高雄市明誠中學 高一數學複習測驗　　日期：95.11.23					
範圍	2-2 無窮數列、級數	班級	普一　　班	姓名	
		座號			

一、選擇題(每題 5 分)

1. (複選)下列各數列何者一定收斂？

(A) $a_n=\dfrac{1}{n}$　(B) $b_n=ar^{n-1}$　(C) $c_n=(-1)^n$　(D) $d_n=7+(-\dfrac{1}{2})^n$　(E) $e_n=\dfrac{3^n+2^n}{6^n}$

【解答】(A)(D)(E)

【詳解】

(A)正確：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$，收斂

(B)錯誤：$b_n=ar^{n-1}$，當 $-<r\le 1$ 時才收斂，否則發散

(C)錯誤：$<c_n>=<-1，1，-1，1，\cdots>$，發散

(D)正確：$\lim\limits_{n\to\infty}[7+(-\dfrac{1}{2})^n]=\lim\limits_{n\to\infty}[7+0]=7$

(E)正確：$\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{3^n+2^n}{6^n})=\lim\limits_{n\to\infty}[\dfrac{\frac{(3^n+2^n)}{6^n}}{\frac{6^n}{6^n}}]=\dfrac{0+0}{1}=0$，收斂

2. 下列各無窮級數，何者爲收斂級數？

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}10(-1)^n$　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{50}$　(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\dfrac{4^{n+1}}{9^{n-1}})$　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\dfrac{n^2+n-1}{n^2})$

【解答】(C)

【詳解】

(A)錯。公比 $r=-1$，故發散　　(B)錯。公比 $r=1$，故發散

(C)對。$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\dfrac{4^{n+1}}{9^{n-1}})=\sum\limits_{n=1}^{\infty}4^2\cdot(\dfrac{4}{9})^{n-1}=4^2\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\dfrac{4}{9})^{n-1}$，公比 $r=\dfrac{4}{9}$，所以收斂

(D)錯。原式 $=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2})=\sum\limits_{n=1}^{\infty}1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}1=\infty$，故發散

3. (複選)下列式子哪些是正確的？

(A) $1-1+1-1+1-1+\cdots+(-1)^{n-1}+\cdots=0$

(B) $1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}+\cdots+(\dfrac{-1}{\sqrt{2}})^{n-1}+\cdots=\dfrac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}$

(C) $1-2+4-8+16-32+\cdots+(-2)^{n-1}+\cdots=\dfrac{1}{1-(-2)}$　　(D) $2.\overline{9}<3$

(E)無窮級數 $1+2+4+\cdots+2^{30}+\dfrac{1}{2}+(\dfrac{1}{2})^2+\cdots+(\dfrac{1}{2})^n+\cdots$是收斂的

【解答】(B)(E)

【詳解】

(A)$1-1+1-1+1-1+\cdots+(-1)^{n-1}+\cdots$

數列 $<(-1)^{n-1}>$ 爲振動數列，其極限不存在，故其和不存在

(B) $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{2}}+\cdots+(\frac{-1}{\sqrt{2}})^{n-1}+\cdots$

$=1+(\frac{-1}{\sqrt{2}})+(\frac{-1}{\sqrt{2}})^2+(\frac{-1}{\sqrt{2}})^3+\cdots+(\frac{-1}{\sqrt{2}})^{n-1}+\cdots=\frac{1}{1-(\frac{-1}{\sqrt{2}})}=\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}$

(C) $1-2+4-8+16-32+\cdots+(-2)^{n-1}+\cdots$

$=1+(-2)^1+(-2)^2+(-2)^3+(-2)^4+(-2)^5+\cdots\ \ +(-2)^{n-1}+\cdots$，公比 $r=-2$，級數發散

(D) $2.\overline{9}=2+0.9+0.09+0.009+\cdots=2+\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\frac{9}{1000}+\cdots=2+\frac{\frac{9}{10}}{1-\frac{1}{10}}=2+1=3$

(E) $1+2+4+\cdots+2^{30}+\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2+\cdots+(\frac{1}{2})^n+\cdots$

$=1+2+2^2+\cdots+2^{30}+\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1+2+2^2+\cdots+2^{30}+1=2^{31}$， 此級數是收斂的

4. (複選)下列哪些無窮數列爲收斂數列？

(A) $<7>$ (B) $<(-1)^n>$ (C) $<\frac{10^{n-1}}{9^n}>$ (D) $<\frac{3^n+4^n}{5^n}>$ (E) $<\frac{2n-1}{n+1}>$

【解答】(A)(D)(E)

【詳解】

(A)數列 $<7>$ 各項依次爲 7，7，7，…，即 $<7>$ 的極限爲 7，故 $<7>$ 是收斂數列

(B)數列 $<(-1)^n>$ 各項依次爲 −1，1，−1，1，…

當 $n\to\infty$ 時，$<(-1)^n>$ 既不會趨近於一定值，也不會發散到 ∞ 或 $-\infty$

因此，$<(-1)^n>$ 爲振動數列，故 $<(-1)^n>$ 是發散數列

(C)數列 $<\frac{10^{n-1}}{9^n}>$ 可表示爲 $<\frac{1}{10}\cdot(\frac{10}{9})^n>$

當 $n\to\infty$ 時，數列 $<\frac{1}{10}\cdot(\frac{10}{9})^n>$ 會發散到 ∞，故 $<\frac{10^{n-1}}{9^n}>$ 是發散數列

(D)數列 $<\frac{3^n+4^n}{5^n}>$ 可表示爲 $<(\frac{3}{5})^n+(\frac{4}{5})^n>$

當 $n\to\infty$ 時，$(\frac{3}{5})^n$ 與 $(\frac{4}{5})^n$ 均會收斂到 0，所以 $<\frac{3^n+4^n}{5^n}>$ 的極限爲 0，故 $<\frac{3^n+4^n}{5^n}>$ 收斂

(E)數列 $<\frac{2n-1}{n+1}>$ 可表示爲 $<\frac{2-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}>$

當 $n\to\infty$ 時，$\frac{1}{n}$ 收斂到 0，所以 $<\frac{2-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}>$ 收斂到 2，故 $<\frac{2n-1}{n+1}>$ 是收斂數列

5. (複選)下列無窮數列，何者收斂？

(A) $<\frac{n^2+n+1}{n^2+3}>$ (B) $<\frac{2n-5}{3n^2+n+1}>$ (C) $<\frac{n^2+999}{3n-1000}>$ (D) $<(\frac{101}{100})^n>$ (E) $<(-1)^n>$

【解答】(A)(B)

【詳解】

(A)∵ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+n+1}{n^2+3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}{1+\dfrac{3}{n^2}}=1$（定數） ∴ 收斂

(B)∵ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-5}{3n^2+n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{2}{n}-\dfrac{5}{n^2}}{3+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}=0$ ∴ 收斂

(C)∵ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+\dfrac{999}{n}}{3-\dfrac{1000}{n}}=\infty$，不存在 ∴ 發散

(D)∵ $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{101}{100})^n=\infty$，不存在 ∴ 發散

(E)∵ $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n=\begin{cases}-1\text{，}n\text{爲奇數}\\ 1\text{，}n\text{爲偶數}\end{cases}$，不是定數 ∴ $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$不存在 ∴ 數列發散

6. (複選)下列式子哪些是正確的？

(A) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+2^n}{6^n}=0$ (B) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-2n+7}{n^2-3n+5}=3$ (C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\dfrac{3}{5})^n=\dfrac{3}{2}$ (D) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n+1^n}{2}=0$

(E) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}=0$

【解答】(A)(B)(C)

【詳解】

(A)對。$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+2^n}{6^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\dfrac{3}{6})^n+(\dfrac{2}{6})^n}{1}=0$

(B)對。$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-2n+7}{n^2-3n+5}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3-\dfrac{2}{n}+\dfrac{7}{n^2}}{1-\dfrac{3}{n}+\dfrac{5}{n^2}}=3$

(C)對。$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\dfrac{3}{5})^n=\dfrac{\dfrac{3}{5}}{1-\dfrac{3}{5}}=\dfrac{3}{2}$

(D)錯。$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n+1^n}{2}=\begin{cases}0\text{，當}n\text{爲奇數}\\ 1\text{，當}n\text{爲偶數}\end{cases}$

(E)錯。$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots>1\neq 0$

二、填充題(每題 10 分)

1. 設x爲實數，

(1)若無窮數列 $\langle x^n(2x-1)^n\rangle$ 收斂，則x的範圍爲__________。

(2)若無窮級數$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x(2x-1)^n$ 收斂，則x的範圍爲__________。

【解答】(1) $-\dfrac{1}{2}\le x\le 1$ (2) $0\le x<1$

【詳解】

(1)∵ $\langle x^n(2x-1)^n\rangle$ 之公比爲$x(2x-1)$ ∴ $\langle x^n(2x-1)^n\rangle$ 收斂

$\Leftrightarrow$ $|x(2x-1)|<1$ 或$x(2x-1)=1$ $\Leftrightarrow$平方 $(2x^2-x)^2-1^2<0$ 或 $2x^2-x-1=0$

$\Leftrightarrow \quad (2x^2-x-1)(2x^2-x+1)<0$ 或 $(2x+1)(x-1)=0$

$\because \quad 2x^2-x+1=2(x-\frac{1}{4})^2+\frac{7}{8}>0$ 恆正 $\quad \therefore \quad 2x^2-x-1<0$ 或 $(2x+1)(x-1)=0$

$\Rightarrow \quad (2x+1)(x-1)\le 0 \quad \therefore \quad -\frac{1}{2}\le x\le 1$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} x(2x-1)^n$ 收斂 $\quad \Leftrightarrow \quad |2x-1|<1$ 或 $x=0 \quad \Leftrightarrow \quad (2x-1)^2<1$ 或 $x=0$

$\Leftrightarrow \quad (2x-1-1)(2x-1+1)<0$ 或 $x=0 \quad \Leftrightarrow \quad 2(x-1)\cdot 2x<0$ 或 $x=0 \quad \Leftrightarrow \quad 0\le x<1$

2. $\lim_{n\to\infty}(\frac{n^2}{2n+1}-\frac{n^2}{2n-1})=$ ＿＿＿＿＿＿。

【解答】$-\frac{1}{2}$

【詳解】$\lim_{n\to\infty}(\frac{n^2}{2n+1}-\frac{n^2}{2n-1})=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(2n-1)-n^2(2n+1)}{(2n+1)(2n-1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{-2n^2}{4n^2-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{-2}{4-\frac{1}{n^2}}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$

3. $\lim_{n\to\infty}\frac{4\times 3^n-3\times 5^{n-1}}{4^{n+1}+2\times 5^n}=$ ＿＿＿＿＿＿。

【解答】$-\frac{3}{10}$

【詳解】$\lim_{n\to\infty}\frac{4\times 3^n-3\times 5^{n-1}}{4^{n+1}+2\times 5^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4\times 3\times(\frac{3}{5})^{n-1}-3}{4^2\cdot(\frac{4}{5})^{n-1}+2\times 5}=\frac{12\lim_{n\to\infty}(\frac{3}{5})^{n-1}-3}{16\lim_{n\to\infty}(\frac{4}{5})^{n-1}+10}=\frac{0-3}{0+10}=-\frac{3}{10}$

4. 無窮級數$\frac{3}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{2}{10^3}+\frac{1}{10^4}+\frac{2}{10^5}+\cdots+\frac{1}{10^{2n}}+\frac{2}{10^{2n+1}}+\cdots$之和爲＿＿＿＿＿＿。

【解答】$\frac{103}{330}$

【詳解】

$$\frac{3}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{2}{10^3}+\frac{1}{10^4}+\frac{2}{10^5}+\cdots+\frac{1}{10^{2n}}+\frac{2}{10^{2n+1}}+\cdots$$

$$=\frac{1}{10}+(\frac{2}{10}+\frac{2}{10^3}+\frac{2}{10^5}+\cdots+\frac{2}{10^{2n+1}}+\cdots)+(\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^4}+\frac{1}{10^6}+\cdots+\frac{1}{10^{2n}}+\cdots)$$

$$=\frac{1}{10}+\frac{\frac{2}{10}}{1-\frac{1}{100}}+\frac{\frac{1}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{1}{10}+\frac{20}{99}+\frac{1}{99}=\frac{99+200+10}{990}=\frac{103}{330}$$

5. 設a與b均爲實數。若無窮級數$\frac{a}{2^1}+\frac{b}{2^2}+\frac{a}{2^3}+\frac{b}{2^4}+\cdots+\frac{a}{2^{2n-1}}+\frac{b}{2^{2n}}+\cdots=4$，則 $2a+b=$ ＿＿。

【解答】12

【詳解】

因爲$\frac{a}{2^1}+\frac{b}{2^2}+\frac{a}{2^3}+\frac{b}{2^4}+\cdots+\frac{a}{2^{2n-1}}+\frac{b}{2^{2n}}+\cdots$

$$=a(\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}+\cdots+\frac{1}{2^{2n-1}}+\cdots)+\frac{b}{2}(\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}+\cdots+\frac{1}{2^{2n-1}}+\cdots)$$

$= (a+\frac{b}{2})\ (\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}+\cdots+\frac{1}{2^{2n-1}}+\cdots)=(a+\frac{b}{2})\cdot\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}=(a+\frac{b}{2})\cdot\frac{2}{3}=4$

故得 $2a+b=12$

6. 數列$\frac{1}{1}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{2}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{3}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{2}{4}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{4}{4}$，$\frac{1}{5}$，$\cdots$，依此規則繼續下去，則$\frac{7}{11}$為第__________項，又此數列的第一項到$\frac{7}{11}$這一項的總和為__________。

【解答】62；$\frac{771}{22}$

【詳解】

首先將數列分群如下$(\frac{1}{1})$，$(\frac{1}{2}，\frac{2}{2})$，$(\frac{1}{3}，\frac{2}{3}，\frac{3}{3})$，$(\frac{1}{4}，\frac{2}{4}，\frac{3}{4}，\frac{4}{4})$，$\cdots$

第 k 群共有 k 個數且分母均為 k，故知$\frac{7}{11}$在第 11 群的第 7 個數，

所以$\frac{7}{11}$的項數為 $(1+2+\cdots+10)+7=62$ 項

第一項到$\frac{7}{11}$這一項的總和為$(\frac{1}{1})+(\frac{1}{2}+\frac{2}{2})+(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{3}{3})+\cdots+(\frac{1}{10}+\cdots+\frac{10}{10})+(\frac{1}{11}+\cdots+\frac{7}{11})$

$=(\sum_{k=1}^{10}\frac{k+1}{2})+\frac{1}{11}(1+2+\cdots+7)=\frac{65}{2}+\frac{28}{11}=\frac{771}{22}$

7. 級數 $1\cdot(1-\frac{1}{30})+(1-\frac{1}{30})(1-\frac{2}{30})+(1-\frac{2}{30})(1-\frac{3}{30})+\cdots+(1-\frac{29}{30})(1-\frac{30}{30})=$__________。

【解答】$\frac{899}{90}$

【詳解】

將原式簡化，則得 $1\cdot(1-\frac{1}{30})+(1-\frac{1}{30})(1-\frac{2}{30})+(1-\frac{2}{30})(1-\frac{3}{30})+\cdots+(1-\frac{29}{30})(1-\frac{30}{30})$

$=\frac{30}{30}\cdot\frac{29}{30}+\frac{29}{30}\cdot\frac{28}{30}+\frac{28}{20}\cdot\frac{27}{30}+\cdots+\frac{3}{30}\cdot\frac{2}{30}+\frac{2}{30}\cdot\frac{1}{30}$

$=\frac{1}{900}\cdot(1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots+29\cdot30)$

$=\frac{1}{900}\cdot\sum_{k=1}^{29}k(k+1)=\frac{1}{900}\cdot(\sum_{k=1}^{29}k^2+\sum_{k=1}^{29}k)$

$=\frac{1}{900}\cdot(\frac{1}{6}\cdot29\cdot30\cdot59+\frac{1}{2}\cdot29\cdot30)=\frac{899}{90}$

8. 無窮級數$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2x}{1-x})^n$為收斂級數，則$x$範圍為__________；又若此級數和為$\frac{-(2x+4)}{x+8}$，則 $x=$__________。

【解答】$-1<x<\frac{1}{3}$；$\frac{-1}{2}$

【詳解】

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2x}{1-x})^n$ 收斂級數 $\Leftrightarrow$ $|\frac{2x}{1-x}|<1$ $\Leftrightarrow$ $(\frac{2x}{1-x})^2<1$ $\Leftrightarrow$ $4x^2<1-2x+x^2$

$\Leftrightarrow\ 3x^2+2x-1<0\ \Leftrightarrow\ (3x-1)(x+1)<0\ \Leftrightarrow\ -1<x<\dfrac{1}{3}$

(2) $\because\ \sum_{n=1}^{\infty}(\dfrac{2x}{1-x})^n$ 是收斂級數 $\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}(\dfrac{2x}{1-x})^n=\dfrac{\dfrac{2x}{1-x}}{1-\dfrac{2x}{1-x}}=\dfrac{2x}{1-3x}$

又無窮級數 $\sum_{n=1}^{\infty}(\dfrac{2x}{1-x})^n$ 的和為 $\dfrac{-(2x+4)}{x+8}$，故 $\dfrac{2x}{1-3x}=\dfrac{-(2x+4)}{x+8}$

$\Leftrightarrow\ 2x(x+8)=-(2x+4)(1-3x)$

$\Leftrightarrow\ 2x^2-3x-2=0\ \Leftrightarrow\ (2x+1)(x-2)=0\ \Leftrightarrow\ x=-\dfrac{1}{2}$ 或 $x=2$

因為 $-1<x<\dfrac{1}{3}$，故取 $x=-\dfrac{1}{2}$

9. (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+4^n}{3^{n+1}+4^{n+1}}=$ ＿＿＿＿＿＿。 (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2-1}{n^2+101}=$ ＿＿＿＿＿＿。

【解答】(1) $\dfrac{1}{4}$ (2) 2

【詳解】

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+4^n}{3^{n+1}+4^{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\frac{3}{4})^n+1}{3\cdot(\frac{3}{4})^n+4}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}[(\frac{3}{4})^n+1]}{\lim\limits_{n\to\infty}[3\cdot(\frac{3}{4})^n+4]}=\dfrac{1}{4}$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2-1}{n^2+101}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{101}{n^2}}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}(2-\frac{1}{n^2})}{\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{101}{n^2})}=\dfrac{2}{1}=2$

10.若 $<\dfrac{3^{n+1}}{(x+3)^n}>$ 是發散數列，則 x 範圍為＿＿＿＿＿＿。

【解答】$-6\le x<0$

【詳解】

數列 $<\dfrac{3^{n+1}}{(x+3)^n}>=<\dfrac{3^2}{(x+3)^1}，\dfrac{3^3}{(x+3)^2}，\dfrac{3^4}{(x+3)^3}，\cdots，\dfrac{3^{n+1}}{(x+3)^n}，\cdots>$ 的公比為 $\dfrac{3}{x+3}$

因為 $<\dfrac{3^{n+1}}{(x+3)^n}>$ 是發散數列，故 $|\dfrac{3}{x+3}|>1$ 或 $\dfrac{3}{x+3}=-1\ \Leftrightarrow\ |\dfrac{x+3}{3}|<1$ 或 $\dfrac{x+3}{3}=-1$

$\Leftrightarrow\ |x+3|<3$ 或 $x+3=-3\ \Leftrightarrow\ -3<x+3<3$ 或 $x=-6\ \Leftrightarrow\ -6\le x<0$

11. $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n-2}{5^{n+2}}$ 之和為＿＿＿＿＿＿。

【解答】$\dfrac{1}{25}$

【詳解】

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n-2}{5^{n+2}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{5^{n+2}}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{5^{n+2}}=(\frac{3}{5^3}+\frac{3^2}{5^4}+\frac{3^3}{5^5}+\cdots)-(\frac{2}{5^3}+\frac{2}{5^4}+\frac{2}{5^5}+\cdots)=\frac{\frac{3}{125}}{1-\frac{3}{5}}-\frac{\frac{2}{125}}{1-\frac{1}{5}}=\frac{1}{25}$$

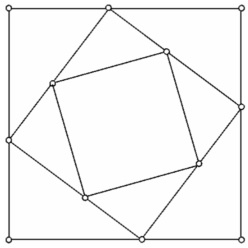
12.若 $\lim\limits_{n\to\infty}(3n+4)\,a_n=6$，則 $\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)\,a_n$ 之值為＿＿＿＿＿＿。

【解答】2

【詳解】

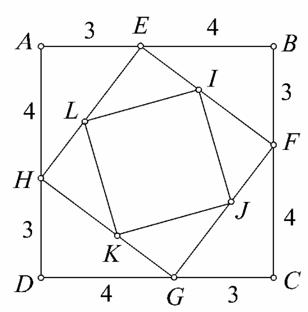
$$\lim_{n\to\infty}(n+1)a_n=\lim_{n\to\infty}(3n+4)\,a_n\cdot\frac{n+1}{3n+4}=\lim_{n\to\infty}(3n+4)\,a_n\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3n+4}=6\cdot\frac{1}{3}=2$$

13.如下圖，一正方形的邊長爲a，以3：4的順序內分各邊，再連各分點得第二個正方形，再以同順序內分第二個正方形各邊，連接各分點得第三個正方形，如此繼續下去，則所有正方形的面積總和爲__________。



【解答】$\frac{49}{24}a^2$

【詳解】



如圖，正方形$ABCD$面積 $=a^2$，在△AEH中，$\overline{AE}=\frac{3}{7}a$，$\overline{AH}=\frac{4}{7}a$

∴ $\overline{EH}=\sqrt{(\frac{3}{7}a)^2+(\frac{4}{7}a)^2}=\frac{5}{7}a$，故正方形$EFGH$面積$=(\frac{5}{7}a)^2$

故所有正方形的面積成一等比級數公比爲$(\frac{5}{7})^2=\frac{25}{49}$

∴ 所有正方形的面積總和$=a^2+\frac{25}{49}a^2+(\frac{25}{49})^2a^2+\cdots=a^2\times\frac{1}{1-\frac{25}{49}}=\frac{49}{24}a^2$

14.無窮等比級數$1-\frac{2}{3}+\frac{4}{9}-\cdots+(-\frac{2}{3})^{n-1}+\cdots$之和爲$S$，其前$n$項的和爲$S_n$，則使 $|S-S_n|<\frac{1}{10}$之最小正整數$n=$__________。

【解答】5

【詳解】

$S=\frac{1}{1-(-\frac{2}{3})}=\frac{1}{\frac{5}{3}}=\frac{3}{5}$，$S_n=\frac{1\cdot[1-(-\frac{2}{3})^n]}{1-(-\frac{2}{3})}=\frac{3}{5}[1-(-\frac{2}{3})^n]$

$|S-S_n|=|\frac{3}{5}-\frac{3}{5}[1-(\frac{2}{3})^n]\ |=|\frac{3}{5}(-\frac{2}{3})^n|=\frac{3}{5}\times(\frac{2}{3})^n<\frac{1}{10}$，$(\frac{2}{3})^n<\frac{1}{10}\times\frac{5}{3}=\frac{1}{6}$

而$(\frac{2}{3})^2=\frac{4}{9}=\frac{8}{18}>\frac{3}{18}=\frac{1}{6}$，$(\frac{2}{3})^3=\frac{8}{27}=\frac{16}{54}>\frac{9}{54}=\frac{1}{6}$

$(\frac{2}{3})^4=\frac{16}{81}=\frac{32}{162}>\frac{27}{162}=\frac{1}{6}$，$(\frac{2}{3})^5=\frac{32}{243}=\frac{64}{486}<\frac{81}{486}=\frac{1}{6}$，∴ n最小爲5

15.求$\sum_{k=1}^{48}\frac{1}{k^2+3k+2}=$__________。

【解答】$\frac{12}{15}$

【詳解】

$$\sum_{k=1}^{48}\frac{1}{k^2+3k+2}=\sum_{k=1}^{48}\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+\cdots+\frac{1}{49\times50}$$

$$=(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+(\frac{1}{4}-\frac{1}{5})+\cdots+(\frac{1}{49}-\frac{1}{50})=\frac{1}{2}-\frac{1}{50}=\frac{25-1}{50}=\frac{24}{50}=\frac{12}{25}$$

16.求 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n^2-1}{n+1}-\frac{n^2+2}{n+2})=$__________。

【解答】1

【詳解】

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{n^2-1}{n+1}-\frac{n^2+2}{n+2})=\lim_{n\to\infty}[(n-1)-\frac{n^2+2}{n+2}]=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n-2-n^2-2}{n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n-4}{n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{4}{n}}{1+\frac{2}{n}}=1$$

17.若無窮等比級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{2x}{5x+1})^n$ 收斂於 $\frac{1}{3x-1}$，則x之值 $=$__________。

【解答】1

【詳解】$\because$ 級數收斂 $\therefore$ $|\frac{2x}{5x+1}|<1$

$\therefore$ $|2x|<|5x+1|$，平方化簡 $(3x+1)(7x+1)>0$ $\therefore$ $x>-\frac{1}{7}$ 或 $x<-\frac{1}{3}$

又 $S=\dfrac{\frac{2x}{5x+1}}{1-\frac{2x}{5x+1}}=\frac{2x}{3x+1}=\frac{1}{3x-1}$ $\Rightarrow$ $6x^2-5x-1=0$ $\therefore$ $x=1$ 或 $-\frac{1}{6}$（不合）

$\therefore$ $x=1$

18.試求無窮級數 $\frac{2}{3}-\frac{4}{9}+\frac{8}{27}-\cdots+(-1)^{n-1}\cdot(\frac{2}{3})^n+\cdots=$__________。

【解答】$\frac{2}{5}$

【詳解】$S=\dfrac{\frac{2}{3}}{1-(\frac{-2}{3})}=\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{3}}=\frac{2}{5}$

19.將分數 $\frac{3}{7}$ 表成小數時，令小數點後第n位的數字爲a_n，則$a_{1999}=$__________。

【解答】4

【詳解】因爲 $\frac{3}{7}=0.\overline{428571}$，表爲循環小數時，它的循環節有六個數字

而 $1999=6\cdot333+1$，亦即 1999 被 6 除的餘數爲 1，故小數點後第 1999 位數字爲 4

20.求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{5^n}$ 之和 $=$__________。

【解答】$\frac{13}{6}$

【詳解】$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{5^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}[(\frac{2}{5})^n+(\frac{3}{5})^n]=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{2}{5})^n+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{3}{5})^n$

$$=[(\frac{2}{5})+(\frac{2}{5})^2+(\frac{2}{5})^3+\cdots]+[(\frac{3}{5})+(\frac{3}{5})^2+(\frac{3}{5})^3+\cdots]=\frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{2}{5}}+\frac{\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{5}}=\frac{2}{5}\times\frac{5}{3}+\frac{3}{5}\times\frac{5}{2}=\frac{2}{3}+\frac{3}{2}=\frac{13}{6}$$

21.已知一無窮等比級數，和為$\dfrac{18}{5}$，其第二項為 -4，則首項為＿＿＿＿＿。

【解答】6

【詳解】

設首項 a，公比 $|r|<1$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} \dfrac{a}{1-r}=\dfrac{18}{5} \cdots\cdots ① \\ ar=-4 \quad \cdots\cdots ② \end{cases}$

由②得$a=\dfrac{-4}{r}$，代入①得$9r^2-9r-10=0$

$\Rightarrow$ $(3r+2)(3r-5)=0$ $\Rightarrow$ $r=-\dfrac{2}{3}$或$\dfrac{5}{3}$（不合） $\therefore$ $a=6$

22.求無窮等比級數 $0.4+0.004+0.00004+\cdots$之和 $=$＿＿＿＿＿。

【解答】$\dfrac{40}{99}$

【詳解】$a_k=\dfrac{4}{10^{2k-1}}$，$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k=4\times\dfrac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10^2}}=\dfrac{40}{99}$

23.化 $0.1\overline{6}+23.22\overline{3}$成最簡分數＿＿＿＿＿。

【解答】$\dfrac{2339}{100}$

【詳解】$0.1\overline{6}+23.22\overline{3}=\dfrac{16-1}{90}+\dfrac{23223-2322}{900}=\dfrac{21051}{900}=\dfrac{2339}{100}$

24.設$S=\sum\limits_{k=1}^{100} k^2=1^2+2^2+\cdots+100^2$，則$S$除以 3 的餘數 $=$＿＿＿＿＿。

【解答】1

【詳解】

$S=1^2+2^2+\cdots+100^2=\dfrac{1}{6}\times100\times(100+1)(2\times100+1)=50\times101\times67$

$=(3\times16+2)(3\times33+2)(3\times22+1)=3k+(2\times2\times1)=3k+4=3(k+1)+1$

$\therefore$ S被 3 除之餘數為 1

25.求級數之和：$0.3+0.033+0.00333+0.0003333+\cdots=$＿＿＿＿＿。

【解答】$\dfrac{100}{297}$

【詳解】

$0.3+0.033+0.00333+0.0003333+\cdots=\dfrac{3}{9}(0.9+0.099+0.00999+0.0009999+\cdots)$

$=\dfrac{3}{9}[(1-\dfrac{1}{10})+(\dfrac{1}{10}-\dfrac{1}{10^3})+(\dfrac{1}{10^2}-\dfrac{1}{10^5})+\cdots]=\dfrac{3}{9}[(1+\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{10^2}+\cdots)-(\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{10^3}+\dfrac{1}{10^5}+\cdots)]$

$=\dfrac{3}{9}\left(\dfrac{1}{1-\frac{1}{10}}-\dfrac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10^2}}\right)=\dfrac{3}{9}\times\dfrac{100}{99}=\dfrac{100}{297}$

26.試求$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{[3^n+(-4)^{n+2}]}{7^n}=$＿＿＿＿＿。

【解答】$\dfrac{-223}{44}$

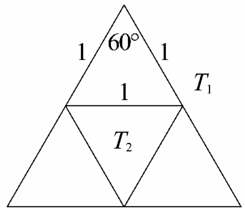
【詳解】

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[3^n+(-4)^{n+2}]}{7^n}=\sum_{n=1}^{\infty}[(\frac{3}{7})^n+(-4)^2\cdot(\frac{-4}{7})^n]=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{3}{7})^n+16\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{-4}{7})^n$$

$$=\frac{\frac{3}{7}}{1-\frac{3}{7}}+16\times\frac{(\frac{-4}{7})}{1-(\frac{-4}{7})}=\frac{-223}{44}$$

27.邊長為 2 之正三角形T_1，T_1各邊中點連成正三角形T_2，T_2各邊中點連成正三角形T_3，依序作圖至無窮，則所有正三角形面積之總和為__________。

【解答】$\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$



【詳解】

T_1之面積為$\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2$，$T_2$之邊長為 $2\times\dfrac{1}{2}$，則面積為$\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times(2\times\dfrac{1}{2})^2$

T_3之邊長為 $2\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}$，則面積為$\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times(2\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2})^2\cdots$

$\therefore$ 所求$=T_1+T_2+T_3+\cdots=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times(2\times\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times(2\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2})^2+\cdots$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}[\,2^2+2^2\times(\frac{1}{2})^2+2^2\times(\frac{1}{2})^4+\cdots]=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{4}{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{16}{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

28.設$x\in R$，若級數$\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}(1-x)+\dfrac{1}{3}(1-x)^2-\dfrac{1}{3}(1-x)^3+\ \cdots\ +\dfrac{1}{3}(-1)^{n-1}(1-x)^{n-1}+\ \cdots$收斂，

求(1) x值之範圍為__________。 (2)若此級數和為$\dfrac{1}{2}$，則x之值為__________。

【解答】(1) $0<x<2$ (2) $\dfrac{4}{3}$

【詳解】

(1)收斂 $\Leftrightarrow$ $|r|<1$，$|-(1-x)|=|x-1|<1$ $\Rightarrow$ $0<x<2$

(2) $S=\dfrac{a_1}{1-r}$ ，$\dfrac{1}{2}=\dfrac{\frac{1}{3}}{1-[-(1-x)]}$ $\Rightarrow$ $2-x=\dfrac{2}{3}$ ，得 $x=\dfrac{4}{3}$

29.$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+3}+5^{n+2}-8^{n+1}}{2^{3n+1}+7^n}=$__________。

【解答】-4

【詳解】

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+3}+5^{n+2}-8^{n+1}}{2^{3n+1}+7^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^3\cdot 3^n+5^2\cdot 5^n-8\cdot 8^n}{2\cdot 8^n+7^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{27(\frac{3}{8})^n+25(\frac{5}{8})^n-8}{2+(\frac{7}{8})^n}=\frac{-8}{2}=-4$$

30.求級數$\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{3}+\dfrac{5}{7}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{4}{9}+\dfrac{10}{49}+\dfrac{1}{8}-\dfrac{8}{27}+\dfrac{20}{343}+\cdots$至無限多項之和__________。

【解答】$\frac{8}{5}$

【詳解】

$$\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{5}{7}+\frac{1}{4}+\frac{4}{9}+\frac{10}{49}+\frac{1}{8}-\frac{8}{27}+\frac{20}{343}+\cdots$$

$$=(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots)+(-\frac{2}{3}+\frac{4}{9}-\frac{8}{27}\cdots)+(\frac{5}{7}+\frac{10}{49}+\frac{20}{343}+\cdots)=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{-\frac{2}{3}}{1-(-\frac{2}{3})}+\frac{\frac{5}{7}}{1-\frac{2}{7}}=1-\frac{2}{5}+1$$

$$=\frac{8}{5}$$