<table>
<tr><td colspan="6">高雄市明誠中學 高一數學複習測驗 日期：95.12.21</td></tr>
<tr><td rowspan="2">範
圍</td><td rowspan="2">3-1,2 多項式 2、
餘式、因式定理</td><td>班級</td><td>普一 班</td><td rowspan="2">姓
名</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>座號</td><td></td></tr>
</table>

一、填充題(每題 10 分)

1. 多項式 $f(x)$ 滿足 $8f(x)-5x^6 f(x^3)-2f(x^2)+18=0$，則 $f(x)$ 的常數項爲__________。

【解答】-3

【詳解】

(1) $f(x)$ 的常數項爲 $f(0)$

(2)由 $8f(x)-5x^6 f(x^3)-2f(x^2)+18=0$，令 $x=0$

$\therefore\ 8f(0)-0-2f(0)+18=0 \quad \therefore\ f(0)=-3$

2. 若 $b<-2$ 且 $x^4+2x^3+7x^2+ax+10$ 可被 x^2+2x-b 整除，則 $a+b=$__________。

【解答】-1

【詳解】

$$\begin{array}{ccc|cc|c}
1 & 2 & 7 & a & 10 & -2 \\
 & -2 & 0 & -14-2b & & b \\
 & & b & 0 & b(7+b) & \\
\hline
1 & 0 & 7+b & a-2b-14 & 10+b(7+b) &
\end{array}$$

$\begin{cases} a-2b-14=0 \\ 10+7b+b^2=0 \end{cases} \Rightarrow (a，b)=(4，-5)，(10，-2)$（不合）， $a+b=4-5=-1$

3. 設 $x^4=(x+k)(x-1)(x+2)(x-2)+a(x-1)(x+2)+b(x-1)+c$，則 $a+b+c+k=$______。

【解答】2

【詳解】

令 $x=1 \Rightarrow 1=c$；$x=-2 \Rightarrow 16=-3b+1 \quad \therefore\ b=-5$

$x=2 \Rightarrow 16=4a-5+1 \quad \therefore\ a=5$；$x=0 \Rightarrow 0=4k-10+5+1$

$\therefore\ k=1$，則 $a+b+c+k=2$

3. 設 $f(x)$ 以 $x-\dfrac{b}{a}$ 除之商爲 $q(x)$，餘式爲 r，則 $xf(x)+2$ 被 $(ax-b)$ 除之商式爲__________。

【解答】$\dfrac{x}{a}q(x)+\dfrac{r}{a}$

【詳解】

$f(x)=(x-\dfrac{b}{a})\,q(x)+r \Rightarrow xf(x)+2=(x-\dfrac{b}{a})\,xq(x)+xr+2$

$=(ax-b)\dfrac{x}{a}q(x)+(ax-b)\dfrac{r}{a}+\dfrac{br}{a}+2$ (除法原理)

$=(ax-b)(\dfrac{x}{a}q(x)+\dfrac{r}{a})+\dfrac{br}{a}+2$

$\therefore\ xf(x)+2$ 被 $(ax-b)$ 除之商式爲 $\dfrac{x}{a}q(x)+\dfrac{r}{a}$

4. $7^5-6\times7^4-4\times7^3-26\times7^2+33\times7+21=$__________。

【解答】7

【詳解】

令 $f(x)=x^5-6x^4-4x^3-26x^2+33x+21$，所求爲 $f(7)$

由綜合除法

$$\begin{array}{rrrrrr|l} 1 & -6 & -4 & -26 & +33 & +21 & 7 \\ & +7 & +7 & +21 & -35 & -14 & \\ \hline 1 & +1 & +3 & -5 & -2 & ,\ +7 & \end{array}$$

∴　所求 $= f(7) = 7$

5. 設多項式 $f(x)$ 除以 $x^3 - 1$ 之餘式為 $x^2 - 1$，則 $f(x)$ 除以 $x^2 + x + 1$ 之餘式為__________。

【解答】$-x-2$

【詳解】

$f(x) = (x^3 - 1)\,q(x) + (x^2 - 1) = (x-1)(x^2+x+1)\,q(x) + x^2 - 1$

$= (x^2+x+1)\,[(x-1)\,q(x)] + (x^2+x+1) - x - 2$　(除法原理)

$= (x^2+x+1)\,[(x-1)\,q(x) + 1] - x - 2$　⇒　餘式 $-x-2$

6. 設 $f(x) = x^5 - 7x^4 - 58x^3 + 16x^2 - 460x - 200$，則 $f(12) =$ __________。

【解答】40

【詳解】

$f(x) = x^5 - 7x^4 - 58x^3 + 16x^2 - 460x - 200$

以 $x-12$ 除 $f(x)$ 的餘式即為 $f(12)$，用綜合除法得

$$\begin{array}{rrrrrr|l} 1 & -7 & -58 & +16 & -460 & -200 & 12 \\ & +12 & +60 & +24 & +480 & +240 & \\ \hline 1 & +5 & +2 & +40 & +20 & +40 & \end{array}$$

故 $f(12) = 40$

7. $f(x) = x^6 - 5x^5 + 4x^4 - 50x^3 + 49x^2 + 110x - 107$，則 $f(f(1)) =$__________。

【解答】-123

【詳解】由綜合除法先求 $f(1) = 2$　∴再用綜合除法求　$f(f(1)) = f(2) = -123$

8. 若 $x^3 + 3x^2 + mx + 2$ 可被 $x^2 + nx + 1$ 整除，則 $(m，n) =$ __________。

【解答】(3，1)

【詳解】

$$\begin{array}{cc|cc|l} 1 & +3 & +m & +2 & \\ & -n & -n(3-n) & & -n \\ & & -1 & -(3-n) & -1 \\ \hline 1 & +(3-n) & +0 & +0 & \end{array}$$

∵　整除，$\begin{cases} m - n(3-n) - 1 = 0 \\ 2 - (3-n) = 0 \end{cases}$，得 $\begin{cases} m = 3 \\ n = 1 \end{cases}$，故數對 $(m，n) = (3，1)$

9. 已知 $f(x) = (x^2+1)(x^{10}+1) + x - 1$，則

(1) $f(x)$ 除以 $x+1$ 得餘式為__________。　(2) $(x+1)\,f(x)$ 除以 x^2+1 得商式為__________。

【解答】(1) 2　(2) $x^{11} + x^{10} + x + 2$

【詳解】

(1)所求 $= f(-1) = [(-1)^2 + 1][(-1)^{10} + 1] - 1 - 1 = 2 \cdot 2 - 1 - 1 = 2$

(2) $(x+1)\,f(x) = (x+1)(x^2+1)(x^{10}+1) + (x+1)(x-1)$

$= (x^2+1)(x+1)(x^{10}+1) + (x^2+1) - 2 = (x^2+1)[(x+1)(x^{10}+1) + 1] - 2$

得商式為$(x+1)(x^{10}+1)+1=x^{11}+x^{10}+x+2$

10.設$f(x)=x^4-8x^3+25x^2-30x+8=a(x-2)^4+b(x-2)^3+c(x-2)^2+d(x-2)+e$，則

(1) $a+b+c+d+e$之值為＿＿＿＿＿。

(2) $f(1.99)$的近似值為＿＿＿＿＿。（至小數點以下第二位，第三位四捨五入）

【解答】(1) 8　(2) -0.06

【詳解】

(1)
$$
\begin{array}{rrrrr|l}
1 & -8 & +25 & -30 & +8 & 2 \\
 & +2 & -12 & +26 & -8 & \\
\hline
1 & -6 & +13 & -4 & \multicolumn{1}{|r}{+0} & \\
 & +2 & -8 & +10 & & \\
\hline
1 & -4 & +5 & \multicolumn{1}{|r}{+6} & & \\
 & +2 & -4 & & & \\
\hline
1 & -2 & \multicolumn{1}{|r}{+1} & & & \\
 & +2 & & & & \\
\hline
1 & \multicolumn{1}{|r}{+0} & & & &
\end{array}
$$

$\Rightarrow$　$a=1$，$b=0$，$c=1$，$d=6$，$e=0$，　$a+b+c+d+e=8$

(2) $f(1.99)=1\cdot(1.99-2)^4+0\cdot(1.99-2)^3+1\cdot(1.99-2)^2+6\cdot(1.99-2)+0$

$=(-0.01)^4+(-0.01)^2+6(-0.01)\ \doteqdot\ 6(-0.01)\doteqdot-0.06$

11. $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=(x-2)^4-2(x-2)^3+3(x-2)^2-2(x-2)+1$，則$d=$＿＿。

【解答】-70

【詳解】

令$(x-2)=t$　$\Rightarrow$　$x=t+2$

原式　$\Rightarrow$　$t^4-2t^3+3t^2-2t+1=a(t+2)^4+b(t+2)^3+c(t+2)^2+d(t+2)+e$

$$
\begin{array}{l}
1-2+\ 3-\ 2+\ 1\ \lfloor -2 \\
\ \ -2+\ 8-22+48 \\
\hline
1-4+11-24+49 \longrightarrow e \\
\ \ -2+12-46\ \lfloor -2 \\
\hline
1-6+23-70 \longrightarrow d
\end{array}
$$

12.求 $81(0.666)^4-54(0.666)^3-63(0.666)^2+39(0.666)+5$ 之近似值到小數點後第三位＿＿＿（第四位以後四捨五入）。

【解答】3.014

【詳解】

令$f(x)=81x^4-54x^3-63x^2+39x+5$；因為 $3(0.666)=1.998$

由綜合除法可知$f(x)=1\cdot(3x-2)^4+6(3x-2)^3+5(3x-2)^2-7(3x-2)+3$

$\because$　$3x-2=3(0.666)-2=1.998-2=-0.002$

故$f(0.666)\doteqdot 3.014$（只取後二項之值即可）

13.設$f(x)=81x^4-63x^2+39x+5$，則$f(0.334)$之近似值至小數點第三位為＿＿＿＿＿。

【解答】12.006

【詳解】因為 $3(0.334)=1.002$

$$
\begin{array}{c|ccccc|c}
 & 81 & +0 & -63 & +39 & +5 & 1 \\
 & & +27 & +9 & -18 & +7 & 3 \\
\hline
3 & 81 & +27 & -54 & +21 ,& +12 & \\
 & 27 & +9 & -18 & +7 & & \\
 & & +9 & +6 & -4 & & \\
\hline
3 & 27 & +18 & -12 ,& +3 & & \\
 & 9 & +6 & -4 & & & \\
 & & +3 & +3 & & & \\
\hline
3 & 9 & +9 ,& -1 & & & \\
 & 3 & +3 & & & & \\
 & & +1 & & & & \\
\hline
3 & 3 ,& +4 & & & & \\
 & 1 & & & & &
\end{array}
$$

$f(x) = (3x-1)^4 + 4(3x-1)^3 - (3x-1)^2 + 3(3x-1) + 12$

$\therefore\ f(0.334) = (0.002)^4 + 4(0.002)^3 - (0.002)^2 + 3(0.002) + 12 \fallingdotseq 3(0.002) + 12 \fallingdotseq 12.006$

14.$f(x) = (x^5 - 2x^3 + x + 1)^{2001}$展式中之係數和爲__________。

【解答】1

【詳解】

$f(x)$的各項係數和爲$f(1) = (1^5 - 2 \cdot 1^3 + 1 + 1)^{2001} = 1$ $\quad\therefore\ f(x)$的各項係數和爲 1

15.k爲整數，設$f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 + kx - 1$，$g(x) = x^3 + kx^2 + 2x + 3$，若$f(x) \cdot g(x)$之展式中所有偶次項係數和爲所有奇次項係數和的二倍，則$k =$__________。

【解答】$k = 3$

【詳解】

$\because\ f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 + kx - 1$，$g(x) = x^3 + kx^2 + 2x + 3$

$\therefore\ f(1) = k - 1$，$f(-1) = -k + 5$，$g(1) = k + 6$，$g(-1) = k$

由$\dfrac{f(1)g(1) + f(-1)g(-1)}{2} = 2 \times \dfrac{f(1)g(1) - f(-1)g(-1)}{2}$

$\Rightarrow\ (k-1)(k+6) + (k+5)k = 2[(k-1)(k+6) - (-k+5)k]$

$\Rightarrow\ k^2 + 5k - 6 - k^2 + 5k = 2(k^2 + 5k - 6 + k^2 - 5k)$

$\Rightarrow\ 10k - 6 = 2(2k^2 - 6)\quad \Rightarrow\ 5k - 3 = 2k^2 - 6$

$\Rightarrow\ 2k^2 - 5k - 3 = 0\quad \Rightarrow\ (2k+1)(k-3) = 0$

$\therefore\ k = -\dfrac{1}{2}$或 3 $\quad\because\ k \in Z\quad \therefore\ k = 3$

16.$(x-1)h(x)$被$x^2 + x + 1$除的餘式爲$6x + 3$，則多項式$h(x)$被$x^2 + x + 1$除的餘式爲________。

【解答】$-3x$

【詳解】

設$h(x) = (x^2 + x + 1)q(x) + ax + b$

$(x-1)h(x) = (x-1)(x^2 + x + 1)q(x) + (x-1)(ax+b)$

$= (x^2 + x + 1)(x-1)q(x) + [ax^2 + (b-a)x - b]$

$= (x^2 + x + 1)(x-1)q(x) + [a(x^2 + x + 1) + (b-2a)x + (-a-b)]$ (除法原理)

$= (x^2 + x + 1)[(x-1)q(x) + a] + (b-2a)x + (-a-b)$

$\Rightarrow\ (b-2a)x + (-a-b) = 6x + 3$，$\begin{cases} b - 2a = 6 \\ -a - b = 3 \end{cases}$得$\begin{cases} a = -3 \\ b = 0 \end{cases}$，故餘式$r(x) = ax + b = -3x$

17.設$(x^5-3x^4+4x^3-2x^2+6)(2x^4+x^3-4x^2-3x+5)=a_9x^9+a_8x^8+a_7x^7+\cdots+a_1x+a_0$，則

(1) $a_8+a_6+a_4+a_2+a_0$ 之值 =__________。

(2) $a_9+a_7+a_5+a_3+a_1$ 之值 =__________。

【解答】(1) -7 (2) 13

【詳解】

$f(x)=(x^5-3x^4+4x^3-2x^2+6)(2x^4+x^3-4x^2-3x+5)=a_9x^9+a_8x^8+a_7x^7+\cdots+a_1x+a_0$

則$f(1)=a_9+a_8+a_7+\cdots+a_1+a_0=(1-3+4-2+6)(2+1-4-3+5)=6$

$f(-1)=-a_9+a_8-a_7+a_6-\cdots-a_1+a_0=(-1-3-4-2+6)(2-1-4+3+5)=-20$

(1) 偶次項係數和$a_8+a_6+a_4+a_2+a_0=\dfrac{f(1)+f(-1)}{2}=\dfrac{6-20}{2}=-7$

(2) 奇次項係數和$a_9+a_7+a_5+a_3+a_1=\dfrac{f(1)-f(-1)}{2}=\dfrac{6+20}{2}=13$

18.設$f(x)$爲一多項式，已知$(x-1)f(x)$除以x^2-2x+2 的餘式爲 $3x+4$，求

$f(x)$除以x^2-2x+2 的餘式____________________。

【解答】$-7x+10$

【詳解】

設 $f(x)=(x^2-2x+2)\,Q(x)+ax+b$

$\therefore\ (x-1)f(x)=(x-1)(x^2-2x+2)\,Q(x)+(x-1)(ax+b)$

$=(x-1)(x^2-2x+2)\,Q(x)+ax^2+(b-a)x-b$

$=(x-1)(x^2-2x+2)\,Q(x)+a(x^2-2x+2)+[(a+b)x-(2a+b)]$

又$(x-1)f(x)$除以x^2-2x+2 餘式爲 $3x+4$ $\therefore\ (a+b)x-(2a+b)=3x+4$

$\therefore\ \begin{cases}a+b=3\\-(2a+b)=4\end{cases}$ $\therefore\ a=-7$，$b=10$ $\therefore\ f(x)$除以x^2-2x+2 的餘式爲$-7x+10$

19.設多項式$f(x)$除以x^2-x+3 之餘式爲$x-2$，$g(x)$除以x^2-x+3 之餘式爲 $2x+3$，求

$f(x)\cdot g(x)$除以x^2-x+3 之餘式________________。

【解答】$x-12$

【詳解】

設 $f(x)=(x^2-x+3)\,m(x)+(x-2)$，$g(x)=(x^2-x+3)\,n(x)+(2x+3)$

$\therefore\ f(x)\cdot g(x)=(x^2-x+3)^2\cdot m(x)\cdot n(x)+(x^2-x+3)[(2x+3)\,m(x)+(x-2)\,n(x)]$

$+(x-2)(2x+3)$

$\therefore\ f(x)\cdot g(x)$除以$x^2-x+3$ 之餘式 $=(x-2)(2x+3)$除以x^2-x+3 之餘式

$=2x^2-x-6$ 除以x^2-x+3 之餘式 $=x-12$

20.設多項式$f(x)=x^6+2x^4+4x^3+ax^2+bx+1$，$g(x)=x^6+2x^4+3x^3+x^2+x+1$ 除以

x^2+x+2 的餘式相同，求實數a，b之值。

【解答】$a=2$，$b=3$

【詳解】

$$\begin{array}{l}\text{設}\quad f(x)=(x^2+x+2)\cdot m(x)+r(x)\\ \underline{-)\ g(x)=(x^2+x+2)\cdot n(x)+r(x)}\\ f(x)-g(x)=(x^2+x+2)\,[m(x)-n(x)]\end{array}$$

即 $x^2+x+2\mid f(x)-g(x)$

$\therefore\ x^2+x+2\mid(x^6+2x^4+4x^3+ax^2+bx+1)-(x^6+2x^4+3x^3+x^2+x+1)$

$\Rightarrow \quad x^2+x+2 \mid x^3+(a-1)x^2+(b-1)x$

$$\begin{array}{r|l}
 & 1 \\
\hline
1+1+2 & 1+(a-1)+(b-1)+0 \\
 & 1+\quad 1 \quad + \quad 2 \\
\hline
 & \quad (a-2)+(b-3)+0
\end{array}$$

$\therefore \quad a-2=0$，$b-3=0 \quad \therefore \quad a=2$，$b=3$

21.設a，b為整數，若$x^4+6x^3+ax^2-12x+b$為完全平方式，求a，b的值。

【解答】$a=5$，$b=4$

【詳解】

設$x^4+6x^3+ax^2-12x+b=(x^2+mx+n)^2=x^4+2mx^3+(m^2+2n)x^2+2mnx+n^2$

比較係數得 $2m=6$，$a=m^2+2n$，$-12=2mn$，$b=n^2$

$\therefore \quad m=3$，$n=-2$，$a=5$，$b=4$

22.設多項式$f(x)$，以$ax+b$除之得商$q(x)$，餘式為r（$a\neq 0$），試求以$ax+b$除$x^2f(x)$的商及餘式。

【解答】商$x^2q(x)+\dfrac{r}{a}x-\dfrac{br}{a^2}$，餘式$\dfrac{b^2r}{a^2}$

【詳解】

已知 $f(x)=(ax+b)\,q(x)+r$，則$x^2f(x)=(ax+b)\cdot x^2q(x)+rx^2$

又$x^2=(ax+b)(\dfrac{1}{a}x-\dfrac{b}{a^2})+\dfrac{b^2}{a^2}$

$$\begin{array}{r|ccc|l}
 & 1 & 0 & 0 & -\dfrac{b}{a} \\
 & & -\dfrac{b}{a} & \dfrac{b^2}{a^2} & \\
\hline
a & 1 & -\dfrac{b}{a}, & +\dfrac{b^2}{a^2} & \\
\hline
 & \dfrac{1}{a} & -\dfrac{b}{a^2} & &
\end{array}$$

$\therefore \quad x^2f(x)=(ax+b)\,x^2q(x)+(ax+b)(\dfrac{r}{a}x-\dfrac{br}{a^2})+\dfrac{b^2r}{a^2}=(ax+b)\,[x^2q(x)+\dfrac{r}{a}x-\dfrac{br}{a^2}]+\dfrac{b^2r}{a^2}$

故$x^2f(x)$除以$ax+b$的商為$x^2q(x)+\dfrac{r}{a}x-\dfrac{br}{a^2}$，餘式$\dfrac{b^2r}{a^2}$

23.設$x=1+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}$，求$x^3-3x^2-6x+5$的值。

【解答】9

【詳解】

$x=1+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}$，$(x-1)^3=(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9})^3=3+9+3\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{9}(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9})=12+9(x-1)$

故 $x^3-3x^2+3x-1=12+9(x-1) \Rightarrow x^3-3x^2-6x=4$，

所以 原式 $x^3-3x^2-6x+5=4+5=9$