<table>
<tr><td colspan="6">高雄市明誠中學 高一數學複習測驗　　日期：95.12.28</td></tr>
<tr><td rowspan="2">範圍</td><td rowspan="2">3-2、5 餘式、因式定理
多項方程式</td><td>班級</td><td>普一　　班</td><td rowspan="2">姓名</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>座號</td><td></td></tr>
</table>

一、填充題(每題 10 分)

1. 試計算：$7^7 - 50 \times 7^5 + 6 \times 7^4 + 4 \times 7^3 + 25 \times 7^2 - 30 \times 7 - 12$ 的值為

(A) -26　(B) 2　(C) -22　(D) 20　(E) -18

【解答】(A)

【詳解】

設 $f(x) = x^7 - 50x^5 + 6x^4 + 4x^3 + 25x^2 - 30x - 12$

$$\begin{array}{rrrrrrrr|l} 1 & +0 & -50 & +6 & +4 & +25 & -30 & -12 & 7 \\ & +7 & +49 & -7 & -7 & -21 & +28 & -14 & \\ \hline 1 & +7 & -1 & -1 & -3 & +4 & -2 & -26 & \end{array}$$

所求 $= f(7) = -26$

2. (複選)下列選項何者為真？

(A)多項式 $f(x)$，$g(x)$的和 $f(x) + g(x)$之次數等於它們次數之和

(B)非零多項式 $f(x)$，$g(x)$和積 $f(x)g(x)$之次數等於它們次數之和

(C)多項式 $f(x)$被一次式 $ax - b$ 及 $x - \dfrac{b}{a}$ 分別除之，所得的餘式相同

(D)設 $f(x)$與 $x - c$ 都是整係數多項式，若有多項式 $g(x)$使得 $f(x) = (x - c)\, g(x)$，則 $g(x)$ 也是整係數多項式

【解答】(B)(C)(D)

【詳解】

(A)錯。$\deg(f(x) + g(x)) \le \text{Max}(\deg f(x)，\deg g(x))$

(B)對。$\deg(f(x)\, g(x)) = \deg f(x) + \deg g(x)$

(C)對。由餘式定理，兩者之餘式均為 $f(\dfrac{b}{a})$

(D)對。若 $g(x)$不是整係數多項式，則 $f(x) = (x - c)\, g(x)$亦不是整係數多項式，矛盾

故 $g(x)$也是整係數多項式

3. (複選)設 $f(x) = 3x^4 - 2x^3 - 10x^2 + 3x + 2$，下列何者為 $f(x)$的因式？

(A) $x - 2$　(B) $x + 3$　(C) $2x - 1$　(D) $3x + 1$　(E) $3x + 2$

【解答】(A)(D)

【詳解】

利用綜合除法及一次因式檢查法(牛頓法)

(A) $f(2) = 0$ $\therefore$ $x - 2 \mid f(x)$　(B) $3 \nmid 2$ $\therefore$ $x + 3 \nmid f(x)$　(C) $2 \nmid 3$ $\therefore$ $2x - 1 \nmid f(x)$

(D) $f(-\dfrac{1}{3}) = 0$ $\therefore$ $3x + 1 \mid f(x)$　(E) $f(-\dfrac{2}{3}) \ne 0$ $\therefore$ $3x + 2 \nmid f(x)$

4. (1) (複選)二次式 $ax^2 + bx - 4$ 以 $x + 1$ 除之得餘式為 3，以 $x - 1$ 除之得餘式為 1，則

(A) $a = 6$　(B) $b = -6$　(C) $b = -1$　(D) $a + b = 5$　(E) $a - b = 6$

(2)承接上題，如以 $x - 2$ 除之得餘式為(A) 20　(B) 18　(C) 16　(D) 14　(E) 12

【解答】(1) (A)(C)(D)　(2) (B)

【詳解】

(1)令$f(x)=ax^2+bx-4$，則$f(-1)=a-b-4=3$　∴　$a-b=7$……①

又$f(1)=a+b-4=1$　∴　$a+b=5$……②

解①，②得$a=6$，$b=-1$

(2)以$x-2$除$f(x)=6x^2-x-4$之餘式爲$f(2)=6\times 4-2-4=18$

5. (複選)設$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ \cdots\ +a_1x+a_0$爲整係數多項式，$a_n\neq 0$，若$f(x)$有$px-q$的因式，$p$，$q\in Z$，$p\neq 0$，$(p，q)=1$且$p+q\neq 0$，$p-q\neq 0$，則

(A) $p\mid a_n$　(B) $p\mid a_0$　(C) $q\mid a_0$　(D) $p-q\mid f(1)$　(E) $p+q\mid f(-1)$

【解答】(A)(C)(D)(E)

【詳解】

用一次因式檢查法，$p\mid a_n$，$q\mid a_0$

∵　$f(x)$有$px-q$因式，設$f(x)=(px-q)\,Q(x)$，$Q(x)$爲整係數多項式

令$x=1$　∴　$f(1)=(p-q)\,Q(1)$

∵　$Q(1)\in Z$，$p-q\neq 0$　∴　$p-q\mid f(1)$

令$x=-1$　∴　$f(-1)=[-(p+q)]\,Q(-1)$

∵　$Q(-1)\in Z$，$p+q\neq 0$　∴　$p+q\mid f(-1)$

6. (複選)設多項式$f(x)$除以$(x-1)(x-2)(x-3)$之餘式爲$2x^2+x-7$，則

(A) $f(x)$除以$x-1$的餘式爲4　(B) $f(x)$除以$x-2$餘式爲3　(C) $f(x)$除以$x-3$餘式爲14

(D) $f(x)$除以$(x-1)(x-2)$的餘式爲$7x-11$　(E) $f(x)$除以$(x-2)(x-3)$的餘式爲$11x+19$

【解答】(B)(C)(D)

【詳解】

設$f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)\,Q(x)+2x^2+x-7$

(A) $f(x)$除以$x-1$的餘式 $=f(1)=0\cdot Q(1)+2+1-7=-4$

(B) $f(x)$除以$x-2$的餘式 $=f(2)=0\cdot Q(2)+8+2-7=3$

(C) $f(x)$除以$x-3$的餘式 $=f(3)=0\cdot Q(3)+18+3-7=14$

(D) $f(x)$除以$(x-1)(x-2)$的餘式 $=(x-1)(x-2)$除$2x^2+x-7$之餘式 $=7x-11$

(E) $f(x)$除以$(x-2)(x-3)$的餘式 $=(x-2)(x-3)$除$2x^2+x-7$之餘式 $=11x-19$

7. (複選) $f(x)=6x^4+ax^3+bx^2+cx+5$，a，b，$c\in N$，則下列何者不可能是$f(x)$的因式？

(A) $x-1$　(B) $x+1$　(C) $2x-1$　(D) $x+3$　(E) $3x+5$

【解答】(A)(C)(D)

【詳解】

利用整係數一次因式檢驗法

若$(px-q)\mid f(x)$，則$p\mid 6$，$q\mid 5$，即$p=1$，2，3，6，$q=\pm 1$，± 5

∴　$(x+3)\nmid f(x)$

又a，b，$c\in N$，係數爲正數無正根，可知$(x-1)$及$(2x-1)$均不可能

二、填充題(每題10分)

1. 設k爲負整數，若$f(x)=x^4-2x^3+x^2+kx-3$有整係數一次因式，求k之值__________。

【解答】-11

【詳解】

設$f(x)$的整係數一次因式爲$ax-b$，則$a\mid 1$，$b\mid -3$，則$ax-b$可爲$x\pm 1$，$x\pm 3$

(1) $x+1 \mid f(x)$ $\Rightarrow$ $f(-1)=0$ $\Rightarrow$ $1+2+1-k-3=0$ $\Rightarrow$ $k=1$（不合）

(2) $x-1 \mid f(x)$ $\Rightarrow$ $f(1)=0$ $\Rightarrow$ $1-2+1+k-3=0$ $\Rightarrow$ $k=3$（不合）

(3) $x+3 \mid f(x)$ $\Rightarrow$ $f(-3)=0$ $\Rightarrow$ $81+54+9-3k-3=0$ $\Rightarrow$ $k=47$（不合）

(4) $x-3 \mid f(x)$ $\Rightarrow$ $f(3)=0$ $\Rightarrow$ $81-54+9+3k-3=0$ $\Rightarrow$ $k=-11$

故 $k=-11$

2. 設$f(x)$以$ax+b$除之，商爲$q(x)$，餘式爲r，則$af(x)$以$x+\dfrac{b}{a}$除之，得到商式爲______，且餘式爲__________。

【解答】$a^2q(x)$，ar

【詳解】

已知$f(x)=(ax+b)\,q(x)+r$，$a\,f(x)=a\,(ax+b)\,q(x)+ar=(x+\dfrac{b}{a})(a^2q(x))+ar$

$\Rightarrow$ 商式爲$a^2q(x)$，餘式爲ar

3. 設$f(x)$爲實係數多項式，以$x-1$除之，餘式爲 9；以$x-2$除之，餘式爲 16，求$f(x)$除以$(x-1)(x-2)$的餘式爲___________。

【解答】$7x+2$

【詳解】

已知 $f(1)=9$，$f(2)=16$，設 $f(x)=(x-1)(x-2)Q(x)+(ax+b)$

$$\begin{cases} f(1)=a+b=9 \\ f(2)=2a+b=16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=7 \\ b=2 \end{cases} \quad \therefore \quad \text{餘式} = 7x+2$$

4. 若多項式$f(x)$除以x^2+2x-3得餘式 $2x+5$；除以$x^2-3x-10$得餘式 $5x-2$，則$f(x)$除以x^2-6x+5的餘式爲___________。

【解答】$4x+3$

【詳解】

$$\text{設}\begin{cases} f(x)=(x^2+2x-3)q_1(x)+2x+5 \\ f(x)=(x^2-3x-10)q_2(x)+5x-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x)=(x+3)(x-1)q_1(x)+2x+5 \\ f(x)=(x-5)(x+2)q_2(x)+5x-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(1)=7 \\ f(5)=23 \end{cases}$$

設$f(x)=(x^2-6x+5)\,Q(x)+R(x)=(x-5)(x-1)\,Q(x)+ax+b$

令$x=1$ $\Rightarrow$ $f(x)=a+b=7$……①；$x=5$ $\Rightarrow$ $f(5)=5a+b=23$……②

由①，②得$a=4$，$b=3$，故餘式$R(x)=ax+b=4x+3$

5. 若多項式$f(x)=8x^3+ax^2+bx+5$ 被 $2x^2+x-1$ 除的餘式爲 $4x+1$，則

(1) $a+b=$__________。 (2) $f(x)$被 $2x-1$ 除的餘式爲__________。

(3)改寫$f(x)=a(2x-1)^3+b(2x-1)^2+c(2x-1)+d$，則序對$(a，b，c，d)=$__________。

(4) $f(0.48)$的近似值爲__________。（以四捨五入法取至小數點後第三位）

【解答】(1) -8 (3) 3 (3)(1，2，-1，3) (4) 3.043

【詳解】

(1)

$$\begin{array}{r|lllll} & 4 & -4 & & & \\ \hline 2+1-1 & 8 & +a & +b & +5 & \\ & 8 & +4 & -4 & & \\ \hline & & (a-4) & +(b+4) & +5 & \\ & & -8 & -4 & +4 & \\ \hline & & (a+4) & +(b+8) & +1 & \end{array}$$

由$r(x)=4x+1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a+4=0 \\ b+8=4 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a=-4 \\ b=-4 \end{cases}$，故$a+b=-8$

(2) $f(x)=8x^3-4x^2-4x+5$，餘式$r=f(\frac{1}{2})=3$（如下綜合除法之餘式）

$$\begin{array}{rrrr|l} 8 & -4 & -4 & +5 & \frac{1}{2} \\ & +4 & +0 & -2 & \\ \hline 8 & +0 & -4 & +3 & \end{array}$$

(3)

$$\begin{array}{l|rrrrl} & 8 & -4 & -4 & +5 & \big| \frac{1}{2} \\ & & +4 & +0 & -2 & \\ \hline 2 & 8 & +0 & -4, & +3 & \longrightarrow d \\ & 4 & +0 & -2 & & \\ & & +2 & +1 & & \\ \hline 2 & 4 & +2, & -1 & \longrightarrow c & \\ & 2 & +1 & & & \\ & & +1 & & & \\ \hline 2 & 2, & +2 & \longrightarrow b & & \\ & 1 & \longrightarrow a & & & \end{array}$$

由上綜合除法之計算，序對$(a，b，c，d)=(1，2，-1，3)$

(4)由(3) $\quad \Rightarrow \quad f(x)=3-(2x-1)+2(2x-1)^2+(2x-1)^3$

　則$f(0.48)=3-(-0.04)+2\times(0.0016)+\ \cdots \doteqdot\ 3.043$

6. 設多項式$f(x)$爲三次式，且$f(0)=f(2)=f(4)=0$，$f(3)=6$，求$f(5)$之值爲__________。

【解答】-30

【詳解】

設 $f(x)=ax(x-2)(x-4)$

令 $x=3$，則 $f(3)=a\times 3\times 1\times(-1)=-3a=6 \quad \Rightarrow \quad a=-2$

$\therefore \quad f(x)=-2x(x-2)(x-4)$，則 $f(5)=-2\times 5\times 3\times 1=-30$

7. 用$x-1$ 除$(x-2)^{2007}+2007$ 所得的餘式爲_____________。

【解答】2006

【詳解】

令$f(x)=(x-2)^{2007}+2007$

由餘式定理 $\quad \Rightarrow \quad$ 餘式$r=f(1)=(1-2)^{2007}+2007=2006$

8. 設多項式$f(x)$除以$x-1$，x^2-2x+3 之餘式依次爲 2，$4x+6$，則 $f(x)$除以$(x-1)(x^2-2x+3)$的餘式爲____________________。

【解答】$-4x^2+12x-6$

【詳解】

$f(x)=(x-1)(x^2-2x+3)\,h(x)+a(x^2-2x+3)+4x+6$

$f(1)=2a+10=2 \quad \Rightarrow \quad a=-4$， 餘式爲 $-4x^2+12x-6$

9. 設$f(x)=(x^2-x+1)\,q(x)+2x-5$，且$f(x)$之各項係數和爲 2，則$q(x)$除以$x-1$ 之餘式爲__。

【解答】5

【詳解】

$f(x)=(x^2-x+1)\,q(x)+2x-5$

$f(x)$之各項係數和爲 2 $\Rightarrow$ $f(1)=2$ $\Rightarrow$ $q(1)+2-5=2$ $\Rightarrow$ $q(1)=5$

故$q(x)$除以$x-1$ 之餘式爲$q(1)=5$

10.(1)將 $3x^3-8x^2+3x+2$ 分解成整係數一次質因式的連乘積爲______________________。

(2)並解方程式 $3x^3-8x^2+3x+2=0$，$x=$________________

【解答】(1)$(x-1)(x-2)(3x+1)$ (2) $x=1,2,-\dfrac{1}{3}$

【詳解】

利用整係數一次因式檢驗法

設$(px-q)\,|\,f(x)$，則 $p\,|\,3$，$q\,|\,2$，即 $p=1$，3，$q=\pm 1$，± 2

（有理根）$\dfrac{q}{p}=\pm 1$，± 2，$\pm\dfrac{1}{3}$，$\pm\dfrac{2}{3}$

$f(1)=0$，即$(x-1)\,|\,f(x)$，又 $f(2)=0$，$(x-2)\,|\,f(x)$，$f(-\dfrac{1}{3})=0$，$(3x+1)\,|\,f(x)$，

$\therefore$ $f(x)=(x-1)(x-2)(3x+1)$

11.設$x-5$ 與$x-7$ 都是$(x-6)^{50}+ax+b$的因式，其中a，b爲常數，則$a+b$之值爲________。

【解答】-1

【詳解】

令$f(x)=(x-6)^{50}+ax+b$，由因式定理

$x-5\,|\,f(x)$ $\Rightarrow$ $f(5)=0$ $\Rightarrow$ $(5-6)^{50}+5a+b=0$ $\Rightarrow$ $5a+b=-1$……①

$x-7\,|\,f(x)$ $\Rightarrow$ $f(7)=0$ $\Rightarrow$ $(7-6)^{50}+7a+b=0$ $\Rightarrow$ $7a+b=-1$……②

②$-$① $2a=0$ $\therefore$ $a=0$ 代入①，$b=-1$，故$a+b=-1$

12.方程式 $4x^4-8x^3+15x^2-24x+9=0$ 的根爲____________________。

【解答】$\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{3}{2}$，$\pm\sqrt{3}i$

【詳解】

設 $f(x)=4x^4-8x^3+15x^2-24x+9$

$\because$ $f(x)$係數「正負相間」 $\therefore$ $f(x)=0$ 無負根

利用有理根檢查法，$f(x)=0$ 的有理根可能是 1，3，9，$\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{3}{2}$，$\dfrac{9}{2}$，$\dfrac{1}{4}$，$\dfrac{3}{4}$或$\dfrac{9}{4}$

$\because$ $f(\dfrac{1}{2})=0$，$f(\dfrac{3}{2})=0$ $\therefore$ $f(x)=(2x-1)(2x-3)(x^2+3)$

$\therefore$ $f(x)=0$ 的根爲$\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{3}{2}$或$\pm\sqrt{3}i$

13.多項式$f(x)=x^{2000}+3x^{90}-5x^{18}+7$ 除以x^3-1 之餘式爲______________。

【解答】x^2+5

【詳解】

設$f(x)=Q(x)(x^3-1)+r(x)$

令$x^3-1=0$，即令$x^3=1$，可由$f(x)$求得餘式$r(x)$

$\because$ $f(x)=(x^3)^{666}x^2+3(x^3)^{30}-5(x^3)^6+7$

$\therefore$ $f(x)$除以x^3-1 之餘式爲 $1^{666}x^2+3(1)^{30}-5(1)^6+7=x^2+5$

14.設$f(x)$與$g(x)$為實係數多項式，以x^2-3x+2除$f(x)$得餘式為 $3x-4$，以$x-1$除$g(x)$得餘式為 5，則以$x-1$除$f(x)+g(x)$的餘式為____________。

【解答】4

【詳解】

$f(x)=(x^2-3x+2)\,q(x)+3x-4 \quad\Rightarrow\quad f(1)=0\cdot q(1)+3-4=-1$

以$x-1$除$g(x)$之餘式為 5 $\quad\Rightarrow\quad g(1)=5$

以$x-1$除$f(x)+g(x)$之餘式為$f(1)+g(1)=(-1)+5=4$

15.設$f(x)=a(x-1)(x-2)+b(x-2)(x-3)+c(x-3)(x-1)$，其中$a$，$b$，$c$為常數，若$f(10)=f(100)=f(1000)=5$，則序組$(a，b，c)=$________________。

【解答】$(\frac{5}{2}，\frac{5}{2}，-5)$

【詳解】

$f(x)=a(x-1)(x-2)+b(x-2)(x-3)+c(x-3)(x-1)$，$\deg f(x)\le 2$

又 $f(10)=f(100)=f(1000)=5 \quad\therefore\quad f(x)=5$

即 $a(x-1)(x-2)+b(x-2)(x-3)+c(x-3)(x-1)=5$

$x=3$ 代入得 $2a=5 \quad\therefore\quad a=\frac{5}{2}$

$x=1$ 代入得 $2b=5 \quad\therefore\quad b=\frac{5}{2}$

$x=2$ 代入得 $-c=5 \quad\therefore\quad c=-5$

$\therefore\quad (a，b，c)=(\frac{5}{2}，\frac{5}{2}，-5)$

16.設$f(x)=x^5+6x^4-4x^3+25x^2+30x+20$，則$f(-7)=$__________。

【解答】6

【詳解】

利用綜合除法

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
1 & +6 & -4 & +25 & +30 & +20 & -7 \\
 & -7 & +7 & -21 & -28 & -14 & \\
\hline
1 & -1 & +3 & +4 & +2, & +6 &
\end{array}$$

得餘式為 6 $\quad\therefore\quad f(-7)=6$

17.分解 $4x^4-4x^3-x^2+x-6$ 為整係數一次式或二次式的乘積__________________________。

【解答】$(x+1)(2x-3)(2x^2-x+2)$

【詳解】

令$f(x)=4x^4-4x^3-x^2+x-6$，若$f(x)$有整係數一次因式$ax-b$，則必$a\mid 4$，$b\mid -6$

由因式定理知：$ax-b\mid f(x) \quad\Rightarrow\quad f(\frac{b}{a})=0$

而$\frac{b}{a}$可能值為± 1，± 2，± 3，± 6，$\pm\frac{1}{2}$，$\pm\frac{3}{2}$，$\pm\frac{1}{4}$，$\pm\frac{3}{4}$

逐一代入$f(x)$，得$f(-1)=0$，$f(\frac{3}{2})=0 \quad\therefore\quad f(x)=(x+1)(2x-3)(2x^2-x+2)$

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
4 & -4 & -1 & +1 & -6 & -1 \\
 & -4 & +8 & -7 & +6 & \\
\hline
4 & -8 & +7 & -6, & +0 & \\
 & +6 & -3 & +6 & & \frac{3}{2} \\
2\,|\;4 & -2 & +4, & 0 & & \\
\hline
2 & -1 & +2 & & &
\end{array}
$$

18.設x的三次式$f(x)=x^3+kx^2+\ell x+m$，（k，ℓ，m為常數）滿足下列條件：

(1) $f(x)$除以x^2+x+1所得餘式為$5x-3$　(2) $f(x)$除以$x-1$所得餘式為 -4

求k，ℓ，m。________________

【解答】$k=-2$，$\ell=3$，$m=-6$

【詳解】

設$f(x)=(x^2+x+1)(x+a)+5x-3$

令$x=1$，則$f(1)=3(1+a)+2=-4$　$\Rightarrow$　$a=-3$

$f(x)=(x^2+x+1)(x-3)+5x-3=x^3-2x^2+3x-6$

$\therefore$　$k=-2$，$\ell=3$，$m=-6$

19.求多項式$(x^2+3x+2)^3$被x^2+2x+3除的餘式_______________。

【解答】$10x+14$

【詳解】

因為 $x^2+3x+2=(x^2+2x+3)+(x-1)$

$\therefore$　$(x^2+3x+2)^3=[(x^2+2x+3)+(x-1)]^3$

$=(x^2+2x+3)^3+3(x^2+2x+3)^2(x-1)+3(x^2+2x+3)(x-1)^2+(x-1)^3$

$=(x^2+2x+3)[(x^2+2x+3)^2+3(x^2+2x+3)(x-1)+3(x-1)^2]+(x^3-3x^2+3x-1)$

$(x^2+3x+2)^3$被x^2+2x+3除的餘式等於x^3-3x^2+3x-1被x^2+2x+3除的餘式

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & x & -5 & & \\
\hline
x^2+2x+3 & x^3-3x^2 & +3x & -1 & \\
 & x^3+2x^2 & +3x & & \\
\hline
 & -5x^2 & +0 & +(-1) & \\
 & -5x^2 & -10x & -15 & \\
\hline
 & & 10x & +14 &
\end{array}
$$

$\therefore$　所求餘式為$10x+14$