高雄市明誠中學 高一數學複習測驗 日期：95.10.18					
範圍	1-4 複數(2)	班級	普一 班	姓名	
		座號			

一、選擇題 (每題 5 分)

1. 設 a，$b \in C$，$\alpha \in R$，則 $\dfrac{3a-bi}{a\alpha-2bi}$ 之共軛複數爲

(A) $\dfrac{3a+bi}{a\overline{\alpha}-2bi}$ (B) $\dfrac{3\overline{a}-\overline{b}i}{a\overline{\alpha}-2bi}$ (C) $\dfrac{3\overline{a}+\overline{b}i}{\alpha\overline{a}-2\overline{b}i}$ (D) $\dfrac{3\overline{a}+\overline{b}i}{\overline{\alpha}a+2\overline{b}i}$ (E) $\dfrac{3\overline{a}+\overline{b}i}{\alpha\overline{a}+2\overline{b}i}$

【解答】(E)

【詳解】$\overline{(\dfrac{3a-bi}{a\alpha-2bi})}=\dfrac{\overline{3a-bi}}{\overline{a\alpha-2bi}}=\dfrac{\overline{3a+bi}}{\overline{a\alpha+2bi}}=\dfrac{3\overline{a}+\overline{b}i}{\alpha\overline{a}+2\overline{b}i}$ $\therefore$ (E)爲真

2. 複數平面上，所有滿足$|z-2-i|=3$ 的點，所成的圖形爲何？__________。

(A)一直線 (B)一圓 (C)一點 (D)不存在 (E)以上皆非

【解答】(B)

【詳解】$|z-2-i|=3$ 之圖形爲複數平面上與點(2，1)距離 3 的點之集合，亦即圓

3. 設 $1-i$爲$x^2+ax+3-i=0$ 的一根，則a的值爲何？

(A) -3 (B) -2 (C) $-1-i$ (D) 2 (E) 3

【解答】(A)

$\because$ $1-i$爲$x^2+ax+3-i=0$ 的一根 $\therefore$ $(1-i)^2+a(1-i)+3-i=0$

$\Rightarrow$ $1-2i+i^2+a-ai+3-i=0$ $\Rightarrow$ $1-2i-1+a-ai+3-i=0$

$\Rightarrow$ $(a+3)-(a+3)i=0+0i$ $\therefore$ $a+3=0$ $\Rightarrow$ $a=-3$

4. (複選)下列何者不正確？

(A) α，β爲$ax^2+bx+c=0$ 之二根，且a，b，c皆爲實數，若$\alpha=1-\sqrt{5}$，則$\beta=1+\sqrt{5}$

(B) α，β爲$ax^2+bx+c=0$ 之二根，且a，b，c皆爲複數，若$\alpha=2+3i$，則$\beta=2-3i$

(C)若a，b，c皆爲複數，且$a^2+b^2+c^2=0$，則$a=b=c=0$

(D)若$a+b$，ab皆爲實數，則a，b均爲實數

(E)設a，b，c皆爲實數，則方程式$(a+b)x^2-(a+b+c)x+\dfrac{c}{2}=0$ 有實根

【解答】(A)(B)(C)(D)

【詳解】

(A)錯誤：a，b，c皆爲有理數時，若$\alpha=1-\sqrt{5}$，則$\beta=1+\sqrt{5}$

(B)錯誤：a，b，c皆爲實數時，若$\alpha=2+3i$，則$\beta=2-3i$

(C)錯誤：例$a=1$，$b=i$，$c=0$

(D)錯誤：例$a=\sqrt{2}$，$b=-\sqrt{2}$

(E)正確：判別式D：$(a+b+c)^2-4\cdot\dfrac{c}{2}\cdot(a+b)=(a+b)^2+c^2\geq 0$ $\Rightarrow$ 有實根

5. (複選)設Z_1與Z_2爲方程式$Z^2=-3+4i$的二根，則下列何者正確？

(A) $\overline{Z_1}=Z_2$ (B) $|Z_1|=|Z_2|=\sqrt{5}$ (C) $Z_1+Z_2=0$ (D) $Z_1+Z_2=4i$ (E) $Z_1Z_2=-Z^2$

【解答】(B)(C)(E)

【詳解】

設$Z=x+yi$ $\therefore$ $(x+yi)^2=-3+4i$ $\Rightarrow$ $x^2-y^2+2xyi=-3+4i$

$\therefore \begin{cases} x^2-y^2=-3 \cdots\cdots ① \\ 2xy=4 \cdots\cdots ② \end{cases}$

且 $x^2+y^2=5 \cdots\cdots ③$

$\dfrac{①+③}{2}$ 得 $x^2=1$ 代入③得 $y^2=4 \Rightarrow x=\pm 1$，$y=\pm 2$

由②知 $x=1$，$y=2$ 或 $x=-1$，$y=-2$ $\therefore$ $Z_1=1+2i$，$Z_2=-1-2i$

(A) $\overline{Z_1}=\overline{1+2i}=1-2i\neq Z_2$ (B) $|Z_1|=|Z_2|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$

(C)(D) $Z_1+Z_2=1+2i+(-1-2i)=0$ (E) $Z_1Z_2=(1+2i)(-1-2i)=3-4i=-Z^2$

6. 設 α，β 為 $x^2+6x+4=0$ 之二根，則 $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=$？

(A) -2 (B) -4 (C) -6 (D) -8 (E) -10

【解答】(E)

【詳解】

$\because$ α，β 是 $x^2+6x+4=0$ 之二根，$\therefore$ $\alpha+\beta=-6$，$\alpha\beta=4$

又 $D=6^2-4\times1\times4=20>0 \Rightarrow \alpha<0$，$\beta<0$

$\therefore$ $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}=(\alpha+\beta)-2\sqrt{\alpha\beta}=(-6)-2\sqrt{4}=-6-4=-10$

二、填充題(每題 10 分)

1. 設 $i=\sqrt{-1}$，則 $\dfrac{5i^5+4i^3+1}{8i^9-5i-3}$ 的絕對值為__________。

【解答】$\dfrac{1}{3}$

【解 1】

$\because$ $i=\sqrt{-1}$ $\therefore$ $i^4=1$ $\Rightarrow$ $\dfrac{5i^5+4i^3+1}{8i^9-5i-3}=\dfrac{5i-4i+1}{8i-5i-3}=\dfrac{i+1}{3i-3}=\dfrac{1+i}{3(-1+i)}$

$=\dfrac{(1+i)(-1-i)}{3(-1+i)(-1-i)}=\dfrac{(-1+1)+(-1-1)i}{3(1+1)}=\dfrac{-2i}{6}=-\dfrac{i}{3}=0+(-\dfrac{1}{3})i$

$\therefore$ $\left|\dfrac{5i^5+4i^3+1}{8i^9-5i-3}\right|=|0+(-\dfrac{1}{3})i|=\sqrt{0+(-\dfrac{1}{3})^2}=\dfrac{1}{3}$

2. 設 $z=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$，則 $1+\sqrt{2}z^{95}+z^{2006}=$__________。

【解答】$2-2i$

【詳解】

$\because$ $z^2=(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}})^2=\dfrac{2i}{2}=i$，$z^4=-1$，$z^8=1$

$\therefore$ $z^{95}=(z^8)^{11}\cdot z^4\cdot z^2\cdot z=1\cdot(-1)\cdot i\cdot z=\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$， $z^{2006}=(z^4)^{501}\cdot z^2=-i$

故 $1+\sqrt{2}z^{95}+z^{2006}=1+\sqrt{2}\cdot(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}})+(-i)=2-2i$

3. 若 a 與 $a+2$ 為異號的兩實數，且均為方程式 $x^2+|x|+3k=0$ 的解，則 k 之值為________。

【解答】$-\dfrac{2}{3}$

【詳解】

∵　a與$a+2$ 異號　∴　$a<0$，$a+2>0$

∵　a與$a+2$ 為方程式$x^2+|x|+3k=0$ 之二根，代入

∴　$a^2+|a|+3k=0\quad\Rightarrow\quad a^2-a+3k=0$……①

$(a+2)^2+|a+2|+3k=0\quad\Rightarrow\quad(a+2)^2+(a+2)+3k=0\quad\Rightarrow\quad a^2+5a+6+3k=0$……②

② − ①得 $6a+6=0$　∴　$a=-1$，代入①得 $2+3k=0$　∴　$k=-\dfrac{2}{3}$

4. 在複數平面上表示三複數$-2+i$，$4+i$，$2-3i$的三個點A，B，C，則△ABC之垂心所表的複數為__________。

【解答】$2-i$

【詳解】

三複數$-2+i$，$4+i$，$2-3i$ 的三個點 A，B，$C\Rightarrow A(-2，1)$，$B(4，1)$，$C(2，-3)$

∵　$\overline{BC}$ 之斜率為$\dfrac{1-(-3)}{4-2}=2$

∴　過 A 點的高所在直線為 $y-1=-\dfrac{1}{2}(x+2)\quad\Rightarrow\quad x+2y=0$……①

且　$\overline{AC}$ 之斜率為$\dfrac{1-(-3)}{-2-2}=-1$

∴　過 B 點的高所在直線為 $y-1=1\cdot(x-4)\quad\Rightarrow\quad x-y-3=0$……②

① − ②得 $y=-1$，代入① $x=2$，得垂心 H 之坐標為$(2，-1)$

5. 設$z\in C$，解方程式 $|z|+z=8-4i$得$z=$__________。

【解答】$3-4i$

【詳解】

令 $z=a+bi$（a，$b\in R$），則$\sqrt{a^2+b^2}+a+bi=8-4i$

$\Rightarrow\quad b=-4$ 且$\sqrt{a^2+b^2}+a=8\quad\Rightarrow\quad a=3\quad\therefore\quad z=3-4i$

6. 若$(2-i)x^2-3(1-i)x-2(1+i)=0$ 有實數解，求此實根_______及另一虛根為________。

【解答】2；$-\dfrac{1}{5}-\dfrac{3}{5}i$

【詳解】

設方程式之實根為α，則$(2-i)\alpha^2-3(1-i)\alpha-2(1+i)=0$

$\Rightarrow\quad(2\alpha^2-3\alpha-2)+(-\alpha^2+3\alpha-2)i=0$

$$\Rightarrow\quad\begin{cases}2\alpha^2-3\alpha-2=0\\ \alpha^2-3\alpha+2=0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}(2\alpha+1)(\alpha-2)=0\\ (\alpha-1)(\alpha-2)=0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}\alpha=-\dfrac{1}{2}\text{或}2\\ \alpha=1\text{或}2\end{cases}\quad\therefore\quad\alpha=2$$

設另一根為β，則 $2+\beta=\dfrac{3(1-i)}{2-i}=\dfrac{3}{5}(3-i)\quad\Rightarrow\quad\beta=\dfrac{3}{5}(3-i)-2=\dfrac{-1-3i}{5}$

7. x，$y\in R$，若$(x+yi)^2=-8-6i$，則數對$(x，y)=$__________。

【解答】$(1，-3)$或$(-1，3)$

【詳解】

$$\because\quad(x+yi)^2=(x^2-y^2)+(2xy)i=-8-6i\quad\therefore\quad\begin{cases}x^2-y^2=-8\\ 2xy=-6\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}x^2-y^2=-8\\ xy=-3\end{cases}$$

且$x^2+y^2=10$　∴　$x^2=1$，$y^2=9$　∴　$x=1$，$y=-3$ 或$x=-1$，$y=3$

8. 設z爲複數，若$z^2-\dfrac{1}{z^2}=2i$，則(1) $z^2=$__________。 (2) $z+\dfrac{1}{z}=$__________。

【解答】(1) i (2) $\pm\sqrt{2}$

【詳解】

(1) $z^2-\dfrac{1}{z^2}=2i \Rightarrow (z^2)^2-2iz^2-1=0 \Rightarrow z^2=\dfrac{2i\pm\sqrt{(-2i)^2+4}}{2}=i$

(2)設$z=a+bi$（a，$b\in R$） $\Rightarrow z^2=(a^2-b^2)+2abi=0+i$

$\begin{cases} a^2-b^2=0 \cdots\cdots ① \\ 2ab=1 \quad \cdots\cdots ② \end{cases}$，又 $a^2+b^2=1$

$\Rightarrow a^2=\dfrac{1}{2}$； $b^2=\dfrac{1}{2} \Rightarrow a=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，且$b=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，即$z=\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i$，$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}i$

(1)若$z=\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i$，則$z+\dfrac{1}{z}=\dfrac{z^2+1}{z}=\dfrac{i+1}{\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1+i)}=\sqrt{2}$

(1)若$z=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}i$，則$z+\dfrac{1}{z}=\dfrac{z^2+1}{z}=\dfrac{i+1}{-\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1+i)}=-\sqrt{2}$

故$z+\dfrac{1}{z}=\pm\sqrt{2}$

9. (1)設$\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，則$(3+\omega)(3+\omega^2)(3+\omega^3)(3+\omega^4)(3+\omega^5)=$__________。

(2)設$\Omega=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$，則$\Omega^{2006}=$__________。

【解答】(1)196 (2) $\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

【詳解】

(1)若$\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，則$\omega^3=1$ 且 $1+\omega+\omega^2=0$

$(3+\omega)(3+\omega^2)(3+\omega^3)(3+\omega^4)(3+\omega^5)$

$=(3+\omega)(3+\omega^2)(3+1)(3+\omega)(3+\omega^2)=4\,[(3+\omega)(3+\omega^2)]^2$

$=4\,[9+3(\omega+\omega^2)+\omega^3]^2=4\,[9+3\times(-1)+1]^2=4\times 49=196$

(2) $\Omega=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2} \Rightarrow \Omega^3=-1$；$\Omega^2=(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2})^2=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

$\Omega^{2006}=(\Omega^3)^{668}\cdot\Omega^2=(-1)^{668}\cdot\Omega^2=\Omega^2=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

10.設m，$k\in Q$，$m\neq 0$，且方程式 $2mx^2-3mx+2x+m+k=0$ 之根爲有理數，則有理數$k=$_ 。

【解答】-1 或 -2

【詳解】

$\because$ 方程式 $2mx^2-(3m-2)x+(m+k)=0$ 之根爲有理數

$\therefore$ 判別式 $(3m-2)^2-4\cdot 2m(m+k)=9m^2-12m+4-8m^2-8mk$爲完全平方式

$=m^2-2(6+4k)m+4$ 爲完全平方式

$\Rightarrow \quad (6+4k)^2-4=0 \quad \Rightarrow \quad (6+4k+2)(6+4k-2)=0$

$\Rightarrow \quad (k+2)(k+1)=0 \quad \therefore \quad k=-1$ 或 $k=-2$

11.設α，β為$x^2-4x+1=0$之二根，則$\sqrt{\alpha^2+1}+\sqrt{\beta^2+1}$之值為__________。

【解答】$2\sqrt{6}$

【詳解】

$\begin{cases}\alpha^2-4\alpha+1=0\\ \beta^2-4\beta+1=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha^2+1=4\alpha\\ \beta^2+1=4\beta\end{cases}$，又$\begin{cases}\alpha+\beta=4\\ \alpha\beta=1\end{cases}$（$\alpha>0$，$\beta>0$）

$\therefore \quad \sqrt{\alpha^2+1}+\sqrt{\beta^2+1}=\sqrt{4\alpha}+\sqrt{4\beta}=2(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})$

$(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=(\alpha+\beta)+2\sqrt{\alpha\beta}=4+2=6 \quad \Rightarrow \quad (\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})=\sqrt{6}$（$\because \quad \alpha>0$，$\beta>0$）

故所求 $=2(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})=2\sqrt{6}$

12.在複數平面上，已知$ABCD$為平行四邊形，若$A(2+i)$，$B(4+2i)$，$C(6+4i)$，$D(a+bi)$，試求$a+b=$__________。

【解答】7

【詳解】

$A(2+i)$，$B(4+2i)$，$C(6+4i)$，$D(a+bi)$

四點在複數平面上之坐標分別為 $A(2，1)$，$B(4，2)$，$C(6，4)$，$D(a，b)$

而 $ABCD$ 為平行四邊形，則$\overline{AC}$與$\overline{BD}$之中點相同，即$\begin{cases}\dfrac{2+6}{2}=\dfrac{4+a}{2}\\ \dfrac{1+4}{2}=\dfrac{2+b}{2}\end{cases}$，得$\begin{cases}a=4\\ b=3\end{cases}$，

所以 $a+b=7$

13. $z=\dfrac{(-1+3i)(3+4i)^2}{(1+2i)^2}$，則 $|z|=$？

【解答】$5\sqrt{10}$

【詳解】

$$|z|=\frac{|(-1+3i)(3+4i)^2|}{|(1+2i)^2|}=\frac{|-1+3i|\cdot|3+4i|^2}{|1+2i|^2}=\frac{\sqrt{1+9}\cdot(\sqrt{3^2+4^2})^2}{1+4}=5\sqrt{10}$$

14. 設z為複數，

(1)若$z^2=16-30i$，則$z=$__________。 (2) $z^2-(1+i)z-(4-8i)=0$之解為________。

【解答】(1) $\pm(5-3i)$ (2)$3-i$，$-2+2i$

【詳解】

(1)設$z=x+yi$，則$(x+yi)^2=16-30i \Rightarrow x^2-y^2+2xyi=16-30i \Rightarrow \begin{cases}x^2-y^2=16\cdots\cdots ①\\ 2xy=-30 \quad \cdots\cdots ②\end{cases}$

又 $|(x+yi)^2|=|16-30i|$；$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{16^2+(-30)^2} \Rightarrow x^2+y^2=34\cdots\cdots ③$

由①③知 $x^2=25 \Rightarrow x=\pm5$；$y^2=9 \Rightarrow y=\pm3$，由②知 x 、y 異號

若$x=5 \Rightarrow y=-3$；若$x=-5 \Rightarrow y=3$；故$z=5-3i$或 $-5+3i$

(2) $z^2-(1+i)z-(4-8i)=0$

$z=\dfrac{(1+i)\pm[(1+i)^2+4(4-8i)\text{的平方根}]}{2}$

$$=\frac{(1+i)\pm[16-30i)\text{的平方根}]}{2}\text{（利用(1)之結果）}=\frac{(1+i)\pm(5-3i)}{2}=3-i\text{或 }-2+2i$$