高雄市明誠中學 高一數學複習測驗 日期：95.11.13					
範圍	2-1 數列、級數(2)	班級	普一　　班	姓名	
		座號			

一、填充題(題 每題 10 分)

1. 給定數列$\frac{1}{1}$，$\frac{2}{1}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{3}{1}$，$\frac{2}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{4}{1}$，$\frac{3}{2}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{5}{1}$，$\frac{4}{2}$，$\frac{3}{3}$，$\frac{2}{4}$，$\frac{1}{5}$，…，則$\frac{3}{10}$為數列的第__________項。

【解答】76

【詳解】

找規則，第 1 組($\frac{1}{1}$)，第 2 組($\frac{2}{1}$，$\frac{1}{2}$)，第 3 組($\frac{3}{1}$，$\frac{2}{2}$，$\frac{1}{3}$)，……

知$\frac{3}{10}$在第 12 組的第 10 個數，$(1+2+3+4+\cdots+11)+10=76$ 個

2. 有一凸n邊形，內角度數依次成等差數列，公差為 5°，最小角為 120°，則 (1) $n=$__________。　(2)最大角為__________。

【解答】(1) 9　(2) 160°

【詳解】

$$\frac{n[2\times120+(n-1)\times5]}{2}=(n-2)\times180\Rightarrow n[235+5n]=(n-2)\times360$$

$$5n^2-125n+720=0\Rightarrow n^2-25n+144=0$$

$$(n-9)(n-16)=0\Rightarrow n=9,16$$

$n=16\Rightarrow$最大角為$120+(16-1)\times5=195$(不合)，$n=9$

$n=9\Rightarrow$最大角為$120+(9-1)\times5=160$

3. 集合序列{1}，{2，3}，{4，5，6}，{7，8，9，10}，…，若S_n表第n個集合內之元素各數值總和，求$S_{21}=$__________。

【解答】4641

【詳解】

$1+2+3+\cdots+20=\frac{(1+20)\times20}{2}=210$，$1+2+3+\cdots+21=\frac{(1+21)\times21}{2}=231$

$\therefore\ S_{21}=211+212+\cdots+231=\frac{(211+231)\times21}{2}=4641$

4. 數列$\frac{1}{4}$，$\frac{4}{8}$，$\frac{7}{12}$，$\frac{10}{16}$，…，第n項為a_n，則

(1) a_n可為__________。　(2)若$a_n>\frac{29}{40}$，則n之最小值為__________。

【解答】(1) $\frac{3n-2}{4n}$　(2) 21

【詳解】

(1)觀察數列$\frac{1}{4}$，$\frac{4}{8}$，$\frac{7}{12}$，$\frac{10}{16}$，…，第 n 項$a_n=\frac{3n-2}{4n}$

(2)$\frac{3n-2}{4n}>\frac{29}{40}\Rightarrow10(3n-2)>29n\Rightarrow n>20$，即正整數$n\geq21$

5. 自 1 到 500 的正整數中，4 或 6 的倍數共有n個，其和為S，則

(1) $n=$__________。 (2) $S=$__________。

【解答】(1) 167 (2) 42084

【詳解】

(1) 4 或 6 的倍數即 (4 的倍數) + (6 的倍數) −(4 且 6 的倍數)

$$n=[\frac{500}{4}]+[\frac{500}{6}]-[\frac{500}{12}]=125+83-41=167$$

(2) 4 或 6 的倍數和即 (4 的倍數和) + (6 的倍數和) −(4 且 6 的倍數和)

$$S=\frac{125(4+500)}{2}+\frac{83(6+498)}{2}-\frac{41(12+492)}{2}=31500+20916-10332=42084$$

6. 設$x\in R$，高斯符號$[x]$表不大於x的最大整數，令$f(x)=[\sqrt{x}]$，$x>0$，

(1) $x\in N$，使$f(x)=k$之自然數x有__________個。

(2) $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(100)$之值=__________。

【解答】(1) $2k+1$ 個 (2) 625

【詳解】

(1)$\because$ $f(x)=[\sqrt{x}]$，使$f(x)=k\in N$，即$[\sqrt{x}]=k$ $\Rightarrow k\le\sqrt{x}<k+1$ $\Rightarrow$ $k^2\le x<(k+1)^2$

$\because$ $x\in N$ $\therefore$ x共有$(k+1)^2-k^2=2k+1$ 個

即$x=k^2$，k^2+1，k^2+2，$\cdots$，k^2+2k，共 $2k+1$ 個

(2) $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+\cdots+f(100)$

$=f(1)+f(2)+f(3)+f(2^2)+f(2^2+1)+\cdots+f(3^2)+\cdots+f(10^2)$

$=\underbrace{1+1+1}_{3個}+\underbrace{2+2+2+2+2}_{5個}+\underbrace{3+3+3+3+3+3+3}_{7個}+\cdots+\underbrace{9+\cdots+9}_{19個}+10$

$=(3\times1+5\times2+7\times3+\cdots+19\times9)+10=615+10=625$

7. 等比數列x，$3x+3$，$4x+4$，$\cdots$，求第 4 項爲__________（不可以x表示）。

【解答】$-\frac{64}{15}$

【詳解】

$\frac{3x+3}{x}=\frac{4x+4}{3x+3}$ $\Rightarrow$ $(3x+3)^2=x(4x+4)$

$\Rightarrow$ $9x^2+18x+9=4x^2+4x$ $\Rightarrow$ $5x^2+14x+9=0$

$\Rightarrow$ $(5x+9)(x+1)=0$ $\Rightarrow$ $x=-\frac{9}{5}$或$x=-1$

①當$x=-\frac{9}{5}$時，公比$r=\dfrac{3\cdot(-\frac{9}{5})+3}{-\frac{9}{5}}=\frac{4}{3}$，$a_4=(-\frac{9}{5})\cdot(\frac{4}{3})^3=(-\frac{9}{5})\cdot(\frac{64}{27})=-\frac{64}{15}$

②當$x=-1$時，公比$r=\frac{3(-1)+3}{-1}=0$（不合）

由①，②知$a_4=-\frac{64}{15}$

8. 有兩個等差數列，其第n項的比爲 $3n+1$：$7n-11$，則其前 9 項和的比爲__________。

【解答】$\frac{2}{3}$

【詳解】

設此二等差數列各爲$\langle a_n\rangle$，$\langle b_n\rangle$，前n項和各爲S_n，S_n'，則$\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{3n+1}{7n-11}$

$\therefore\quad \dfrac{S_9}{S_9'}=\dfrac{9\times a_5}{9\times b_5}=\dfrac{a_5}{b_5}=\dfrac{3(5)+1}{7(5)-11}=\dfrac{16}{24}=\dfrac{2}{3}$

9. 有兩等差級數，其首n項和之比爲$(2n+3)$：$(3n+2)$，試求兩級數第 11 項的比爲_______。

【解答】9：13

【詳解】

$\dfrac{a_{11}}{b_{11}}=\dfrac{21\times a_{11}}{21\times b_{11}}=\dfrac{S_{21}}{S'_{21}}=\dfrac{2(21)+3}{3(21)+3}=\dfrac{45}{65}$，即$\dfrac{a_{11}}{b_{11}}=\dfrac{9}{13}$，兩級數第 11 項的比爲 9：13

10. 一等差數列之前 10 項之和爲 30，前 30 項之和爲 10，則其前 40 項之和爲__________。

【解答】-40

【詳解】

解一：

前n項和爲S_n，令$S_{20}=a$，$S_{40}=b$，則S_{10}，$S_{20}-S_{10}$，$S_{30}-S_{20}$，$S_{40}-S_{30}$亦成等差數列

即 30，$a-30$，$10-a$，$b-10$ 成等差數列，由前三項$2(a-30)=30+(10-a)\Rightarrow a=\dfrac{100}{3}$

由後三項則 $2(10-a)=(b-10)+(a-30)$，得$S_{40}=b=-40$

解二：

數列$\langle a_n\rangle$成等差，則S_{10}，$S_{20}-S_{10}$，$S_{30}-S_{20}$，$S_{40}-S_{30}$亦成等差數列

即$a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_{10}$，$a_{11}+a_{12}+a_{13}+\cdots\cdots+a_{20}$，$a_{21}+a_{22}+a_{23}+\cdots\cdots+a_{30}$，

$a_{31}+a_{32}+a_{33}+\cdots\cdots+a_{40}$成等差。

由 $a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_{10}=10$，

設 $a_{11}+a_{12}+a_{13}+\cdots\cdots+a_{20}=30+d$

$a_{21}+a_{22}+a_{23}+\cdots\cdots+a_{30}=30+2d$

$a_{31}+a_{32}+a_{33}+\cdots\cdots+a_{40}=30+3d$

因爲$S_{30}=10\Rightarrow 30+(30+d)+(30+2d)=10,\ d=-\dfrac{80}{3}$

代入$S_{40}=30+(30+d)+(30+2d)+(30+3d)=-40$

11.有一等比數列$\langle a_n\rangle$，已知$S_n=16$，$S_{2n}=20$，則$S_{3n}=$__________。

【解答】21

【詳解】

S_n，$S_{2n}-S_n$，$S_{3n}-S_{2n}$成G.P.，公比爲r^n，即$S_n=16$，$S_{2n}-S_n=16r^n$，$S_{3n}-S_{2n}=16\cdot(r^n)^2$

$\therefore$ 即 16，4，$S_{3n}-20$ 成G.P.$\Rightarrow$ $S_{3n}-20=1$ $\therefore$ $S_{3n}=21$

12.數列 1，2，2，3，3，3，4，4，4，4，⋯中，其前 100 項之和爲__________。

【解答】945

【詳解】

(1)，(2，2)，(3，3，3)，(4，4，4，4)，⋯

第n組之末項爲整個數列之第 $1+2+\cdots+n=\dfrac{1}{2}n(n+1)$項

$n=13$ 時，$\dfrac{1}{2}\cdot 13\cdot 14=91$，$100-91=9$ $\therefore$ 第 100 項位在第 14 組內之第 9 項

$\therefore \quad S_{100} = 1 + 2 \times 2 + 3 \times 3 + \cdots + 13 \times 13 + 14 \times 9 = \frac{1}{6} \cdot 13 \cdot 14 \cdot 27 + 126 = 945$

13.一個球從 81 公尺自由落下，每次著地後又跳回原高度的$\frac{1}{3}$再落下，當它第五次著地時，共經過__________公尺。

【解答】161

【詳解】

球首先落下經過 81 公尺，因每次反彈的高度爲前高度的$\frac{1}{3}$

第一次著地所經過的距離爲 81 公尺

第二次著地所經過的距離爲 $2 \times 81 \times \frac{1}{3}$ 公尺

第三次著地所經過的距離爲 $2 \times 81 \times (\frac{1}{3})^2$公尺

第四次著地所經過的距離爲 $2 \times 81 \times (\frac{1}{3})^3$公尺

第五次著地所經過的距離爲 $2 \times 81 \times (\frac{1}{3})^4$公尺

所求距離和$= 81 + 2 \times 81 \times \frac{1}{3} + 2 \times 81 \times (\frac{1}{3})^2 + 2 \times 81 \times (\frac{1}{3})^3 + 2 \times 81 \times (\frac{1}{3})^4$

$= 81 + 162\,[\frac{1}{3} + (\frac{1}{3})^2 + (\frac{1}{3})^3 + (\frac{1}{3})^4] = 81 + 162 \times \frac{40}{81} = 81 + 80 = 161$

14.二等差數列$< a_n >$，$< b_n >$，$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ ，$T_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ ，若$S_n：T_n = (5n + 3)：(3n + 1)$，則$\frac{a_9}{b_9} =$_。

【解答】$\frac{22}{13}$

【詳解】

解一：

$$\frac{S_n}{T_n} = \frac{\frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]}{\frac{n}{2}[2b_1 + (n-1)d']} = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2b_1 + (n-1)d'} = \frac{5n+3}{3n+1}$$

取 $n = 17 \quad \therefore \quad \frac{a_9}{b_9} = \frac{a_1 + 8d}{b_1 + 8d'} = \frac{2a_1 + 16d}{2b_1 + 16d'} = \frac{5 \times 17 + 3}{3 \times 17 + 1} = \frac{22}{13}$

解二：

$$\frac{a_9}{b_9} = \frac{17a_9}{17b_9} = \frac{\mathrm{S}_{17}}{\mathrm{T}_{17}} = \frac{5 \times 17 + 3}{3 \times 17 + 1} = \frac{88}{52} = \frac{22}{13}$$

15.數列$< a_n >$之遞迴表示式爲$a_1 = 1$，$a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n + 1$（$n \geq 1$），求此數列之一般項$a_n = ?$

【解答】$2 - (\frac{1}{2})^{n-1}$

【詳解】

$a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n + 1 \quad \Rightarrow \quad 2a_{n+1} = a_n + 2 \quad \Rightarrow \quad 2(a_{n+1} - 2) = (a_n - 2)$

因爲 $\dfrac{a_{n+1}-2}{a_n-2}=\dfrac{1}{2}$

令$b_n=a_n-2$，則$\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=\dfrac{a_{n+1}-2}{a_n-2}=\dfrac{1}{2}$，故$\langle b_n\rangle$爲公比$r=\dfrac{1}{2}$，首項$b_1=a_1-2=1-2=-1$之等比數列$b_n=b_1r^{n-1}=(-1)(\dfrac{1}{2})^{n-1}$，即$a_n-2=(-1)(\dfrac{1}{2})^{n-1}$ $\therefore$ $a_n=2-(\dfrac{1}{2})^{n-1}$

16.有一等比級數 $1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{3^{n-1}}+\cdots$，其前$n$項和爲$S_n$，求滿足 $|S_n-\dfrac{3}{2}|<\dfrac{3}{2000}$ 的最小正整數n。

【解答】7

【詳解】

(1) $S_n=\dfrac{a_1(1-r^n)}{1-r}=\dfrac{1(1-(\frac{1}{3})^n)}{1-\frac{1}{3}}=\dfrac{3}{2}(1-\dfrac{1}{3^n})$

(2)由 $|\dfrac{3}{2}-S_n|<\dfrac{3}{2000}$ $\therefore$ $\dfrac{3}{2}(\dfrac{1}{3^n})<\dfrac{3}{2000}$ $\Rightarrow$ $2(3^n)>2000$ $\Rightarrow$ $3^n>1000$

(3)$\because$ $3^5=243$，$3^6=729$，$3^7=2187$ $\therefore$ n的最小值爲 7

17.$1+\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{2^2}+\dfrac{7}{2^3}+\cdots+\dfrac{2n-1}{2^{n-1}}$之和。

【解答】$6-\dfrac{2n+3}{2^{n-1}}$

【詳解】

令 $S=1+\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{2^2}+\dfrac{7}{2^3}+\cdots+\dfrac{2n-1}{2^{n-1}}$……①

則得$\dfrac{1}{2}S=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{5}{2^3}+\cdots+\dfrac{2n-3}{2^{n-1}}+\dfrac{2n-1}{2^n}$……②

由①－②，可得$\dfrac{1}{2}S=1+\dfrac{2}{2}+\dfrac{2}{2^2}+\dfrac{2}{2^3}+\cdots+\dfrac{2}{2^{n-1}}-\dfrac{2n-1}{2^n}$

$=1+(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^{n-2}})-\dfrac{2n-1}{2^n}=1+\dfrac{1-(\frac{1}{2})^{n-1}}{1-\frac{1}{2}}-\dfrac{2n-1}{2^n}$

$=1+2(1-\dfrac{1}{2^{n-1}})-\dfrac{2n-1}{2^n}=3-\dfrac{1}{2^{n-2}}-\dfrac{2n-1}{2^n}$

$\therefore$ $S=6-\dfrac{2}{2^{n-2}}-\dfrac{2n-1}{2^{n-1}}=6-\dfrac{2n+3}{2^{n-1}}$

18.規定$\sum\limits_{k=1}^{n}a_k=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$，則$\sum\limits_{k=1}^{n}(3k+4)$之值爲__________。

【解答】$\dfrac{1}{2}n(3n+11)$

【詳解】

$\sum\limits_{k=1}^{n}(3k+4)=3\sum\limits_{k=1}^{n}k+\sum\limits_{k=1}^{n}4=3(1+2+3+\cdots+n)+4n=3(\dfrac{n(n+1)}{2})+4n=\dfrac{1}{2}n(3n+11)$

19.若$\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{1+2}+\dfrac{1}{1+2+3}+\cdots+\dfrac{1}{1+2+3+\cdots+n}=\dfrac{21}{11}$，則自然數$n$之值=__________。

【解答】21

【詳解】

$$a_k = \frac{1}{\frac{k(k+1)}{2}} = \frac{2}{k(k+1)} = 2 \cdot \frac{1}{k(k+1)} = 2[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}]$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = 2[(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \cdots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})] = 2(1 - \frac{1}{n+1}) = \frac{21}{11}$$

$\therefore \quad n = 21$