高雄市明誠中學 高一數學複習測驗 日期：95.12.06					
範圍	2-3 數學歸納法	班級	普一　　班	姓名	
		座號			

一、填充題(每題 10 分)

1. 設c爲正整數，若不論n爲任何正整數，$10^n + 3 \cdot 4^n + c$都是 9 的倍數，則c被 9 除的餘數必爲__________。

【解答】5

【詳解】

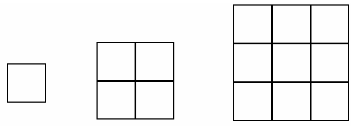
$10^n + 3 \cdot 4^n + c = (9 + 1)^n + 3\,(3 + 1)^n + c = (9p + 1) + 3(3k +1) + c$

$= 9(p+ m\,)+ (1 + 3 + c) = 9(p+ m\,) + (4 + c)$，其中$p$、$m \in N$

依題意 $9 \mid (10^n + 3 \cdot 4^n + c) \iff 9 \mid [9(p+ m\,)+ (4 + c)] \iff 9 \mid (4 + c) \iff c = 9k + 5$

即c被 9 除的餘數必爲 5

2. 一個邊長爲n的大正方形中，共有n^2個單位正方形，如果每一個單位正方形的邊都恰有一根火柴棒，而此大正方形共用了a_n根火柴棒，那麼$a_{n+1} - a_n =$__________。



a_1=4　a_2=12　a_3=24

【解答】$4n + 4$

【詳解】

如上圖：當$n = 1$時，$a_1 = 4$；當$n = 2$時，$a_2 = 4 + 8 = a_1 + 4 \cdot 2 = 12$

當$n = 3$時，$a_3 = 12 + 12 = a_2 + 4 \cdot 3 = 24$；當$n = 4$時，$a_4 = 24 + 16 = a_3 + 4 \cdot 4 = 40$，⋯

當$n = k + 1$時，$a_{k+1} = a_k + 4\,(k + 1)$，故推得$a_{n+1} = a_n + 4\,(n + 1)$

3. 設$n \in N$時，我們無法利用數學歸納法證明 $2 + 6 + 10 + \cdots + 2(2n - 1) = 2n^2 + 2$ 的原因是__________。

【解答】$n = 1$時，此式不成立

4. 求 $1 + 1^2 + 2 + 2^2 + 3 + 3^2 + \cdots + 30 + 30^2$之和=__________。

【解答】9920

【詳解】

原式$= (1 + 2 + \cdots + 30) + (1^2 + 2^2 + \cdots + 30^2)$

$= \dfrac{1}{2} \cdot 30 \cdot 31 + \dfrac{1}{6} \cdot 30 \cdot 31 \cdot 61 = 465 + 9455 = 9920$

二、證明題(每題 10 分)

1. 試用數學歸納法證明：$\dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \dfrac{1}{4\cdot 5} + \cdots + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{n}{2(n+2)}$。

【證明】

(1) $n = 1$時，左式 $= \dfrac{1}{2\cdot 3} = \dfrac{1}{6}$，右式 $= \dfrac{1}{2(1+2)} = \dfrac{1}{6}$，故 $n = 1$時，此式成立

(2) 設 $n = k$時此式成立，即$\dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \dfrac{1}{4\cdot 5} + \cdots + \dfrac{1}{(k+1)(k+2)} = \dfrac{k}{2(k+2)}$

則 $n = k + 1$時，左式 $= \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \dfrac{1}{4\cdot 5} + \cdots + \dfrac{1}{(k+1)(k+2)} + \dfrac{1}{(k+2)(k+3)}$

$=\dfrac{k}{2(k+2)}+\dfrac{1}{(k+2)(k+3)}=\dfrac{k(k+3)+2}{2(k+2)(k+3)}=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2(k+2)(k+3)}=\dfrac{(k+1)}{2(k+1+2)}=$ 右式

故 $n=k+1$ 時，此式成立

由(1)(2)依數學歸納法，對於自然數 n，$\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 5}+\cdots+\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}=\dfrac{n}{2(n+2)}$

2. 若n爲自然數，則 $10^{n+1}-9n-10$ 恆可被 81 整除，試證之。

【證明】

(1) $n=1$ 時，$10^{n+1}-9n-10=100-9-10=81$ 可被 81 整除，故$n=1$ 時，原式成立

(2) 設$n=k$時命題成立，即 $10^{k+1}-9k-10=81m$，$m\in N$

則$n=k+1$ 時，$10^{n+1}-9n-10=10^{k+2}-9(k+1)-10$

$=10\cdot 10^{k+1}-9k-19$

$=10(10^{k+1}-9k-10)-9k-19+90k+100$

$=10(10^{k+1}-9k-10)+81k+81$

$=10\cdot 81m+81k+81$

$=81(10m+k+1)$被 81 整除；故$n=k+1$ 時，成立

由(1)(2)依數學歸納法得證，$n\in N$時，$10^{n+1}-9n-10$ 恆可被 81 整除

3. 試證：對所有正整數 $n\geq 2$，有 $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}>\dfrac{2n}{n+1}$。

【證明】

(1) $n=2$ 時，左式 $=1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$，右式 $=\dfrac{2\cdot 2}{2+1}=\dfrac{4}{3}$；$\dfrac{3}{2}>\dfrac{4}{3}$，故 $n=2$ 時，原式成立

(2) 設 $n=k\geq 2$ 時原式成立，即 $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{k}>\dfrac{2k}{k+1}$

則 $n=k+1$ 時，左式 $=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{k+1}>\dfrac{2k}{k+1}+\dfrac{1}{k+1}$

$=\dfrac{2k+1}{k+1}>\dfrac{2(k+1)}{k+2}$(真分數愈加愈大)

即 $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{k+1}>\dfrac{2(k+1)}{k+2}$，故 $n=k+1$ 時，原式成立

由(1)(2)依數學歸納法，對所有正整數 $n\geq 2$，有 $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}>\dfrac{2n}{n+1}$

4. $n\in N$，$2^{n+2}+3^{2n+1}$爲某一質數p的倍數(1)求此質數p (2)以數學歸納法證明之。

【詳解】

(1)當$n=1$ 時，$2^{1+2}+3^{2+1}=35$ ，當$n=2$ 時，$2^{2+2}+3^{4+1}=259$

$\because$ $(35，259)=7$ $\therefore$ $p=7$

(2)當$n=1$ 時，$35=5\times 7$ 爲 7 的倍數

設$n=k$時成立，即 $2^{k+2}+3^{2k+1}=7m$，$m\in N$

則$n=k+1$ 時， $2^{k+3}+3^{2k+3}=2\cdot 2^{k+2}+9\cdot 3^{2k+1}$

$=2(2^{k+2}+3^{2k+1})+7\cdot 3^{2k+1}=2\cdot 7m+7\cdot 3^{2k+1}=7(2m+3^{2k+1})$爲 7 的倍數

由數學歸納法，知$\forall n\in N$，$2^{n+2}+3^{2n+1}$恆爲 7 的倍數

5. 試利用數學歸納法證明：$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$，$n\in N$。

【證明】

(1) $1^3=1=\frac{1^2(1+1)^2}{4}$ $\therefore$ $n=1$時，命題成立

(2)設$n=k$時，命題成立，即$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3=\frac{k^2(k+1)^2}{4}$

則$n=k+1$時，$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3+(k+1)^3=\frac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3$

$=\frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4}=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$，$n=k+1$時，命題也成立

由(1)，(2) 對所有自然數n，$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

6. 試證：對所有自然數n而言，下式恆成立：$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$。

【證明】

(1) $n=1$時，左式只有1項，即$1^2=1$，右式$=\frac{1}{6}\cdot1\cdot2\cdot3=1$，故原式成立

(2)設$n=k$時成立，即$1^2+2^2+\cdots+k^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$

則$n=k+1$時，$1^2+2^2+\cdots+n^2=1^2+2^2+\cdots+k^2+(k+1)^2$

$=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+(k+1)^2=\frac{1}{6}(k+1)[k(2k+1)+6(k+1)]$

$=\frac{1}{6}(k+1)(2k^2+7k+6)=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$

$=\frac{1}{6}(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$，即$n=k+1$原式成立

由數學歸納法知，原式對每一個自然數n都成立

7. 試證：對所有大於2的自然數n而言，下式恆成立：$5^n>3^n+4^n$。。

【證明】

(1)當$n=3$時，$5^3=125$，$3^3+4^3=27+64=91$，$5^3>3^3+4^3$故原式成立

(2)設$n=k$時成立，即$5^k>3^k+4^k$

則$n=k+1$時，$5^{k+1}=5\cdot5^k>5\cdot(3^k+4^k)>3\cdot3^k+4\cdot4^k=3^{k+1}+4^{k+1}$，當 $n=k+1$原式成立

由數學歸納法知，對所有大於2的自然數n，$5^n>3^n+4^n$成立

8. 設n為正整數，試證：$1+2+3+\cdots+(n-1)+n+(n-1)+\cdots+3+2+1=n^2$。

【證明】

(1)當$n=1$時，左式$=1$，右式$=1$ 原式成立

(2)設$n=k$原式成立，即$1+2+3+\cdots+(k-1)+k+(k-1)+\cdots+3+2+1=k^2$成立

當$n=k+1$時，$1+2+3+\cdots+(k-1)+k+(k+1)+k+(k-1)+\cdots+3+2+1$

$=[1+2+3+\cdots+(k-1)+k+(k-1)+\cdots+3+2+1]+(k+1)+k$

$=k^2+2k+1=(k+1)^2$， 即當$n=k+1$時，原式也成立

由(1)，(2)及數學歸納法知

$1+2+3+\cdots+(n-1)+n+(n-1)+\cdots+3+2+1=n^2$對任意自然數$n$都成立

9. $n\in N$，證明：$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\le2-\frac{1}{n}$。

【證明】

(1)當 $n=1$ 時，左式$=\dfrac{1}{1^2}\le 2-\dfrac{1}{1}$=右式　∴　原式成立

(2)設 $n=k$ 時，原式成立，即$\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{k^2}\le 2-\dfrac{1}{k}$

當 $n=k+1$ 時，左式$=\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{k^2}+\dfrac{1}{(k+1)^2}\le 2-\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{(k+1)^2}$

$\le 2-\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{k(k+1)}=2-\dfrac{1}{k}+(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1})=2-\dfrac{1}{k+1}$=右式，原式亦成立

由數學歸納法原理　∴　原式恆成立

10.設 n 爲正整數

(1)求$(1+\dfrac{3}{1})(1+\dfrac{5}{4})(1+\dfrac{7}{9})\cdots(1+\dfrac{2n+1}{n^2})$=______________。

(2)利用數學歸納法證明(1)之結果成立。

【詳解】

(1) $(1+\dfrac{3}{1})(1+\dfrac{5}{4})(1+\dfrac{7}{9})\cdots(1+\dfrac{2n+1}{n^2})=\dfrac{2^2}{1^2}\cdot\dfrac{3^2}{2^2}\cdot\dfrac{4^2}{3^2}\cdots\dfrac{(n+1)^2}{n^2}=(n+1)^2$

(2)

1° $n=1$ 時，左式 $=1+\dfrac{3}{1}=4$，右式 $=(1+1)^2=4$，左式 $=4=$ 右式

2° 設$n=k$時原式成立，即$(1+\dfrac{3}{1})(1+\dfrac{5}{4})(1+\dfrac{7}{9})\cdots(1+\dfrac{2k+1}{k^2})=(k+1)^2$

則$n=k+1$ 時，左式 $=(1+\dfrac{3}{1})(1+\dfrac{5}{4})(1+\dfrac{7}{9})\cdots(1+\dfrac{2k+1}{k^2})[1+\dfrac{2(k+1)+1}{(k+1)^2}]$

$=(k+1)^2[1+\dfrac{2(k+1)+1}{(k+1)^2}]=(k+1)^2+2(k+1)+1=[(k+1)+1]^2=$ 右式

故$n=k+1$ 時，原式成立

由 1°2°依數學歸納法得證，$n\in N$時，$(1+\dfrac{3}{1})(1+\dfrac{5}{4})(1+\dfrac{7}{9})\cdots(1+\dfrac{2n+1}{n^2})=(n+1)^2$成立