高雄市明誠中學 高一數學複習測驗 日期：95.11.02					
範圍	21 數列、級數(1)	班級	普一 班	姓名	
		座號			

一、選擇題 (每題 5 分)

1. 下列何者正確？

(A)若$b^2 = ac$，則a，b，c爲等比數列

(B)數列$< a_n >$滿足$a_n = a_{n-1}q$，$n \in N$，q爲常數，則$< a_n >$爲等比數列

(C)數列$< a_n >$中，$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = S_n$，且$S_n = 4n^2 - n + 2$，則$a_n = S_n - S_{n-1} = 8n - 5$

(D)數列$< a_n >$前n項和$S_n = A^n - 1$，則$< a_n >$不一定是等比數列

【解答】(D)

【詳解】

(A)若$b^2 = ac$，則$a：b = b：c$，但必須$b \neq 0$ 且$c \neq 0$ 才有意義，故(A)不正確

(B)若$a_n = a_{n-1}q$，$n \in N$，則$\dfrac{a_n}{a_{n-1}} = q$，須$q \neq 0$，則$< a_n >$才爲等比數列，故(B)不正確

(C) $a_1 = S_1 = 4 - 1 + 2 = 5$

$a_n = S_n - S_{n-1} = (4n^2 - n + 2) - [4(n-1)^2 - (n-1) + 2]$

$= 4n^2 - n + 2 - 4n^2 + 8n - 4 + n - 1 - 2 = 8n - 5$，$n \geq 2$，故$a_n = \begin{cases} 5，n = 1 \\ 8n - 5，n \geq 2 \end{cases}$，

故(C)不正確

(D) $a_1 = S_1 = A - 1$，$a_2 = S_2 - S_1 = (A^2 - 1) - (A - 1) = A^2 - A$

$a_3 = S_3 - S_2 = (A^3 - 1) - (A^2 - 1) = A^3 - A^2$，

$a_n = S_n - S_{n-1} = (A^n - 1) - (A^{n-1} - 1) = A^n - A^{n-1}$

當$A \neq 0$ 時，$\dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{a_3}{a_2} = \cdots = \dfrac{a_n}{a_{n-1}} = A$，則$< a_n >$是等比數列，故(D)正確

2. 化簡$\dfrac{i + i^3 + i^5 + \cdots + i^{101}}{i \cdot i^3 \cdot i^5 \cdot \cdots \cdot i^{101}} =$？(A) 1 (B) i (C) -1 (D) $-i$ (E) 0

【解答】(A)

【詳解】原式$= \dfrac{[\dfrac{i(1-i^{102})}{1-i^2}]}{i^{1+3+5+\cdots+101}} = \dfrac{\dfrac{i}{2}[1-(-1)]}{i^{2601}} = \dfrac{i}{i} = 1$

3. (複選)若數列$< a_n >$爲一等差數列且$a_4 = 7$，$a_{10} = 5$，則下列何者正確？

(A) $a_1 = 8$ (B) $a_{20} = \dfrac{5}{3}$ (C)自第 24 項開始爲負 (D)前n項總和爲最大時，則$n = 24$

(E)前n項總和爲 60 時，則$n = 40$

【解答】(A)(B)

【詳解】

(A)設首項爲a_1，公差爲d，則$\begin{cases} a_1 + (4-1)d = 7 \\ a_1 + (10-1)d = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 8 \\ d = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$

(B) $a_{20} = a_1 + (20 - 1)d = 8 + 19(-\dfrac{1}{3}) = \dfrac{5}{3}$

(C) $a_n = a_1 + (n-1)d = 8 + (n-1)(-\frac{1}{3}) < 0 \quad \Rightarrow 8 - \frac{1}{3}n + \frac{1}{3} < 0 \quad \Rightarrow -\frac{1}{3}n < -\frac{25}{3} \quad \Rightarrow n > 25$

∴　從第 26 項開始爲負

(D)由(C)知$a_{25} = 8 + (25-1)(-\frac{1}{3}) = 0$，故前$n$項總和爲最大時，爲$S_{24}$或$S_{25}$，$n = 24$，　25

(E) $S_n = \frac{n[2a_1+(n-1)d]}{2} = \frac{n[16+(n-1)(-\frac{1}{3})]}{2} = 60$

$\Rightarrow \quad n(16 - \frac{1}{3}n + \frac{1}{3}) = 120 \quad \Rightarrow \quad n^2 - 49n + 360 = 0$

$\Rightarrow \quad (n-9)(n-40) = 0 \quad \Rightarrow \quad n = 9$ 或 40

4. (複選)有一數列$\{a_n\}$的前n項（從第 1 項到第n項）和爲$n^2 + 6n + k$，其中k是常數（即k之值固定，不隨n變化）。則下列敘述何者正確？

(A) $a_1 = 7 + k$　　(B) $a_6 - a_5 = -2$　　(C)數列$\{a_n\}$爲等差數列的充要條件是$k = 0$

(D) $a_n - a_{n-1} = 2$，其中$n = 3$，4，5，⋯　　(E) $a_{10} = 25$

【解答】(A)(C)(D)(E)

【詳解】

$S_n = n^2 + 6n + k$

(A) $a_1 = S_1 = 1^2 + 6 + k = 7 + k$

(B) $a_6 - a_5 = (S_6 - S_5) - (S_5 - S_4)$

$= (6^2 + 6\times 6 + k - 5^2 - 6\times 5 - k) - (5^2 + 6\times 5 + k - 4^2 - 6\times 4 - k) = 2$

(C) $a_2 = S_2 - S_1 = 2^2 + 6\times 2 + k - (7 + k) = 9$

$a_3 = S_3 - S_2 = 3^2 + 6\times 3 + k - (2^2 + 6\times 2 + k) = 11$，$a_1 = 7 + k$

∴　當$k = 0$時，數列$\{a_n\}$爲等差數列

(D) $a_n - a_{n-1} = (S_n - S_{n-1}) - (S_{n-1} - S_{n-2})$

$= n^2 + 6n + k - (n-1)^2 - 6(n-1) - k - [(n-1)^2 + 6(n-1) + k - (n-2)^2 - 6(n-2) - k]$

$= n^2 + 6n - n^2 + 2n - 1 - 6n + 6 - n^2 + 2n - 1 - 6n + 6 + n^2 - 4n + 4 + 6n - 12 = 2$

∴　當$n = 3$，4，5，⋯時，$a_n - a_{n-1} = 2$

(E) $a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 + 6n + k - (n-1)^2 - 6(n-1) - k = 2n + 5$，當$n = 2$，3，⋯

∴　$a_{10} = 2\times 10 + 5 = 25$

二、填充題(題 每題 10 分)

1. 等差數列$< a_n >$中，$a_4 = 16$，$a_{11} = -5$，S_n表首n項和，則

(1) $a_9 =$__________。　(2) S_n的最大值爲__________。

【解答】(1) 1　(2) 117

【詳解】

$a_{11} = a_4 + (11-4)d \Rightarrow -5 = 16 + 7d \Rightarrow d = -3$

(1) $a_9 = a_4 + (9-4)d = 16 + 5\times(-3) = 1$

(2) $a_9 = 1, a_{10} = -2 \Rightarrow S_9$最大，$a_4 = a_1 + (4-1)d \Rightarrow 16 = a_1 + 3\times(-3) \Rightarrow a_1 = 25$

$S_9 = \frac{9[2\times 25 + (9-1)\times(-3)]}{2} = 117$

2. 有一數列$< a_n >$，首n項和$S_n = 2n^2$，則

(1) $a_n =$__________。　(2)此數列第 11 項到第 20 項的和爲__________。

【解答】(1) $4n-2$　(2) 600

【詳解】

(1) $S_n = 2n^2 \Rightarrow a_n = S_n - S_{n-1} = 2n^2 - 2(n-1)^2 = 4n-2$

(2)此數列第 11 項到第 20 項的和爲 $S_{20} - S_{10} = 2\times 20^2 - 2\times 10^2 = 600$

3. 有一等比數列，首項爲 7，末項爲 448，和爲 889，則
(1)項數爲__________。　(2)第五項爲__________。

【解答】(1) 7　(2) 112

【詳解】

(1) $S_n = \dfrac{a_1(1-r^n)}{1-r} = \dfrac{a_1 - a_n r}{1-r} \Rightarrow 889 = \dfrac{7-448r}{1-r} \Rightarrow r = 2$

$a_n = a_1 r^{n-1} \Rightarrow 448 = 7\times 2^{n-1} \Rightarrow 2^{n-1} = 64,\quad n-1 = 6 \Rightarrow n = 7$

(2) $a_5 = a_1 r^{5-1} = 7\times 2^4 = 112$

4. 等比數列 $< a_n >$ 中，$a_3 = 2$，$a_6 = 16$，則(1)公比爲__________。　(2)首 10 項和爲__________。

【解答】(1) 2　(2) $\dfrac{1023}{2}$

【詳解】

(1) $a_6 = a_3 r^{6-3} \Rightarrow 16 = 2\times r^3, r = 2$

(2) $a_3 = a_1 r^{3-1} \Rightarrow 2 = a_1 \times 2^2, a_1 = \dfrac{1}{2}$

$$S_{10} = \frac{a_1(r^{10}-1)}{r-1} = \frac{\frac{1}{2}(2^{10}-1)}{2-1} = \frac{1023}{2}$$

5. 若等比數列$\{a_n\}$的第四項爲 6，第六項爲 24，而且數列的每一項都是正數，求這個數列的前 10 項總和爲__________。

【解答】$\dfrac{3069}{4}$

【詳解】$\begin{cases} 6 = a_1 r^3 & \cdots\cdots ① \\ 24 = a_1 r^5 & \cdots\cdots ② \end{cases}$，$\dfrac{②}{①}$　$\Rightarrow$　$r^2 = 4$，得 $r = 2$，-2（不合）

$r = 2$ 代入①，得 $a_1 = \dfrac{3}{4}$，所求$= \dfrac{\frac{3}{4}(2^{10}-1)}{2-1} = \dfrac{3069}{4}$

6. 設 $4(1+3+3^2+\cdots+3^n) = 4372$，則 $n =$__________。

【解答】6

【詳解】

$$4[\frac{1\cdot(3^{n+1}-1)}{3-1}] = 4372 \Rightarrow 3^{n+1} = 2187, n+1 = 7 \Rightarrow n = 6$$

7. 設一等差複數數列的首項是 $2+45i$，公差是 $1-3i$，若此數列的首 n 項和爲 S_n，則使 S_n 爲實數的正整數 $n =$__________。

【解答】$n = 31$

【詳解】

首 n 項和爲

$S_n = \frac{n}{2}[2 \cdot (2+45i) + (n-1)(1-3i)] = \frac{n}{2}[(n+3) + (93-3n)i] = \frac{1}{2}n(n+3) + \frac{1}{2}n(93-3n)i$

因爲S_n爲實數，則虛部$\frac{1}{2}n(93-3n)=0$，因爲n爲自然數，故取$n=31$

8. 設$< a_n >$是一等比數列，$a_6 = 24$ 且$a_8 = 96$，公比是正數，若前n項總和是S_n，試求$S_{10} =$___。

【解答】$\frac{3069}{4}$

【詳解】設公比爲r（$r>0$），首項爲a_1

$\begin{cases} 24 = a_1 r^5 \cdots\cdots ① \\ 96 = a_1 r^7 \cdots\cdots ② \end{cases}$，$\frac{②}{①}$ $\Rightarrow$ $r^2 = 4$，得$r=2$，又$a_1 = \frac{24}{r^5} = \frac{24}{2^5} = \frac{3}{4}$，$S_{10} = \frac{\frac{3}{4}(2^{10}-1)}{2-1} = \frac{3069}{4}$

9. 設有一等比數列，首項爲 7，末項爲 448，總和爲 889，若此數列的公比爲r，項數爲n，則數對$(n，r) =$__________。

【解答】(7，2)

【詳解】同 3.

設等比數列$< a_n >$，公比爲r，則$S_n = \frac{a_1 - ra_n}{1-r}$，得 $889 = \frac{7 - r \cdot 448}{1-r}$

$\therefore$ $889 - 889r = 7 - 448r$ $\therefore$ $441r = 882$，故得$r = 2$

$r = 2$ 代入$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$得 $448 = 7 \cdot 2^{n-1}$ $\Leftrightarrow$ $64 = 2^{n-1}$，故$n - 1 = 6$，即$n = 7$

故所求的數對爲$(n，r) = (7，2)$

10.設$< a_1，a_2，70，a_4，a_5，a_6，a_7，a_8，a_9，-7，\cdots >$爲一等差數列，求：

(1)第 30 項爲__________。

(2)此等差數列前n項總和爲S_n，則$n =$__________時，S_n有最大值；又此時總和的最大值爲__________。

【解答】(1) -227 (2) 9；432

【詳解】

$\begin{cases} a_3 = a_1 + 2r = 70 \\ a_{10} = a_1 + 9r = -7 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $r = -11$，$a_1 = 92$

(1) $a_{30} = 92 - 11 \times 29 = -227$

(2) $a_n = 92 + (n-1)(-11) < 0 \Rightarrow -11n < -103 \Rightarrow n > \frac{103}{11} = 9.\cdots$

$S_9 = \frac{9 \times [2 \times 92 + (9-1) \times 11]}{2} = 432$， 當$n = 9$ 時，S_n有最大值 432

11.在 4 與 12 之間依序插入 10 個數$a_1，a_2，a_3，\cdots，a_{10}$，使此 12 個數成等差數列，則$a_7 =$_。

【解答】$\frac{100}{11}$

【詳解】

等差數列$< 4，a_1，a_2，a_3，\cdots，a_{10}，12 >$的首項爲 4

第 12 項爲 12，故由$a_{12} = a_1 + 11d \Rightarrow d = \frac{a_{12} - a_1}{11} = \frac{12-4}{11} = \frac{8}{11}$

第八項$a_7 = 4 + (8 - 1) \cdot d = 4 + 7 \cdot \dfrac{8}{11} = \dfrac{100}{11}$

12.等差數列 -1，2，5，8，⋯，$(3n + 2)$，⋯，至少要加到第幾項總和才會超過 75。

答：__________。

【解答】8

【詳解】

$a_1 = -1$，$d = 3 \quad \Rightarrow \quad S_n = \dfrac{n}{2}[2(-1) + (n-1)(3)] > 75 \quad \Rightarrow \quad n(3n - 5) > 150$

$\Rightarrow \quad 3n^2 - 5n - 150 > 0 \quad \Rightarrow \quad n > \dfrac{5 + \sqrt{25 + 12 \cdot 150}}{2 \cdot 3} = \dfrac{5 + 5\sqrt{73}}{6} \doteqdot 7.95\cdots$， $\therefore \quad n \geq 8$

13.自 100 到 300 的正整數中，被 7 除餘 3 的數，它們的總和爲__________。

【解答】5771

【詳解】

$100 < 7k + 3 < 300$，$k \in Z \quad \Rightarrow \quad 97 < 7k < 297 \quad \Rightarrow \quad 13\dfrac{6}{7} < k < 42$，$k = 14$，15，⋯，42

$\therefore$ 所求總和$= \dfrac{29\,[(7 \times 14 + 3) + (7 \times 42 + 3)]}{2} = 5771$

14.$1 + 2i + 3i^2 + 4i^3 + \cdots + 102i^{101} =$__________。

【解答】$51 + 52i$

【詳解】

$$\begin{array}{rl} S = & 1 + 2i + 3i^2 + \cdots + 102i^{101} \\ -) \quad iS = & \quad\ \ i + 2i^2 + \cdots + 101i^{101} + 102i^{102} \\ \hline S(1 - i) = & 1 + i + i^2 + \cdots + i^{101} - 102i^{102} \end{array}$$

$\Rightarrow \quad S(1 - i) = \dfrac{1 \cdot (1 - i^{102})}{1 - i} - 102\,i^{102} \quad \Rightarrow S = \dfrac{1+1}{(1-i)^2} + \dfrac{102}{1-i} = \dfrac{2}{-2i} + \dfrac{102(1+i)}{1+1} = 51 + 52i$