高雄市明誠中學 高一數學複習測驗 日期：95.10.26					
範圍	1-4 複數(全)	班級	普一　　班	姓名	
		座號			

一、選擇題 (每題 5 分)

1. 設a，b均為非零的實數，下列何者成立？

(A) $\sqrt{a^2}=a$　(B) $\sqrt{-a}=\sqrt{a}\,i$　(C) $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$　(D) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$　(E) $i^{83}=-i$

【解答】(E)

【詳解】

(A)$\because\ \sqrt{a^2}=|a|\quad\therefore\ \sqrt{a^2}=a$不真

(B)$\because$ 當$a<0$時，$\sqrt{a}\,i=(\sqrt{-a}\,i)i=-\sqrt{-a}\quad\therefore\ \sqrt{-a}=\sqrt{a}\,i$不恆真

(C)當$a<0$，$b<0$時，$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=-\sqrt{ab}\quad\therefore\ \sqrt{a}\,\sqrt{b}=\sqrt{ab}$不恆真

(D)當$a>0$，$b<0$時，$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}\quad\therefore\ \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$不恆真

(E)$\because\ i^4=1\quad\therefore\ i^{83}=i^3=-i$為真

2. 以$2+\sqrt{2}\,i$及$2-\sqrt{2}\,i$為根作一個一元二次方程式為

(A) $x^2+4x-2=0$　(B) $x^2-2x-3=0$　(C) $x^2-4x+6=0$　(D) $x^2-2x-1=0$

(E) $x^2-4x+8=0$

【解答】(C)

【詳解】

$\because\ (2+\sqrt{2}\,i)+(2-\sqrt{2}\,i)=4$，$(2+\sqrt{2}\,i)(2-\sqrt{2}\,i)=6$

$\therefore$ 以$2+\sqrt{2}\,i$及$2-\sqrt{2}\,i$為二根之二次方程式為$x^2-4x+6=0$

3. (複選)設a，$b\in C$，則下列何者正確？

(A) $\overline{a+b}=\bar{a}+\bar{b}$　(B) $\overline{a-b}=\bar{a}-\bar{b}$　(C) $\overline{ab}=\bar{a}\,\bar{b}$　(D) $\overline{\left(\dfrac{a}{b}\right)}=\dfrac{\bar{a}}{\bar{b}}$　(E) $\overline{a^n}=(\bar{a})^n$，其中$n\in N$

【解答】(A)(B)(C)(D)(E)

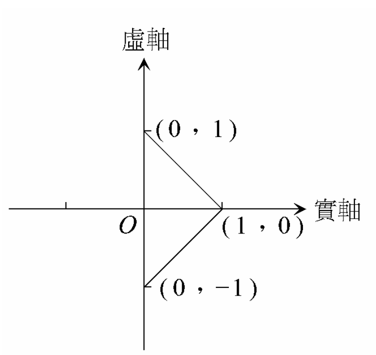
【詳解】參閱複數絕對值之性質

4. (複選)如果將複數看成複數平面上的點，則下列哪些敘述是正確的？ (A) 1，i，$1+i$ 三點共線

(B) $\sqrt{2}+i$ 與 $1+\sqrt{2}\,i$ 和原點距離均相等

(C) $\sqrt{3}\,i$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{2}+i$，$1+\sqrt{2}\,i$ 四點共圓

(D)以 1，i，-1 為頂點的三角形是等腰三角形



【解答】(B)(C)(D)

【詳解】

(A) $1\ \rightarrow\ (1，0)$，$i\ \rightarrow\ (0，1)$，$1+i\ \rightarrow\ (1，1)$，其斜率$\dfrac{0-1}{1-0}\neq\dfrac{1-1}{0-1}\quad\therefore$ 三點不共線

(B) $|\sqrt{2}+i|=\sqrt{(\sqrt{2})^2+1}=\sqrt{3}$，$|1+\sqrt{2}\,i|=\sqrt{1+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}$

$\therefore\ \sqrt{2}+i$ 與 $1+\sqrt{2}\,i$ 和原點距離均相等

(C) $|\sqrt{3}\,i|=\sqrt{3}$，$|\sqrt{3}|=\sqrt{3}$，$|\sqrt{2}+i|=\sqrt{3}$，$|1+\sqrt{2}\,i|=\sqrt{3}$

$\therefore$ 四點均在以原點為圓心，$\sqrt{3}$為半徑的圓上

(D) 1 $\to$ (1，0)，i $\to$ (0，1)，$-i$ $\to$ (0，-1)，$\therefore$　由圖知其圖形為等腰三角形

5. (複選)下列何者不正確？

(A) $2i > i$　(B) $5+2i > 4+2i$　(C) $i^2 < 0$　(D) $|5i| > 0$　(E) $|3-4i| > |2+i|$

【解答】(A)(B)

【詳解】

(A)錯誤：虛數無法比較大小　　(B)錯誤：同(A)

(C)正確：$i^2 = -1 < 0$　　(D)正確：$|5i| = \sqrt{0^2+5^2} = 5 > 0$

(E)正確：$|3-4i| = \sqrt{3^2+(-4)^2} > \sqrt{2^2+1^2} = |2+i|$

二、填充題(每題 10 分)

1. 化簡 $\dfrac{(3-\sqrt{-16})\cdot(-1+\sqrt{-25})}{2+\sqrt{-9}}$ 為標準式得__________。

【解答】$7-i$

【詳解】

$$\frac{(3-\sqrt{-16})\cdot(-1+\sqrt{-25})}{2+\sqrt{-9}} = \frac{(3-4i)(-1+5i)}{2+3i}$$

$$= \frac{(-3+20)+(4+15)i}{2+3i} = \frac{17+19i}{2+3i} = \frac{(17+19i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{(34+57)+(38-51)i}{4+9} = \frac{91-13i}{13} = 7-i$$

2. 設k為實數，方程式$x^2+(k+3)x+(k+3)=0$

(1)有虛根，則k的範圍為__________。　(2)兩根相等，則$k=$__________。

【解答】(1) $-3 < k < 1$　(2) -3 或 1

【詳解】

判別式　$\Rightarrow$　$(k+3)^2 - 4\cdot 1\cdot (k+3) = (k+3)(k-1)$

(1)有虛根，則 $(k+3)(k-1) < 0 \Rightarrow -3 < k < 1$

(2)兩根相等，則$(k+3)(k-1) = 0 \Rightarrow k = -3$ 或 1

3. $\dfrac{8+5i}{3-2i}$ 之共軛複數為__________。

【解答】$\dfrac{14}{13}-\dfrac{31}{13}i$

【詳解】

$$\overline{\left(\frac{8+5i}{3-2i}\right)} = \frac{\overline{8+5i}}{\overline{3-2i}} = \frac{8-5i}{3+2i} = \frac{(8-5i)(3-2i)}{9+4} = \frac{14-31i}{13} = \frac{14}{13}-\frac{31}{13}i$$

4. 設x，$y \in R$且 $\dfrac{(2+3i)(1-2i)}{x+yi} = 1-i$，則(1) $x=$__________。　(2) $y=$__________。

【解答】(1) $\dfrac{9}{2}$　(2) $\dfrac{7}{2}$

【詳解】

$$x+yi = \frac{(2+3i)(1-2i)}{1-i} = \frac{(2+3i)(1-2i)(1+i)}{1+1} = \frac{(8-i)(1+i)}{2} = \frac{9+7i}{2} = \frac{9}{2}+\frac{7}{2}i$$

5. 設$x \in R$且$z = i(x-i)^2 \in R$，則(1) $x =$__________。　(2) $z =$__________。

【解答】(1) ± 1　(2) ± 2

【詳解】

(1)$z = i(x-i)^2 = i(x^2 - 2xi + i^2) = 2x + (x^2 - 1)i \in R$，$x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

(2)　$z = 2(\pm 1) + (1-1)i = \pm 2$

6. 設a爲實數且方程式$x^2 + (a+2i)x + (3a+4i) = 0$ 有實根，則

(1) a之値爲__________。　(2)此方程式的兩根爲__________。

【解答】(1) -4　(2) -2，$6-2i$

【詳解】

設方程式之實根爲α，則 $\alpha^2 + (a+2i)\alpha + (3a+4i) = 0$

$\Rightarrow$　$(\alpha^2 + a\alpha + 3a) + (2\alpha + 4)i = 0$

$\Rightarrow$　$\begin{cases} \alpha^2 + a\alpha + 3a = 0 \\ 2\alpha + 4 = 0 \end{cases}$　$\Rightarrow$　$\begin{cases} \alpha = -2 \\ a = -4 \end{cases}$　，其實根$\alpha = -2$　；

設另一根爲β，則 $-2 + \beta = -(-4+2i)$　$\Rightarrow$　$\beta = 6 - 2i$

7. 若a與$a+2$ 爲異號的兩實數，且均爲方程式$x^2 + |x| + 3k = 0$ 的解，則k之値爲________。

【解答】$-\dfrac{2}{3}$

【詳解】

$\because$　a與$a+2$ 異號　$\therefore$　$a < 0$，$a + 2 > 0$

$\because$　a與$a+2$ 爲方程式$x^2 + |x| + 3k = 0$ 之二根

$\therefore$　$a^2 + |a| + 3k = 0$　$\Rightarrow$　$a^2 - a + 3k = 0$……①

$(a+2)^2 + |a+2| + 3k = 0$　$\Rightarrow$　$(a+2)^2 + (a+2) + 3k = 0$　$\Rightarrow$　$a^2 + 5a + 6 + 3k = 0$……②

② − ①得 $6a + 6 = 0$　$\therefore$　$a = -1$，代入①得 $2 + 3k = 0$　$\therefore$　$k = -\dfrac{2}{3}$

8. 設$z = \dfrac{(5-12i)\cdot(7+2i)}{(2-7i)\cdot(3+4i)}$，則 $|z| =$__________。

【解答】$\dfrac{13}{5}$

【詳解】

$$|z| = \left|\frac{(5-12i)\cdot(7+2i)}{(2-7i)\cdot(3+4i)}\right|$$

$$= \frac{|5-12i|\cdot|7+2i|}{|2-7i|\cdot|3+4i|} = \frac{\sqrt{5^2+12^2}\cdot\sqrt{7^2+2^2}}{\sqrt{2^2+7^2}\cdot\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{13\cdot\sqrt{53}}{\sqrt{53}\cdot 5} = \frac{13}{5}$$

9. 設a，$b \in R$且$[(a+1)-4i] + [5+(b-2)i] = 2+5i$，則$a+b =$__________。

【解答】7

【詳解】

$[(a+1)-4i] + [5+(b-2)i] = 2+5i$　$\Rightarrow$　$(a+1+5) + (-4+b-2)i = 2+5i$

$\Rightarrow$　$(a+6) + (b-6)\,i = 2+5i$　$\Rightarrow$　$\begin{cases} a+6 = 2 \\ b-6 = 5 \end{cases}$　$\therefore$　$\begin{cases} a = -4 \\ b = 11 \end{cases}$，$a+b = -4+11 = 7$

10.設$a \in R$，若二次方程式$x^2 - ax - a + 8 = 0$ 有相等實根，則a爲__________。

【解答】4 或 -8

【詳解】

$a\in R$，$x^2-ax-a+8=0$ 有相等實根，則$D=(-a)^2-4(-a+8)=0\quad\Rightarrow a^2+4a-32=0$

$\Rightarrow\quad(a-4)(a+8)=0\quad\Rightarrow\quad a=4$ 或 -8

11.設$z=1+i+i^2+\cdots+i^{101}$，則

(1) $|z|=$__________。　(2) $\bar{z}=$__________。

【解答】(1) $\sqrt{2}$　(2) $1-i$

【詳解】

$$z=1+i+i^2+\cdots+i^{101}=\underbrace{(1+i-i+1)+(1+i-i+1)+\cdots\cdots+(1+i-i+1)}_{25\text{個}}+(i^{100}+i^{101})=1+i$$

(1) $|z|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$　(2) $\bar{z}=\overline{1+i}=1-i$

12.複數平面上

(1)滿足 $|z+3i|=2$ 的z點所成之圖形爲__________。

(2)滿足 $|z+3i|=|z-3i|$ 的z點所成之圖形爲__________。

【解答】(1)圓　(2)一直線

【詳解】

(1) $|z+3i|=2$ 之圖形爲複數平面上與點(0，3)距離 2 的點之集合，亦即圓

(2) $|z+3i|=|z-3i|$之圖形爲複數平面上與點(0，–3)、(0，3)等距離的點之集合，亦即端點爲(0，–3)、(0，3)線段的垂直平分線

13.設$\alpha=2+5i$，$\beta=-4+3i$，$\gamma=6-i$

(1)若複數平面上，依序連結點α，β，γ，δ 成一平行四邊形，則$\delta=$__________。

(2) $|\alpha-\beta|=$__________。

【解答】(1) $12+i$　(2) $2\sqrt{10}$

【詳解】

$\alpha(2+5i)$，$\beta(-4+3i)$，$\gamma(6-i)$，$\delta(a+bi)$

(1)設四點在複數平面上之坐標分別爲 A(2，5)，B(–4，3)，C(6，–1)，D(a，b)

又 ABCD 爲平行四邊形，則，則 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 之中點相同，即$\begin{cases}\dfrac{2+6}{2}=\dfrac{-4+a}{2}\\[2mm]\dfrac{5-1}{2}=\dfrac{3+b}{2}\end{cases}$，得$\begin{cases}a=12\\b=1\end{cases}$，

所以$\delta=12+i$

(2) $|\alpha-\beta|=\overline{AB}=\sqrt{(2+4)^2+(5-3)^2}=2\sqrt{10}$

14.設$\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，則化簡$(1+\omega)^6+(1+\omega^2)^6+(\omega+\omega^2)^6$之值爲__________。

【解答】3

【詳解】

$\because\quad\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\quad\therefore\quad\omega^3=1$，$\omega^2+\omega+1=0$

$\therefore\quad (1+\omega)^6+(1+\omega^2)^6+(\omega+\omega^2)^6=(-\omega^2)^6+(-\omega)^6+(-1)^6$

$=\omega^{12}+\omega^6+1=(\omega^3)^4+(\omega^3)^2+1=3$

15.設k爲給定之有理數，且對任一有理數m，恆使方程式$x^2-3(m-1)x+2m^2+3k=0$之根爲有理數，則$k=$__________。

【解答】-6

【詳解】

判別式 $\Rightarrow$ $[-3(m-1)]^2-4\cdot 1\cdot(2m^2+3k)$

$=9(m-1)^2-4(2m^2+3k)=m^2-18m+(9-12k)$ (根爲有理數判別式爲完全平方式)

$\therefore\quad 9^2-(9-12k)=0$，則$k=-6$

16.(1) 若$\omega^2=-3+4i$，則$\omega=$__________。(2)求方程式$x^2-5x+(7-i)=0$之解。

【解答】$x=3+i$ 或 $x=2-i$

【詳解】

(1)設$z=x+yi$，則$(x+yi)^2=-3+4i\Rightarrow x^2-y^2+2xyi=-3+4i\Rightarrow$ $\begin{cases}x^2-y^2=-3\cdots\cdots① \\ 2xy=4 \qquad\cdots\cdots②\end{cases}$

又 $|(x+yi)^2|=|-3+4i|$；$(\sqrt{x^2+y^2})^2=\sqrt{(-3)^2+4^2}\Rightarrow x^2+y^2=5\cdots\cdots③$

由①③知 $x^2=1$ $\Rightarrow$ $x=\pm1$；$y^2=4$ $\Rightarrow y=\pm2$，由②知 x 、y 同號

故$\omega==1+2i$或 $-1-2i$

(2)根之公式$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $\Rightarrow$ $x=\dfrac{5\pm\sqrt{\omega^2}}{2}=\dfrac{5\pm\omega}{2}$

$\omega^2=-3+4i$得$\omega=\pm(1+2i)$ $\Rightarrow$ $x=3+i$或$x=2-i$

17.α，β爲$x^2+6x+1=0$之二根，求$(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=$_______________。

【解答】-8

【詳解】

由根與係數關係知$\begin{cases}\alpha+\beta=-6 \\ \alpha\beta=1\end{cases}$

$\because\quad \alpha+\beta<0$，$\alpha\beta>0$，又$\alpha$，$\beta\in R$ $\therefore$ $\alpha<0$，$\beta<0$ $\Rightarrow$ $\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}=-\sqrt{\alpha\beta}$

$\Rightarrow$ $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\cdot\sqrt{\beta}+2\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}=\alpha+\beta-2\sqrt{\alpha\beta}=-6-2=-8$

18.設 a，b 爲實數，且$\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{2+i}+\dfrac{1}{a+bi}=0$，試求 a，b 之值。_______________

【解答】$a=-\dfrac{3}{2}$，$b=-\dfrac{1}{2}$

【詳解】

$\because\quad \dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{2+i}+\dfrac{1}{a+bi}=0$ $\therefore$ $\dfrac{1}{a+bi}=-\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{2+i}=\dfrac{-(7+i)}{5(2+i)}$

倒數 $\Rightarrow$ $a+bi=-\dfrac{5(2+i)}{7+i}=-\dfrac{5(2+i)(7-i)}{(7+i)(7-i)}=\dfrac{-5(15+5i)}{50}=-\dfrac{15+5i}{10}=-\dfrac{3}{2}+(-\dfrac{1}{2})i$

$\therefore\quad a=-\dfrac{3}{2}$，$b=-\dfrac{1}{2}$

19.設 $2+i$爲方程式$x^2+x+a=0$之一根，求a及另一根。

【解答】$a=-5-5i$；另一根爲 $-3-i$

【詳解】

$\because$ $2+i$為$x^2+x+a=0$之一根，設另一根為α，則由根與係數之關係

$$\begin{cases}(2+i)+\alpha=-1 \cdots\cdots ① \\ (2+i)\cdot\alpha=a \ \cdots\cdots ②\end{cases}$$

由①$\alpha=-3-i$代入②，得$a=(2+i)(-3-i)=-5-5i$

20.甲、乙兩生同解一整係數方程式，甲生看錯x^2之係數得二根為$\frac{5}{4}$與 $-\frac{3}{10}$，乙生用公式解，判別式計算錯誤得二根為$\frac{13}{12}$與 $-\frac{7}{24}$ ，試求正確的方程式。

【解答】$48x^2-38x-15=0$

【詳解】

設正確方程式為$ax^2+bx+c=0$，其二根為α，β，則$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$，$\alpha\beta=\frac{c}{a}$ $\Rightarrow$ $\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=-\frac{b}{c}$

$\because$ 甲生看錯x^2之係數a，但b，c沒錯，即$\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=-\frac{b}{c}$正確

$\therefore$ 取$\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=-\frac{b}{c}$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=-\frac{b}{c}$ $\therefore$ $\frac{4}{5}+(-\frac{10}{3})=-\frac{b}{c}$ $\Rightarrow$ $\frac{38}{15}=\frac{b}{c}\cdots\cdots ①$

$\because$ 乙生判別式計算錯誤，$\alpha+\beta=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=-\frac{b}{a}$正確

$\therefore$ 由$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$得$\frac{13}{12}+(-\frac{7}{24})=-\frac{b}{a}$ $\Rightarrow$ $\frac{19}{24}=-\frac{b}{a}\cdots\cdots ②$

由①，② $c=\frac{15}{38}b$，$a=-\frac{24}{19}b \Rightarrow a:b:c=(-\frac{24}{19})b:b:(\frac{15}{38})b=48:(-38):15$

取$a=48, b=-38, c=-15$代入$ax^2+bx+c=0 \Rightarrow 48x^2-38x-15=0$為所求方程式