c \mid (6，35) \quad\Rightarrow\quad c \mid 1 \quad\Rightarrow\quad c = 1$

又$f(1) = 0 \quad\Rightarrow\quad 1-2-a+6 = 0 \quad\Rightarrow\quad a = 5$

$g(1) = 0 \quad\Rightarrow\quad 1+11+b-35 = 0 \quad\Rightarrow\quad b = 23$

故$a = 5$，$b = 23$，$c = 1$

15. $f(x) = x^3-6x^2+11x-3$，$g(x) = x^3-8x^2+19x-8$，若 $f(a) = 3$，$g(a) = 4$，則 a 之值爲何？

【解答】$a = 1$ 或 $a = 3$

【詳解】$f(x) = x^3-6x^2+11x-3$，$g(x) = x^3-8x^2+19x-8$

已知$f(a) = 3$，$g(a) = 4$，則$f(a)-3 = 0$，$g(a)-4 = 0$

即$(x-a) \mid f(x)-3$ 且$(x-a) \mid g(x)-4 \quad\Rightarrow\quad (x-a) \mid (f(x)-3，g(x)-4)$

$\Rightarrow\quad (x-a) \mid (x^3-6x^2+11x-6，x^3-8x^2+19x-12)$

$\Rightarrow\quad (x-a) \mid (x-1)(x-3) \quad\therefore\quad a = 1$ 或$a = 3$

16.設$f(x) = x^2+4$，$g(x) = x^2+2x+3$，求二多項式$m(x)$，$n(x)$，使$f(x)m(x)+g(x)\,n(x) = (f(x)$，$g(x))$，且$(f(x)$，$g(x))$領導係數爲 1。

【解答】$m(x) = \dfrac{2}{17}x+\dfrac{5}{17}$；$n(x) = -\dfrac{2}{17}x-\dfrac{1}{17}$

【詳解】

$f(x) = x^2+4$，$g(x) = x^2+2x+3$，用輾轉相除法如下

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$	$1+0+4$	$1+2+3$	1
	$1-\frac{1}{2}$	$1+0+4$	
	$\frac{1}{2}+4$	$2-1$	
	$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$		
	$\frac{17}{4}$		

由上式 知$g(x)-f(x) = 2x-1$，且$f(x) = (2x-1)\left(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{4}\right)+\dfrac{17}{4}$

$\therefore \dfrac{17}{4} = f(x)-(2x-1)\left(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{4}\right) = f(x)-[g(x)-f(x)]\left(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{4}\right)$

$\dfrac{17}{4} = \left(1+\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{4}\right)f(x)-\left(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{4}\right)g(x)$

因爲餘式爲常數，知$f(x)$，$g(x)$互質，取$(f(x)，g(x)) = 1$

$1 = \dfrac{4}{17}\left(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{4}\right)f(x)-\dfrac{4}{17}\left(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{4}\right)g(x) = \left(\dfrac{2}{17}x+\dfrac{5}{17}\right)f(x)+\left(-\dfrac{2}{17}x-\dfrac{1}{17}\right)g(x)$

$\therefore m(x) = \dfrac{2}{17}x+\dfrac{5}{17}$，$n(x) = -\dfrac{2}{17}x-\dfrac{1}{17}$