高雄市明誠中學　高一數學複習測驗　　日期：95.12.14					
範圍	3-1 多項式四則運算	班級	普一　　　班	姓名	
		座號			

一、填充題(每題 10 分)

1. $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 8x + a$，$g(x) = x^2 - 4x + b$，已知$f(x)$是$g(x)$的倍式，則

   $a =$__________，$b =$__________。

【解答】6；2

【詳解】

$f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 8x + a$是$g(x) = x^2 - 4x + b$的倍式，即$g(x)$整除$f(x)$，用綜合除法

$$\begin{array}{cc|cc|c}
2 & -5 & -8 & +a & \\
 & +8 & +12 & & +4 \\
 & & -2b & -3b & -b \\
\hline
2 & +3 & +(4-2b) & +(a-3b) &
\end{array}$$

餘式為 0，故 $4 - 2b = 0$，$a - 3b = 0$ 得$b = 2$，$a = 6$

2. 設二多項式$f(x)$，$g(x)$其次數均大於 2，已知$f(x)$與$g(x)$除以$x^2 - x - 1$ 之餘式分別為 $2x + 1$ 與$x - 3$，則

   (1) $f(x) + g(x)$除以$x^2 - x - 1$ 之餘式為__________。

   (2) $2f(x) - 3g(x)$除以$x^2 - x - 1$ 之餘式為__________。

   (3) $f(x) \cdot g(x)$除以$x^2 - x - 1$ 之餘式為__________。

【解答】(1) $3x - 2$　(2) $x + 11$　(3) $-3x - 1$

【詳解】

由除法定理，令$f(x) = (x^2 - x - 1)\, q_1(x) + 2x + 1$，$g(x) = (x^2 - x - 1)\, q_2(x) + x - 3$

(1) $f(x) + g(x) = (x^2 - x - 1)[\, q_1(x) + q_2(x)] + 3x - 2$

$\therefore$ $f(x) + g(x)$除以$x^2 - x - 1$ 的餘式為 $3x - 2$

(2) $2f(x) - 3g(x) = [\, 2(x^2 - x - 1)\, q_1(x) + 4x + 2] - [\, 3(x^2 - x - 1)\, q_2(x) + 3x - 9]$

$= (x^2 - x - 1)\, [\, 2q_1(x) - 3q_2(x)\,] + x + 11$

$\therefore$ $2f(x) - 3g(x)$除以$x^2 - x - 1$ 的餘式為$x + 11$

(3) $f(x)\, g(x) = [(x^2 - x - 1)\, q_1(x) + 2x + 1]\, [(x^2 - x - 1)\, q_2(x) + x - 3]$

$= (x^2 - x - 1)^2\, q_1(x)\, q_2(x) + (x^2 - x - 1)(x - 3)\, q_1(x) + (x^2 - x - 1)(2x + 1)\, q_2(x) + (2x + 1)(x - 3)$

$= (x^2 - x - 1)\, Q(x) + (2x + 1)(x - 3) = (x^2 - x - 1)\, Q(x) + 2(x^2 - x - 1) - 3x - 1$

$= (x^2 - x - 1)\, [Q(x) + 2\,] - 3x - 1$

$\therefore$ $f(x)\, g(x)$除以$x^2 - x - 1$ 的餘式為$-3x - 1$

即　$f(x)\, g(x)$除以$x^2 - x - 1$ 的餘式，即$f(x)$及$g(x)$除以$x^2 - x - 1$ 之餘式 $2x + 1$ 與$x - 3$ 之乘積除以$x^2 - x - 1$ 的餘式

3. 設 $3(x - 1)^3 + 4(x - 1)^2 + 2 = a\,(x - 1)(x - 2)(x + 1) + b(x - 1)(x - 2) + c(x - 2) + d$，$a$，$b$，$c$，$d \in R$，則數對$(a，b，c，d) =$__________。

【解答】(3，1，7，9)

令 $x = 2$，$d = 3 + 4 + 2 = 9$

令 $x=1$，$-c+d=2$　$\therefore$　$c=7$

令 $x=-1$　$\therefore$　$6b-3c+d=-6$　$\therefore$　$b=1$

令 $x=0$　$\therefore$　$2a+2b-2c+d=3$　$\therefore$　$a=3$

4. 設 $f(x)=x+2$，$g(x)=x^3-2x^2-7x+8$，若 $f(h(x))=g(x)$，則 $h(x)=$＿＿＿＿＿＿＿。

【解答】x^3-2x^2-7x+6

【詳解】

$\because$　$f(x)=x+2$　$\therefore$　$f(h(x))=h(x)+2$

但 $f(h(x))=g(x)=x^3-2x^2-7x+8$　$\therefore$　$h(x)=g(x)-2=x^3-2x^2-7x+6$

5. 若 $b<-2$ 且 $x^4+2x^3+7x^2+ax+10$ 可被 x^2+2x-b 整除，則 $a+b=$＿＿＿＿＿＿＿。

【解答】-1

【詳解】

$$\begin{array}{ccc|cc|c}
1 & 2 & 7 & a & 10 & -2 \\
 & -2 & 0 & -14-2b & & b \\
 & & b & 0 & b(7+b) & \\
\hline
1 & 0 & 7+b & a-2b-14 & 10+b(7+b) &
\end{array}$$

$\begin{cases} a-2b-14=0 \\ 10+7b+b^2=0 \end{cases}$　$\Rightarrow$　$(a，b)=(4，-5)，(10，-2)$（不合），$a+b=4-5=-1$

6 .設 x^2-x+2 除 $x^4-x^3+x^2+ax+3$ 的餘式為 $2x+b$，$a，b\in R$，則數對 $(a，b)=$＿＿＿＿＿＿＿。

【解答】$(3，5)$

【詳解】

$\because$　x^2-x+2 除 $x^4-x^3+x^2+ax+3$ 的餘式為 $2x+b$

$\therefore$　$x^2-x+2\mid(x^4-x^3+x^2+ax+3)-(2x+b)=x^4-x^3+x^2+(a-2)x+(3-b)$

$$\begin{array}{r|l}
 & 1+0-1 \\
\hline
1-1+2 & 1-1+1+(a-2)+(3-b) \\
 & 1-1+2 \\
\hline
 & \quad -1+(a-2)+(3-b) \\
 & \quad -1+\quad 1 \quad - \quad 2 \\
\hline
 & \qquad (a-3)+(5-b)
\end{array}$$

$\therefore$　$a-3=0$ 且 $5-b=0$　$\therefore$　$a=3$，$b=5$

7. 若多項式 x^3+4x^2+5x-3 除以 $f(x)$ 之商式為 $x+2$，餘式為 $2x-1$，則 $f(x)=$＿＿＿＿＿＿＿。

【解答】x^2+2x-1

【詳解】

由除法定理知 $x^3+4x^2+5x-3=f(x)(x+2)+2x-1$　$\therefore$　$f(x)(x+2)=x^3+4x^2+3x-2$

右式除以 $x+2$ 得 $f(x)=(x^3+4x^2+3x-2)\div(x+2)=x^2+2x-1$

8. 設多項式 $f(x)$ 除以 x^3-1 之餘式為 x^2-1，則 $f(x)$ 除以 x^2+x+1 之餘式為＿＿＿＿＿＿＿。

【解答】$-x-2$

【詳解】

$f(x)=(x^3-1)q(x)+(x^2-1)=(x-1)(x^2+x+1)q(x)+x^2-1$

$=(x^2+x+1)[(x-1)q(x)]+(x^2+x+1)-x-2=(x^2+x+1)[(x-1)q(x)+1]-x-2$

$\Rightarrow$　餘式 $-x-2$

9. 多項式 $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)(x-8)$ 展開後，按降冪排列為 $a_8x^8+a_7x^7+a_6x^6+a_5x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$，求係數 a_7 的值為＿＿＿＿＿＿＿。

【解答】-36
【詳解】$a_7=(-1)+(-2)+(-3)+\cdots+(-8)=-36$

10.以x^2+2x+4除$(x^2+3x+2)^4$之餘式為__________。

【解答】$-72x-144$
【詳解】

令$p=x^2+2x+4 \quad \Rightarrow \quad x^2+3x+2=p+x-2$

$(x^2+3x+2)^4=[p+(x-2)]^4=p^4+4p^3(x-2)+6p^2(x-2)^2+4p(x-2)^3+(x-2)^4$

$=p[p^3+4p^2(x-2)+6p(x-2)^2+4(x-2)^3]+x^4-8x^3+24x^2-32x+16$

$(x^2+3x+2)^4$被p之餘式與$x^4-8x^3+24x^2-32x+16$被p之餘式相同

即$x^4-8x^3+24x^2-32x+16=(x^2+2x+4)(x^2-10x+40)+(-72x-144)$

所求餘式為 $-72x-144$

11.設$n\in N$，$n>2$，求$f(x)=(x+1)(x+2)(x+3)\cdots(x+n)$展開式中$x^{n-1}$，$x^{n-2}$項的係數。

【解答】$\dfrac{1}{2}n(n+1)$，$\dfrac{1}{24}(n-1)n(n+1)(3n+2)$

【詳解】

(1) $f(x)$的x^{n-1}項，係由$(x+1)$，$(x+2)$，$(x+3)$，…，$(x+n)$中的$n-1$個派x，另一個派常數項相乘得之，其係數為$1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

(2) $f(x)$的x^{n-2}項，係由$(x+1)$，$(x+2)$，$(x+3)$，…，$(x+n)$中的$n-2$個派x，另二個派常數項相乘得之

∴ 其係數為

$$\begin{array}{rl}
& 1\times2+1\times3+1\times4+\cdots+1\times n \\
& \quad +2\times3+2\times4+\cdots+2\times n \\
& \quad\quad +3\times4+\cdots+3\times n \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
+) & \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad +(n-1)n}
\end{array}$$

即1，2，3，4，…，n中兩兩乘積的和

$=\dfrac{1}{2}[(1+2+\cdots+n)^2-(1^2+2^2+\cdots+n^2)]$

$=\dfrac{1}{2}\cdot\{[\dfrac{n(n+1)}{2}]^2-\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}\}=\dfrac{1}{24}(n-1)n(n+1)(3n+2)$

二、證明題(每題10分)

1. 若n為自然數，則$10^{n+1}-9n-10$恆可被81整除，試證之。

【證明】

(1) $n=1$時，$10^{n+1}-9n-10=100-9-10=81$可被81整除，故$n=1$時，原式成立

(2) 設$n=k$時命題成立，即$10^{k+1}-9k-10=81q$，$q\in N$

當$n=k+1$時，$10^{n+1}-9n-10=10^{k+2}-9(k+1)-10=10\cdot10^{k+1}-9k-19$

$=10(10^{k+1}-9k-10)-9k-19+90k+100$

$=10(10^{k+1}-9k-10)+81k+81$

$=10\cdot81q+81k+81$

$=81(10q+k+1)$可被81整除，故$n=k+1$時，成立

依數學歸納法得證，$n\in N$時，$10^{n+1}-9n-10$恆可被81整除

2. 試證：對所有自然數n而言，下式恆成立：$1^2+2^2+3^2+\ \cdots\ +n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 。

【證明】

(1) $n=1$ 時，左式只有 1 項，即 $1^2=1$，右式=$\dfrac{1}{6}\cdot 1\cdot 2\cdot 3=1$，故原式成立

(2)設$n=k$時成立，即 $1^2+2^2+\ \cdots\ +k^2=\dfrac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$

則$n=k+1$ 時，$1^2+2^2+\ \cdots\ +n^2=1^2+2^2+\ \cdots\ +k^2+(k+1)^2$

$=\dfrac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+(k+1)^2=\dfrac{1}{6}(k+1)[k(2k+1)+6(k+1)]$

$=\dfrac{1}{6}(k+1)(2k^2+7k+6)=\dfrac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$

$=\dfrac{1}{6}(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

所以由$n=k$成立，可推得$n=k+1$ 成立

由數學歸納法知，$1^2+2^2+3^2+\ \cdots\ +n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ，對每一個自然數n都成立

3. $n\in N$，證明：$\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\ \cdots\ +\dfrac{1}{n^2}\le 2-\dfrac{1}{n}$ 。

【證明】

(1)當 $n=1$ 時，左式=$\dfrac{1}{1^2}\le 2-\dfrac{1}{1}$=右式 $\therefore$ 原式成立

(2)設 $n=k$ 時，原式成立，即$\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\ \cdots\ +\dfrac{1}{k^2}\le 2-\dfrac{1}{k}$

則 $n=k+1$ 時， $\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\ \cdots\ +\dfrac{1}{k^2}+\dfrac{1}{(k+1)^2}$

$\le 2-\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{(k+1)^2}$

$\le 2-\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{k(k+1)}=2-\dfrac{1}{k}+(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1})=2-\dfrac{1}{k+1}$ ，原式成立

由數學歸納法原理，對每一個自然數 n 原式恆成立