高雄市明誠中學 高一數學複習測驗 日期：95.09.14					
範圍	1-1 整數	班級	普一　　班	姓名	
		座號			

一、選擇題 (每題 5 分)

1.下列何者為質數？(A) 321　(B) 91　(C) 299　(D) 437　(E) 1069

【解答】(E)

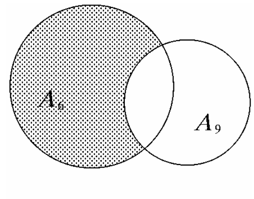
【詳解】

(A) $321 = 3\times 107$　(B) $91 = 7\times 13$　(C) $299 = 13\times 23$　(D) $437 = 19\times 23$

(E) $\sqrt{1069} = 32.\cdots$小於 32 的質數有 2，3，5，7，11，13，17，19，23，29，31，都不是 1069 的因數　∴　1069 為質數

2.不大於 500 的自然數中，是 6 的倍數不是 9 的倍數者有幾個？

(A) 55　(B) 56　(C) 57　(D) 70　(E) 71



【解答】(B)

【詳解】

所求 $= n(A_6) - n(A_{18})$，其中$n(A_k)$為k的倍數的個數

$= [\frac{500}{6}] - [\frac{500}{18}] = 83 - 27 = 56$

3.下列哪些是 3 的倍數？

(A) 7231×251　(B) $216^3 + 712^3$　(C) $124^3 - 214^3$　(D) 93275　(E) $3^{1999} + 1$

【解答】(C)

【詳解】

(A)∵　7231 與 251 皆不是 3 的倍數　∴　7231×251 不是 3 的倍數

(B)∵　216^3為 3 的倍數，712^3不是 3 的倍數　∴　$216^3 + 721^3$不是 3 的倍數

(C) $124^3 - 214^3 = (124 - 214)(124^2 + 124\times 214 + 214^2) = -90\times 87708$　∴　為 3 的倍數

(D)∵　$9 + 3 + 2 + 7 + 5 = 26$ 不是 3 的倍數　∴　93275 不是 3 的倍數

(E)∵　3^{1999}是 3 的倍數，1 不是 3 的倍數　∴　$3^{1999} + 1$ 不是 3 的倍數

4.已知六位數 $3ab548$ 為 99 之倍數，則 $a + 2b =$(A) 10　(B) 9　(C) 8　(D) 7　(E) 6

【解答】(C)

【詳解】

$3ab548$ 為 99 的倍數　∴　$3ab548$ 為 9 的倍數亦為 11 的倍數

∵　$3ab548$ 為 9 的倍數　∴　$9 \mid 3 + a + b + 5 + 4 + 8$

$\Rightarrow$　$9 \mid a + b + 20$　$\Rightarrow$　$9 \mid a + b + 2$　$\Rightarrow$　$a + b = 7$ 或 16……①

又 $3ab548$ 為 11 的倍數　∴　$11 \mid 3 - a + b - 5 + 4 - 8$

$\Rightarrow$　$11 \mid b - a - 6$　$\Rightarrow$　$b - a = 6$ 或-5……②

由①②知$\begin{cases} a+b=7 \\ b-a=6 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a+b=7 \\ b-a=-5 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a+b=16 \\ b-a=6 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a+b=16 \\ b-a=-5 \end{cases}$

則由第二組知 $a = 6$，$b = 1$　$\Rightarrow$　$a + 2b = 6 + 2 = 8$

5.(複選)設 a，b，q，r 均為整數，且 $a > b > 0$，$(x，y)$表示整數 x，y 的最大公因數，$[x，y]$表示整數 x，y 的最小公倍數，且 $a = bq + r$，則下列各敘述何者不為真？

(A)若$(a，b)=1$，則$[a，b]=ab$　　(B) $[a，b]=\dfrac{ab}{(a，b)}$　　(C) $(a，b)=(b，r)$

(D) $(a，b)=(q，r)$　　(E) $[a，b]\ge ab$

【解答】(D)(E)

【詳解】

由$(a，b)[a，b]=|ab|$　$\because$　$a>b>0$　$\therefore$　$(a，b)[a，b]=ab$

(A)$\because$　$(a，b)=1$　$\therefore$　$[a，b]=ab$為真

(B)$[a，b]=\dfrac{ab}{(a，b)}$為真

(C)$\because$　$a=bq+r$　$\therefore$　由歐幾里得輾轉相除法原理知$(a，b)=(b，r)$為真

(D)不真，如$35=10\times3+5$　$\Rightarrow$　$(35，10)=(10，5)=5$，但$(35，10)\neq(3，5)$

(E)不真，如$a=6$，$b=4$，$[6，4]=12<6\times4$

二、填充題(每題 10 分)

1. 540 之正因數有＿＿＿＿＿＿＿個，所有正因數之和為＿＿＿＿＿＿＿。
又滿足$x^2\mid 540$之整數x共有＿＿＿＿＿＿＿個。

【解答】24；1680；8

【詳解】

$\because$　$540=2^2\times3^3\times5=2^2\times3^2\times3\times5$

$\therefore$　正因數之個數為$(2+1)(3+1)(1+1)=24$

正因數之總和為$(2^0+2^1+2^2)(3^0+3^1+3^2+3^3)(5^0+5^1)=1680$

又滿足$x^2\mid 540$之整數$x=2^{\alpha}\cdot3^{\beta}\cdot5^{\gamma}$，其中$\alpha=0,1;\beta=0,2;\gamma=0$

$\therefore$　x的個數等於$2(2\times2\times1)=8$

2. 試求兩個正整數$a，b，a>b$且滿足$a+b=300，[a，b]=1365$，則序對$(a，b)=$＿＿＿＿＿＿。

【解答】(195，105)

【詳解】

設$d=(a，b)$，則$\begin{cases}a=dh\\b=dk\end{cases}$，$(h，k)=1$且$h>k$　$\Rightarrow$　$\begin{cases}a+b=d(h+k)=300\\ [a，b]=dhk=1365\end{cases}$

$\because$　$(h，k)=1$　$\therefore$　$(h+k，hk)=1$，故$d=(300，1365)=15$

$\begin{cases}h+k=20\\hk=91\end{cases}$　$\Rightarrow$　$\begin{cases}h=13\\k=7\end{cases}$　$\Rightarrow$　$\begin{cases}a=15\times13=195\\b=15\times7=105\end{cases}$

3. 已知高一新生介於 700～800 人，若以每班 40 人，45 人或 48 人編成一班，均餘 3 人，
則高一新生共有＿＿＿＿＿＿＿人。

【解答】723

【詳解】

設新生人數為n，$700\le n\le800$，由題意$n-3=k[40，45，48]$，$k\in N$　$\Rightarrow$　$n-3=720k$

$\Rightarrow$　$n=720k+3$，故取$n=720+3=723$

4. 設正整數$a，b，c$滿足$(a，b，c)+[a，b，c]=854$，且$a：b：c=10：12：15$，則
$a+b+c=$＿＿＿＿＿＿。

【解答】518

【詳解】

令 $a=10k$，$b=12k$，$c=15k$（$k\in N$），則$(a，b，c)+[a，b，c]=k+60k=854 \Rightarrow k=14$

得 $a+b+c=(10\times14)+(12\times14)+(15\times14)=518$

5. 設$a\in N$，若$\dfrac{2a+7}{3a-5}\in N$，則$a=$____________。

【解答】2 或 12

【詳解】

$(3a-5)\mid(2a+7)$且$(3a-5)\mid(3a-5) \Rightarrow (3a-5)\mid 3(2a+7)-2(3a-5)$

$\Rightarrow (3a-5)\mid 31 \Rightarrow 3a-5=\pm1，\pm31 \Rightarrow a=2，12$

6. (1)求 6328 與 18645 之最大公因數____________。

(2)續上題，找出一組整數m，n使 $6328m+18645n=(6328，18645)$，則數對$(m，n)=$________________。

【解答】(1) 113　(2) $(56，-19)$

【詳解】

(1)利用輾轉相除法

a	6328	18645	b
$-2a+b$	5989	12656	$2a$
$3a-b$	339	5989	$-2a+b$
$-53a+18b$	226	5763	$51a-17b$
$-56a-19b$	113	226	$-53a+18b$
		226	
		0	

$\therefore (6328，18645)=113$

(2) $113=6328\times56+18645\times(-19)$，$\therefore (m，n)=(56，-19)$

7. 設$n\in N$，若 $2n+5\mid 3n-17$，則所有的n值為______________。

【解答】1，22

【詳解】

$\because 2n+5\mid 3n-17$ 又 $2n+5\mid 2n+5$

$\therefore 2n+5\mid 3(2n+5)-2(3n-17) \Rightarrow 2n+5\mid 49$

$\because n\in N \therefore 2n+5=1，7，49 \Rightarrow n=1，22，-2$（不合）

8. $n\in Z$，若$p=4n^2-9n-9$ 為質數，則$p=$____________。

【解答】19

【詳解】

$P=4n^2-9n-9=(n-3)(4n+3)$

$\because P$為質數 $\therefore n-3=1$ 或 $4n+3=1$

當$n-3=1$ 時，$n=4$，$P=19$；當 $4n+3=1$ 時，$n=\dfrac{-1}{2}$（不合）

9.設n是自然數，且n^4-3n^2+9 是質數，則$n=$________________。

【解答】1 或 2

【詳解】

$\because\quad n^4-3n^2+9=(n^4+6n^2+9)-9n^2=(n^2+3)^2-(3n)^2=(n^2+3n+3)(n^2-3n+3)$爲質數

$\therefore\quad n^2+3n+3=1$ 或$n^2-3n+3=1$

$\Rightarrow\quad n^2+3n+2=0$ 或$n^2-3n+2=0\quad\Rightarrow\quad(n+1)(n+2)=0$ 或$(n-1)(n-2)=0$

$\therefore\quad n=-1$ 或 -2 或 1 或 2 $\quad\because\quad n$是自然數 $\quad\therefore\quad n=1$ 或 2

10.設$p=(a^2-22a+121)(a^2-2a+69)$，若$a\in N$，且$p$爲一質數，則$a=$__________。

【解答】10

【詳解】

$\because\quad p=(a^2-22a+121)(a^2-2a+69)$爲質數

$\therefore\quad a^2-22a+121=1$ 或$a^2-2a+69=1$

$\Rightarrow\quad a^2-22a+120=0$ 或$a^2-2a+68=0\Rightarrow\quad(a-10)(a-12)=0$ 或$a\notin N$(判別式小於 0)

$\therefore\quad a=10$ 或 12

(1)若$a=10$，則$p=a^2-2a+69=100-20+69=149$ 爲質數

(2)若$a=12$，則$p=a^2-2a+69=144-24+69=189=7\times27$ 不爲質數

$\therefore$ 由(1) (2) 知$a=10$

11.設$x\in N$，$x>1$，且x除 135，278，395 所得的餘數均相等，則$x=$__________。

【解答】13

【詳解】

設共同餘數爲 r，則 $x\mid(135-r)$，$x\mid(278-r)$，$x\mid(395-r)$

由 $x\mid(135-r)$，$x\mid(278-r)\quad\Rightarrow\quad x\mid(278-r)-(135-r)\quad\therefore\quad x\mid143$

$x\mid(135-r)$，$x\mid(395-r)\quad\Rightarrow\quad x\mid(395-r)-(135-r)\quad\therefore\quad x\mid260$

又 $x\mid(278-r)$，$x\mid(395-r)\quad\Rightarrow\quad x\mid(395-r)-(278-r)\quad\therefore\quad x\mid117$

$\therefore\quad x\mid(143，260，117)\quad\because\quad(143，260，117)=13\quad\therefore\quad x\mid13$

$\because\quad x>1\quad\therefore\quad x=13$

12.$a\in N$，$a\leq540$，若$(a，30)=5$，則合乎條件的a有__________個。

【解答】36

【詳解】

令 $a=5k$，$(a，30)=(5k，30)=5\Rightarrow\quad(k，6)=1\cdots\cdots$①，$a=5k\leq540\quad\Rightarrow\quad k\leq108\cdots\cdots$②

由①，②可知，k 之個數爲 $108-([\frac{108}{2}])+[\frac{108}{3}]-[\frac{108}{6}])=36$

故合乎條件的 a 有 36 個

13.設a爲整數，若 648 用a去除餘 18，747 用a去除餘 12，求a的最小值 =__________。

【解答】21

【詳解】

由$\begin{cases}648=aq_1+18\,(a>18)\\747=aq_2+12\,(a>12)\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}630=aq_1\\735=aq_2\end{cases}\,(a>18)$

則 a 爲 630 與 735 之公因數且 $a>18$

而$(630，735)=105=3\times5\times7$，則 a 爲 105 之因數且最小值爲 21

14.設有三個質數，其積爲其和的 17 倍，則此三質數爲__________。

【解答】2，17，19

【詳解】

設三質數爲 m，n，p，則 $mnp=17(m+n+p)\Rightarrow\quad17\mid mnp$，三質數 m，n，p 有一爲 17

令 $p = 17$　∴　$mn = m + n + 17$

$\Rightarrow$　$mn - m - n = 17$　$\Rightarrow$　$m(n-1) - (n-1) = 18$

$\Rightarrow$　$(m-1)(n-1) = 18$　$\Rightarrow$　$\begin{cases} m-1=1，2，3 \\ n-1=18，9，6 \end{cases}$　$\Rightarrow$　$m = 2$，$n = 19$

∴　三質數爲 2，17，19

15.設a爲整數，且滿足$-\dfrac{1}{3}<\dfrac{2a}{7}<\dfrac{3}{2}$，則$a$值有＿＿＿＿＿個。

【解答】7

【詳解】

∵　$-\dfrac{1}{3}<\dfrac{2a}{7}<\dfrac{3}{2}$，同乘 42 得 $-14 < 12a < 63$，同除以 12 得 $\Rightarrow -\dfrac{7}{6} < a < \dfrac{21}{4}$

∵　a 爲整數　∴　a 值所成的集合爲 -1，0，1，2，3，4，5 共 7 個

16.設$x \in Z$，若$x^4 + x^2 + 1$ 爲質數，則$x =$＿＿＿＿＿，此質數爲＿＿＿＿＿。

【解答】± 1，3

【詳解】

∵　$x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + 1 - x)(x^2 + 1 + x)$……乘法公式

$x^2 - x + 1 = 1$　$\Rightarrow$　$x = 0$，1（0 不合），$x^2 + x + 1 = 1$　$\Rightarrow$　$x = 0$，-1（0 不合）

$\Rightarrow$　$x = \pm 1$，$p = 3$

17.x，$y \in N$，$xy - 2x + 3y = 0$，則$(x，y) =$＿＿＿＿＿。

【解答】(3，1)

【詳解】

$xy - 2x + 3y = 0$　$\Rightarrow$　$x(y-2) + 3(y-2) = -6$　$\Rightarrow$　$(x+3)(y-2) = -6(x，y\in N)$

$x+3$	1	2	3	6
$y-2$	-6	-3	-2	-1

$\Rightarrow$

x	-2	-1	0	3
y	-4	-1	0	1

$\Rightarrow$　$(x，y) = (3，1)$

18.我國農曆以天干（甲、乙、丙、丁、戊、己、庚、辛、壬、癸），地支（子、丑、寅、卯、辰、巳、午、未、申、酉、戌、亥）記年，其順序爲甲子、乙丑、丙寅、…。若知西元 1911 年爲「辛亥」年，試推算：

(1)西元 1866 年是什麼記年？ (2)西元 2007 年是什麼記年？

【解答】(1)丙寅　(2)丁亥

【詳解】

(1) $1911 - 1866 = 45$　$\Rightarrow$　$\begin{cases} 45=10q_1+5 & \text{天干：丙} \\ 45=12q_2+9 & \text{地支：寅} \end{cases}$，由「辛亥」往前算 5、9 個字

∴　1866 年爲丙寅年

(2) $2007 - 1911 = 96$　$\Rightarrow$　$\begin{cases} 96=10q_3+6 & \text{天干：丁} \\ 96=12q_4 & \text{地支：亥} \end{cases}$，由「辛亥」往後算 6、0 個字

19.設 $n \in N$ 且 $\sqrt{n^2-9n-1} \in N$，求 n 之值。

【解答】10 或 26

【解 1】

令 $\sqrt{n^2-9n-1} = k \in N$，則$n^2 - 9n - 1 = k^2$

$\Rightarrow$　$n^2 - k^2 - 9n - 1 = 0$　$\Rightarrow$　$n^2 - 9n + (\dfrac{9}{2})^2 - k^2 = (\dfrac{9}{2})^2 + 1$

$\Rightarrow\quad [n-\frac{9}{2}]^2-k^2=\frac{85}{4}\qquad\Rightarrow\quad (n+k-\frac{9}{2})(n-k-\frac{9}{2})=\frac{85}{4}$，兩邊同乘 4

$\Rightarrow\quad (2n+2k-9)(2n-2k-9)=85=85\cdot 1=17\cdot 5$

$\because\quad 2n+2k-9>2n-2k-9$

$\therefore\quad \begin{cases}2n+2k-9=85\\2n-2k-9=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2n+2k-9=17\\2n-2k-9=5\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}n+k=47\\n-k=5\end{cases}$ 或 $\begin{cases}n+k=13\\n-k=7\end{cases}$

$\Rightarrow\quad \begin{cases}n=26\\k=21\end{cases}$ 或 $\begin{cases}n=10\\k=3\end{cases}$，故$n=26$ 或$n=10$

【解 2】

令$\sqrt{n^2-9n-1}=k\in N$，則$n^2-9n-1-k^2=0$

$\Rightarrow\quad n=\frac{9\pm\sqrt{81+4(1+k^2)}}{2}=\frac{9\pm\sqrt{85+4k^2}}{2}\in N$（負不合），$\therefore\quad 85+4k^2$爲完全平方數

令 $85+4k^2=\ell^2$（$\ell\in N$），則$\ell^2-4k^2=85\quad\Rightarrow\quad(\ell+2k)(\ell-2k)=85$ 且$\ell+2k>\ell-2k$

$\therefore$

$\ell+2k$	85	17
$\ell-2k$	1	5

$\Rightarrow$

ℓ	43	11
k	21	3

故$n=\frac{9+\ell}{2}=\frac{9+43}{2}=26$ 或$\frac{9+11}{2}=10$