<table>
<tr><td colspan="6">高雄市明誠中學 高一數學複習測驗　　日期：96.01.15</td></tr>
<tr><td>範圍</td><td>3-3、5HCF、LCM
多項方程式</td><td>班級
座號</td><td>普一　　班</td><td>姓名</td><td></td></tr>
</table>

一、選擇題(每題 5 分)

1. (複選)關於三次方程式$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d=0$，下列敘述何者是正確的？

(A) $f(x)=0$ 至少有一實根

(B) $f(x)=0$ 至少有一複數根

(C)若$f(x)=0$ 有一根 $1+i$，則必有一根 $1-i$

(D)若a，b，c，$d\in Z$且$f(x)=0$ 有一根 $1+\sqrt{2}$ ，則必有一根 $1-\sqrt{2}$

(E)若a，b，c，$d\in Z$，則$f(x)=0$ 至少有一實根

【解答】(B)(D)(E)

【詳解】

討論方程式根的性質，必須注意其係數，本題應用下列性質

(1)實係數奇次方程式至少有一實根　∴　(A)不真（不知係數爲何？），(E)真

(2)由代數基本定理，知(B)真

(3)實係數方程式虛根成對共軛，知(C)不真。（不知 a，b，c，d 是否爲實數？）

(4)有理係數方程式有一根 $1+\sqrt{2}$ ，則有一共軛根 $1-\sqrt{2}$ ，知(D)爲真

2. (複選)下列選項何者爲真？

(A)方程式 $4x^3+3x^2+2x+1$ 沒有正根

(B)方程式 $4x^3-x^2+2x-1=0$ 沒有負根

(C)方程式$x^3-x+1=0$ 沒有有理根

(D)方程式$x^3+x^2-ix-4=0$ 至少有一個實根，其中$i^2=-1$

【解答】(A)(B)(C)

【詳解】

(A)對。當$x=\alpha>0$ 時，$f(\alpha)=4\alpha^3+3\alpha^2+2\alpha+1>0$，故沒有正根

(B)對。當$x=-\alpha$（$\alpha>0$）時，$f(\alpha)=-4\alpha^3-\alpha^2-2\alpha-1<0$，故沒有負根

(C)對。$f(x)=x^3-x+1=0$ 之可能有理根爲 ±1，而$f(1)\neq0$，$f(-1)\neq0$，故沒有有理根

(D)錯。若有實根，假設實根爲α（$\alpha\neq0$），則$\alpha^3+\alpha^2-\alpha i-4=0$，矛盾

（∵　$(\alpha^3+\alpha^2-4)-\alpha i\neq0+0i$）

3. (複選)$f(x)$爲一實係數五次多項式，則下列何者爲真？

(A)若 $f(1+i)=f(i)=0$，則 $f(x)=0$ 恰有一實根

(B)若 $f(2+5i)=2i-3$，則 $f(2-5i)=2i+3$

(C) $f(a)f(b)<0$，則 $f(x)=0$ 在 a 與 b 之間恰有一實根

(D) $f(a)f(b)>0$，則 $f(x)=0$ 在 a 與 b 之間沒有實根

(E) $f(x)=0$ 至少有一實根

【解答】(A)(E)

【詳解】

(A)對。$f(x)=0$ 爲實係數五次多項方程式，若 $f(1+i)=f(i)=0$，則必有 $f(1-i)=f(-i)$ $=0$ 且另一根必爲實根，　若另一根爲虛根，必有共軛虛根，則有 6 個根，矛盾

(B)錯。$f(x)\in R[x]$，則 $f(\bar{z})=\overline{f(z)}$　$\Rightarrow$　$f(2+5i)=2i-3$，則 $f(2-5i)=-2i-3$

(C)錯。若 $f(a)f(b)<0$，則 $f(x)=0$ 在 a 與 b 之間有奇數個實根

(D)錯。若 $f(a)f(b)>0$，則 $f(x)=0$ 在 a 與 b 之間有零或偶數個實根

(E)對。$f(x)=0$ 爲實係數五次多項式，有虛根必有共軛虛根，若無實根，則根之總數必爲偶數，矛盾，故必有實根存在

二、填充題(每題 10 分)

1. 若 $x+3$ 爲 x^2+ax-6 與 x^2+bx+3 的公因式，則數對 $(a，b)=$ ________。

【解答】(1，4)

【詳解】

$x+3 \mid x^2+ax-6$ 且 $x+3 \mid x^2+bx+3$

$\Rightarrow\quad (-3)^2+a(-3)-6=0$ 且 $(-3)^2-3b+3=0 \quad\Rightarrow\quad a=1，b=4$

2. 若多項式 $f(x)=x^2+px+6$，$g(x)=x^3+px+6$ 的LCM爲四次式，則常數 p 之值爲________。

【解答】-7

【詳解】

$f(x)\cdot g(x)=\text{HCF}\cdot\text{LCM}$　故 $f(x)$ 與 $g(x)$ 之HCF 爲一次式

$\because\quad \text{HCF}\mid f(x)$，$\text{HCF}\mid g(x) \quad\therefore\quad \text{HCF}\mid g(x)-f(x)=x^3-x^2=x^2(x-1)$

但 $f(0)=6\neq 0\Rightarrow x\nmid f(x) \quad\therefore\quad \text{HCF}=x-1$，由 $f(1)=0 \quad\therefore\quad p=-7$

3. 設 $d(x)$ 爲 x^3-2x^2-5x+6 與 $x^3+k^2x^2-2kx-16$ 之一最高公因式，其中 k 爲一實數，若 $d(x)$ 爲二次式，則 $k=$ ________。

【解答】-3

【詳解】

$f(x)=x^3-2x^2-5x+6=(x-1)(x-3)(x+2)$，$g(x)=x^3+k^2x^2-2kx-16$

則 $d(x)=(x-1)(x+2)$ 爲 $f(x)$，$g(x)$ 之最高公因式 ($\because 3\nmid 16$)

$$\begin{cases} g(1)=k^2-2k-15=(k-5)(k+3)=0 \\ g(-2)=4k^2+4k-24=4(k+3)(k-2)=0 \end{cases}，\quad\therefore\quad k=-3$$

4. 設 k 爲實數，$f(x)=x^3-2x^2-5x+6$，$g(x)=x^3+k^2x^2+2kx-16$。

(1) $f(x)$ 與 $g(x)$ 有一次式的最高公因式時，k 之值爲________；HFF爲__________。

(2) $f(x)$ 與 $g(x)$ 有二次式的最高公因式時，k 之值爲________；HFF爲__________。

【解答】(1) $k=-5$ 或 -2；$(x-1)$，$(x+2)$　(2) $k=3$；$(x-1)(x+2)$

【詳解】

$f(x)=x^3-2x^2-5x+6$，$g(x)=x^3+k^2x^2+2kx-16$

先將 $f(x)$ 因式分解得 $f(x)=(x-1)(x+2)(x-3)$

$x-1\mid g(x) \quad\Rightarrow\quad g(1)=0 \quad\Rightarrow\quad k^2+2k-15=0 \quad\Rightarrow\quad k=3$ 或 -5

$x+2\mid g(x) \quad\Rightarrow\quad g(-2)=0 \quad\Rightarrow\quad 4k^2-4k-24=0 \quad\Rightarrow\quad k=3$ 或 -2

$x-3\mid g(x) \quad\Rightarrow\quad g(3)=0 \quad\Rightarrow\quad 9k^2+6k+11=0 \quad\Rightarrow\quad k$ 無實數解

(1) $f(x)$ 與 $g(x)$ 有一次式的HCF $\Rightarrow k=-5,-2$

　$k=-5$ 時，HCF爲 $x-1$；$k=-2$ 時，HCF爲 $x+2$

(2) $k=3$ 時，HCF爲二次式 $(x-1)(x+2)$

5. 已知 a 爲整數，且 $x^4+4x^3+ax^2-8x+6=0$ 有兩個根的和爲 0，則 a 的值爲

(A) 5　(B) -5　(C) 3　(D) -3　(E) -6

【解答】(B)
【詳解】
$\because$ 有兩根的和爲 0 $\therefore$ 設$x^4+4x^3+ax^2-8x+6=(x^2+p)(x^2+qx+r)$

比較係數 $\Rightarrow$ $\begin{cases} q=4 \\ p+r=a \\ pq=-8 \\ pr=6 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} p=-2 \\ q=4 \\ r=-3 \end{cases}$，故$a=p+r=(-2)+(-3)=-5$

6. 方程式 $12x^3-8x^2-23x+11=0$ 在下列哪一個區間內有實根？
(A) $(-3，-2)$ (B) $(-2，-1)$ (C) $(-1，0)$ (D) $(0，1)$ (E) $(1，2)$
【解答】(B)(D)(E)
【詳解】
以綜合除法運算如下

12	− 8	− 23	+ 11	0	
12	+ 4	− 19	− 8	1	
12	+ 16	+ 9	+ 29	2	…此列各項同號，表示 2 爲正根上限 沒有大於 2 的正根了
12	− 8	− 23	+ 11	0	
12	− 20	− 3	+ 14	− 1	
12	− 32	+ 41	− 71	− 2	

故有三個實根分別在區間$(0，1)$，$(1，2)$，$(-2，-1)$內

7. $x^{50}-2x^2-1$ 與$x^{48}-x^2-2$ 之HCF爲__________。
【解答】x^2+1
【詳解】
$f(x)=x^{50}-2x^2-1$，$g(x)=x^{48}-x^2-2$，$f(x)-x^2g(x)=x^4-1=(x^2+1)(x^2-1)$
$x^2+1\mid f(x)$，$x^2+1\mid g(x)$，$x^2-1\nmid f(x)$，$g(x)$，故HCF爲x^2+1

8. 若$f(x)=g(x)\cdot Q(x)+r(x)$，其中$g(x)=6x^4-11x^3+11x^2-4x-12$，$r(x)=2x^3-x^2+3x+2$，求$f(x)$與$g(x)$之最高公因式__________。（寫最高次項係數爲 1 者）
【解答】x^2-x+2
【詳解】

3 − 4	6 − 11 + 11 − 4 − 12	2 − 1 + 3 + 2	2 + 1
	6 − 3 + 9 + 6	2 − 2 + 4	
	− 8 + 2 − 10 − 12	1 − 1 + 2	
	− 8 + 4 − 12 − 8	1 − 1 + 2	
−2	− 2 + 2 − 4	0	
	1 − 1 + 2		

由上式得$(g(x)，r(x))=x^2-x+2$
若$f(x)=g(x)Q(x)+r(x)$，由輾轉相除法原理得$(f(x)，g(x))=(g(x)，r(x))=x^2-x+2$

9. a爲整數，$f(x)=x^3-x^2+4x+a-7$，$g(x)=2x^3+5x^2-7x+2a-6$，已知$f(x)$和$g(x)$的最高公因式爲一次式，求a之值__________。
【解答】3
【詳解】
$f(x)=x^3-x^2+4x+a-7$，$g(x)=2x^3+5x^2-7x+2a-6$

設$f(x)$與$g(x)$的最高公因式爲$d(x)$

$\therefore\quad d(x)\mid g(x)-2f(x)\quad\Rightarrow\quad d(x)\mid 7x^2-15x+8\quad\Rightarrow\quad d(x)\mid(7x-8)(x-1)$

$\therefore\quad d(x)=7x-8$ 或$x-1$

$\because\quad a\in Z\quad\therefore\quad d(x)=x-1\quad(\because 7\nmid 2)$

因$d(x)\mid f(x)$，$d(x)\mid g(x)$　$\therefore\quad x-1\mid f(x)$，$x-1\mid g(x)\quad\Rightarrow\quad f(1)=0$，$g(1)=0$

$\therefore\quad 1-1+4+a-7=0\quad\therefore\quad a=3$

10.若$x+3$ 爲x^2+ax-6 與x^2+bx+3 的公因式，則數對$(a，b)=$ __________。

【解答】(1，4)

【詳解】

$x+3\mid x^2+ax-6$ 且$x+3\mid x^2+bx+3$

$\Rightarrow\quad(-3)^2+a(-3)-6=0$ 且$(-3)^2-3b+3=0\quad\Rightarrow\quad a=1$，$b=4$

11.兩多項式$f(x)=x^3+ax^2-4x+2$ 與$g(x)=x^3+bx^2-2$ 的最高公因式爲二次式，則數對$(a，b)=$ __________。

【解答】(1，3)

【詳解】

設$f(x)$與$g(x)$的HCF爲$d(x)$，則$d(x)\mid f(x)-g(x)$

$\Rightarrow\quad d(x)\mid(x^3+ax^2-4x+2)-(x^3+bx^2-2)\quad\Rightarrow\quad d(x)\mid(a-b)x^2-4x+4$……①

$d(x)\mid f(x)+g(x)\quad\Rightarrow\quad d(x)\mid(x^3+ax^2-4x+2)+(x^3+bx^2-2)$

$\Rightarrow\quad d(x)\mid 2x^3+(a+b)x^2-4x\quad\Rightarrow\quad d(x)\mid x[2x^2+(a+b)x-4]$……②

由$x\nmid f(x)$及①，②知$\dfrac{a-b}{2}=\dfrac{-4}{a+b}=\dfrac{4}{-4}\Rightarrow\begin{cases}a-b=-2\\ a+b=4\end{cases}\Rightarrow a=1$，$b=3$，故$(a，b)=(1，3)$

12.兩多項式$g(x)=6x^4+7x^3+6x^2-1$ 與$h(x)=x^4+x^2+1$，

(1)試問$g(x)=0$ 在下列哪兩個連續整數之間有實根__________？

(A) -2 與 -1　(B) -1 與 0　(C) 0 與 1　(D) 1 與 2（複選）

(2) $g(x)$與$h(x)$的最大公因式$d(x)$爲__________。

(3)承(2)，$g(x)$與$h(x)$的最低公倍式爲$\ell(x)$，若$\dfrac{\ell(x)}{d(x)}=6x^4+bx^3+cx^2+dx+e$，則$c=$____。

【解答】(1)(B)(C)　(2) x^2+x+1　(3) 4

【詳解】

(1)

	$g(x)$	x
$6+\ 7+\ 6+\ 0$	-1	0
$6+13+19+19$	$+18$	1

（算到同號停止）

	$g(x)$	x
$6+7+\ 6+\ 0$	-1	0
$6+1+\ 5-\ 5$	$+4$	-1
$6-5+16-32$	$+63$	-2

（算到正負相間停止）

由上之計算可知$g(x)=0$ 在 0 與 1 之間及 -1 與 0 之間有實根，故選(B)(C)

(2)

6	$6+7+6+0-1$	$1+0+1+0+1$	1
	$6+0+6+0+6$	$1+0+0-1$	
	7 $\quad$ $7+0+0-7$	$1+1+1$	
$1-1$	$1+0+0-1$		
	$1+1+1$		
	$-1-1-1$		
	$-1-1-1$		
	0		

由上之輾轉相除法計算可得$d(x)=x^2+x+1$

(3)$\begin{cases} g(x)=(x^2+x+1)(6x^2+x-1) \\ h(x)=(x^2+x+1)(x^2-x+1) \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\ell(x)=(x^2+x+1)(6x^2+x-1)(x^2-x+1)$

則$\dfrac{\ell(x)}{d(x)}=\dfrac{\ell(x)}{x^2+x+1}=(6x^2+x-1)(x^2-x+1)=6x^4+bx^3+cx^2+dx+e$，

故$c=6-1-1=4$

13.設$f(x)=x^3-19x+30$，$g(x)=x^3-4x^2+x+6$，求使$f(x)\,g(x)=0$ 且$f(x)+g(x)\neq 0$ 的x值。

【解答】-1，-5

【詳解】

$f(x)g(x)=0$ 的解為$f(x)=0$ 的解或$g(x)=0$ 的解

$f(x)+g(x)=0$ 的解為$(f(x)，g(x))=0$ 的解，即$f(x)=0$ 與$g(x)=0$ 的共同解

滿足$f(x)g(x)=0$ 且$f(x)+g(x)\neq 0$ 的x值，即求$f(x)=0$ 與$g(x)=0$ 的解刪除共同解即得

$f(x)=x^3-19x+30=(x-2)(x-3)(x+5)=0 \quad \Rightarrow \quad x=2，3，-5$

$g(x)=x^3-4x^2+x+6=(x+1)(x-2)(x-3)=0 \quad \Rightarrow \quad x=-1，2，3$

故所求x的值為 -1，-5

14.設$f(x)$為二次整係數多項式，$g(x)$為三次整係數多項式，其領導係數均為 1，最高公因式為$x-1$，已知$f(x)\cdot g(x)=x^5+2x^4-3x^3-3x^2+2x+1$，求$f(x)$，$g(x)$。

【解答】$(x-1)(x+1)$，$(x-1)(x^2+3x+1)$

【詳解】

$\because \quad x-1 \mid f(x)，x-1 \mid g(x) \quad \therefore \quad (x-1)^2 \mid f(x)\,g(x)=x^5+2x^4-3x^3-3x^2+2x+1$

$\therefore \quad f(x)g(x)=(x-1)^2\cdot(x^3+4x^2+4x+1)=(x-1)^2(x+1)(x^2+3x+1)$

但$f(x)$為二次整係數多項式，$g(x)$為三次整係數多項式

$\therefore \quad f(x)=(x-1)(x+1)，g(x)=(x-1)(x^2+3x+1)$

15.設a，b為實數，若方程式$x^4-8x^3+ax^2+bx-13=0$ 有一根 $2+3i$。

(1)求a，b之值_______________。 (2)解方程式$x^4-8x^3+ax^2+bx-13=0$。___________

【解答】(1) $a=28$，$b=-48$ (2) $x=2\pm 3i$，$2\pm\sqrt{5}$

【詳解】

(1) $x=2+3i \quad \Rightarrow x-2=3i \ \Rightarrow (x-2)^2=(3i)^2 \Rightarrow \quad x^2-4x+4=-9 \quad \Rightarrow \quad x^2-4x+13=0$

$\because \quad f(x)=x^4-8x^3+ax^2+bx-13=0 \in R[x]$

$\therefore \quad f(2+3i)=0$ 必得$f(2-3i)=0 \quad \Rightarrow \quad x^2-4x+13=0 \mid f(x)$

$$
\begin{array}{r|lllll}
 & 1-4 & & -1 & & \\
\cline{2-6}
1-4+13 & 1-8 & & +a & & +b-13 \\
 & 1-4 & & +13 & & \\
\cline{2-6}
 & & -4+(a-13) & & +b & \\
 & & -4 & +16 & -52 & \\
\cline{2-6}
 & & & (a-29)+(b+52)-13 & & \\
 & & & -1 & +4-13 & \\
\cline{2-6}
 & & & (a-28)+(b+48)+0 & & \\
\end{array}
$$

故$a-28=0$，$b+48=0$ 得$a=28$，$b=-48$

(2) $x^4-8x^3+ax^2+bx-13=0 \quad \Rightarrow \quad (x^2-4x+13)(x^2-4x-1)=0$，得$x=2\pm 3i$，$2\pm\sqrt{5}$