<table>
<tr><td colspan="6">高雄市明誠中學 高一數學複習測驗　　日期：95.10.05</td></tr>
<tr><td rowspan="2">範圍</td><td rowspan="2">1-4 複數</td><td>班級</td><td>普一　　班</td><td rowspan="2">姓名</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>座號</td><td></td></tr>
</table>

一、選擇題 (每題 5 分)

1. 下列各式何者正確？

(A) $\sqrt{6}=\sqrt{-2}\times\sqrt{-3}$　(B) $\sqrt{-6}=-\sqrt{2}\times\sqrt{3}$　(C) $\sqrt{\dfrac{3}{-2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{-2}}$　(D) $\sqrt{\dfrac{3}{-2}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{-2}}$

【解答】(D)

【詳解】

(A) $\sqrt{-2}\times\sqrt{-3}=\sqrt{2}i\times\sqrt{3}i=\sqrt{6}i^2=-\sqrt{6}$，故 $\sqrt{6}\neq\sqrt{-2}\times\sqrt{-3}$

(B) $\sqrt{-6}=\sqrt{6}i$，$-\sqrt{2}\times\sqrt{3}=-\sqrt{6}$，故 $\sqrt{-6}\neq-\sqrt{2}\times\sqrt{3}$

(C) $\sqrt{\dfrac{3}{-2}}=\sqrt{\dfrac{3}{2}}\times\sqrt{-1}=\sqrt{\dfrac{3}{2}}\,i$，$\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{-2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}i}=\dfrac{\sqrt{3}\cdot i}{\sqrt{2}\cdot i^2}=\dfrac{\sqrt{3}i}{-\sqrt{2}}=-\sqrt{\dfrac{3}{2}}\,i$

(D)由(C)可知 $\sqrt{\dfrac{3}{-2}}=\sqrt{\dfrac{3}{2}}\,i$，$-\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{-2}}=-(-\sqrt{\dfrac{3}{2}}\,i)=\sqrt{\dfrac{3}{2}}\,i$，故 $\sqrt{\dfrac{3}{-2}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{-2}}$

2. 設a，b均為非零的實數，下列何者成立？（其中$i=\sqrt{-1}$）

(A) $\sqrt{a^2}=a$　(B) $\sqrt{-a}=\sqrt{a}\,i$　(C) $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$　(D) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$　(E) $i^{83}=-i$

【解答】(E)

【詳解】

(A) $\because\ \sqrt{a^2}=|a|$　$\therefore\ \sqrt{a^2}=a$不真

(B) $\because$ 當$a<0$時，$\sqrt{a}\,i=(\sqrt{-a}\,i)i=-\sqrt{-a}$　$\therefore\ \sqrt{-a}=\sqrt{a}\,i$不恆真

(C)當$a<0$，$b<0$時，$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$　$\therefore\ \sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$不恆真

(D)當$a>0$，$b<0$時，$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$　$\therefore\ \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$不恆真

(E) $\because\ i^4=1$　$\therefore\ i^{83}=i^3=-i$為真

3. 下列敘述何者正確？

(A)若$z=a+bi$為複數，則b為z之虛部　(B)若$a+bi=0$，則$a=b=0$

(C)若$a^2>b^2$，則$a^2-b^2>0$　(D)若$a^2-b^2>0$，則$a^2>b^2$

【解答】(C)

【詳解】

(A)若$z=a+bi$為複數且a，$b\in R$，則b才為z之虛部，故(A)不正確

(B)若$a+bi=0$ 且a，$b\in R$，則$a=b=0$，故(B)不正確

(C)若$a^2>b^2$，則$a^2-b^2>0$成立，故(C)正確

(D)若$a^2-b^2>0$ 且a^2，$b^2\in R$，則$a^2>b^2$，故(D)不正確

4. (複選)設 a，b，c，$d\in R$，$z\in C$，$\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，則下列何者正確？

(A) $a-bi$ 之虛部為 b　(B) $a+bi=c+di \Leftrightarrow a=c$，$b=d$

(C) $a+b\omega=c+d\omega \Leftrightarrow a=c$，$b=d$　(D) $a+bz=c+dz \Leftrightarrow a=c$，$b=d$

(E)若 $ab>0$，$a+b<0$，則 $a<0$，$b<0$

【解答】(B)(C)(E)

【詳解】

(A) $a-bi=a+(-b)i$ 之虛部爲 $-b$　　(B)恆成立

(C)當ω爲任意虛數時，$a+b\omega=c+d\omega \iff a=c$，$b=d$

(D)必須 z 爲虛數時才成立

(E)已知 a，$b\in R$　$\therefore$　$a+b<0$，$ab>0$，恆得 $a<0$，$b<0$

5. (複選)設α，β，γ爲複數，則下列何者爲真？

(A)若$\alpha+\beta$，$\beta+\gamma$，$\gamma+\alpha\in R$，則α，β，$\gamma\in R$　(B)若$\alpha^2+\beta^2=0$，則$\alpha=0$，$\beta=0$

(C)若$\alpha\cdot\beta=0$，則$\alpha=0$ 或$\beta=0$　(D)若$\alpha\cdot\beta\cdot\gamma\in R$，則$\alpha$，$\beta$，$\gamma\in R$　(E)以上皆非

【解答】(A)(C)

【詳解】

(A)由實數加法乘法封閉性知$\alpha=\frac{1}{2}[(\alpha+\beta)-(\beta+\gamma)+(\gamma+\alpha)]\in R$　$\therefore\alpha$，β，$\gamma\in R$爲真

(B)若$\alpha=1$，$\beta=i$，則$\alpha^2+\beta^2=0$，但$\alpha\neq 0$，$\beta\neq 0$　$\therefore$　(B)不真

(C)若$\alpha=a+bi$，$\beta=c+di$，a，b，c，$d\in R$

若$\alpha\cdot\beta=0$，則$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i=0$　$\Rightarrow$　$ac-bd=0$，$ad+bc=0$

$\therefore$　$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=a^2(c^2+d^2)+b^2(c^2+d^2)=a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2$

$=(a^2c^2-2acbd+b^2d^2)+(a^2d^2+2adbc+b^2c^2)=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2=0+0=0$

$\Rightarrow$　$a^2+b^2=0$ 或$c^2+d^2=0$

$\because$　a，b，c，$d\in R$　$\therefore$　$a=b=0$ 或$c=d=0$，故$\alpha=0$ 或$\beta=0$　$\therefore$　(C)爲真

(D)當$\alpha=i$，$\beta=-i$，$\gamma=1$，則$\alpha\beta\gamma=1\in R$但$\alpha\notin R$　$\therefore$　(D)不真

6. 設α，β爲$x^2+6x+4=0$ 之二根，則$(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=$？

(A) -2　(B) -4　(C) -6　(D) -8　(E) -10

【解答】(E)

【詳解】

$\because\alpha$，β是$x^2+6x+4=0$ 之二根，$\alpha+\beta=-6$，$\alpha\beta=4$，且$b^2-4ac>0\Rightarrow\alpha<0$，$\beta<0$，

故$(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha}\ \sqrt{\beta}=(\alpha+\beta)-2\sqrt{\alpha\beta}=(-6)-2\sqrt{4}=-6-4=-10$

二、填充題(每題 10 分)

1. 化簡$\frac{(3-\sqrt{-16})\cdot(-1+\sqrt{-25})}{2+\sqrt{-9}}$爲標準式得__________。

【解答】$7-i$

【詳解】

$$\frac{(3-\sqrt{-16})\cdot(-1+\sqrt{-25})}{2+\sqrt{-9}}=\frac{(3-4i)(-1+5i)}{2+3i}$$

$$=\frac{(-3+20)+(4+15)i}{2+3i}=\frac{17+19i}{2+3i}=\frac{(17+19i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)}=\frac{(34+57)+(38-51)i}{4+9}=\frac{91-13i}{13}=7-i$$

2. 設a，$b\in R$，$\frac{4-3i}{2-i}=a+bi$，則數對$(a，b)=$__________。

【解答】$(\frac{11}{5}，-\frac{2}{5})$

【詳解】$\dfrac{4-3i}{2-i}=\dfrac{(4-3i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\dfrac{8+3+(4-6)i}{4+1}=\dfrac{11-2i}{5}=\dfrac{11}{5}-\dfrac{2}{5}i=a+bi$，$(a，b)=(\dfrac{11}{5}，-\dfrac{2}{5})$

3. 設x，$y\in R$且$\dfrac{(2+3i)(1-2i)}{x+yi}=1-i$，則(1) $x=$__________。 (2) $y=$__________。

【解答】(1)$\dfrac{9}{2}$ (2)$\dfrac{7}{2}$

【詳解】$x+yi=\dfrac{(2+3i)(1-2i)}{1-i}=\dfrac{(2+3i)(1-2i)(1+i)}{1+1}=\dfrac{(8-i)(1+i)}{2}=\dfrac{9+7i}{2}=\dfrac{9}{2}+\dfrac{7}{2}i$

4. 設$z=3+2i$，$i=\sqrt{-1}$，且$\omega=\dfrac{z-1}{z+1}$，則ω之共軛複數$\overline{\omega}$之虛部爲__________。

【解答】$-\dfrac{1}{5}$

【詳解】

$\because$ $z=3+2i$

$\therefore$ $\omega=\dfrac{z-1}{z+1}=\dfrac{3+2i-1}{3+2i+1}=\dfrac{2+2i}{4+2i}=\dfrac{1+i}{2+i}=\dfrac{(1+i)(2-i)}{4+1}=\dfrac{3+i}{5}\Rightarrow\overline{\omega}=\dfrac{3}{5}-\dfrac{i}{5}$ $\therefore$ 虛部爲 $-\dfrac{1}{5}$

5. x，$y\in R$，若$\dfrac{1+3i}{x+yi}=1+i$，則數對$(x，y)=$__________。

【解答】(2，1)

【詳解】

$\because$ $\dfrac{1+3i}{x+yi}=1+i$ $\therefore$ $x+yi=\dfrac{1+3i}{1+i}=\dfrac{(1+3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{4+2i}{2}=2+i$

$\because$ x，$y\in R$ $\therefore$ $x=2$，$y=1$

5. 設$\overline{(\dfrac{7+2i}{5-3i})}=a+bi$，其中$a$，$b$爲實數，試求有序數對$(a，b)=$__________。

【解答】$(\dfrac{29}{34}，\dfrac{-31}{34})$

【詳解】$\overline{(\dfrac{7+2i}{5-3i})}=\dfrac{\overline{7+2i}}{\overline{5-3i}}=\dfrac{7-2i}{5+3i}=\dfrac{(7-2i)(5-3i)}{(5+3i)(5-3i)}=\dfrac{29-31i}{5^2+3^2}=\dfrac{29}{34}+\dfrac{-31}{34}i$

$\therefore$ $(a，b)=(\dfrac{29}{34}，\dfrac{-31}{34})$

6. (1)化簡$(1-i)^{100}=$__________。 (2) 化簡$(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}})^{100}+(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}})^{100}=$__________。

【解答】(1)-2^{50} (2)-2

【詳解】

(1) $(1-i)^2=1-2i+i^2=-2i$，故 $(1-i)^{100}=[(1-i)^2]^{50}=(-2i)^{50}=2^{50}\cdot i^{50}=2^{50}(i^2)=-2^{50}$

(2)$\because$ $(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}})^2=\dfrac{(1+i)^2}{2}=\dfrac{2i}{2}=i$，同理$(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}})^2=\dfrac{(1-i)^2}{2}=\dfrac{-2i}{2}=-i$

$\therefore$ $(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}})^{100}+(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}})^{100}=i^{50}+(-i)^{50}=i^{50}+i^{50}=2i^{50}=-2$

7. (1) 複數$(\sqrt{2}-i)^4$的虛部爲__________。(2)$(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2})^{60}+(\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2})^{60}=$__________。

【解答】(1)$-4\sqrt{2}$ (2)2

【詳解】

(1) $(\sqrt{2}-i)^2=1-2\sqrt{2}i \quad \Rightarrow \quad (\sqrt{2}-i)^4=[(\sqrt{2}-i)^2]^2=(1-2\sqrt{2}i)^2 \quad =-7-4\sqrt{2}\,i$

(2)設$\alpha=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$，則$\alpha^2=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha^3=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}\cdot(-\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2})=-1$

$\therefore$原式 $=(-\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2})^{60}+(\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2})^{60}$

$=(\alpha^2)^{60}+\alpha^{60}=\alpha^{120}+\alpha^{60}=(\alpha^3)^{40}+(\alpha^3)^{20}=(-1)^{40}+(-1)^{20}=2$

8. 設a，$b\in R$且$[(a+1)-4i]+[5+(b-2)i]=2+5i$，則$\overline{a+bi}=$__________。

【解答】$-4-11i$

【詳解】

$[(a+1)-4i]+[5+(b-2)i]=2+5i \quad \Rightarrow \quad (a+1+5)+(-4+b-2)i=2+5i$

$\Rightarrow \quad (a+6)+(b-6)\,i=2+5i \quad \Rightarrow \quad \begin{cases}a+6=2\\ b-6=5\end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases}a=-4\\ b=11\end{cases}$

$\therefore \quad \overline{a+bi}=\overline{-4+11i}=-4-11i$

9. 設a為實數，若方程式$x^2-(a+i)x+2+2i=0$有一實根，試求a的值為__________。

【解答】3

【詳解】

設實根為α，則$\alpha^2-(a+i)\alpha+2+2i=0 \quad \Rightarrow \quad (\alpha^2-a\alpha+2)+(-\alpha+2)i=0$

解$\begin{cases}\alpha^2-a\alpha+2=0\\ -\alpha+2=0\end{cases}$，得$\begin{cases}a=3\\ \alpha=2\end{cases}$

10.設$i=\sqrt{-1}$，若$1-i$為$x^2-cx+1=0$之一根，則複數$c=$__________。

【解答】$\dfrac{3-i}{2}$

【詳解】

$\because \quad 1-i$為$x^2-cx+1=0$之一根，代入 $\therefore \quad (1-i)^2-c(1-i)+1=0$

$\Rightarrow \quad 1-2i+i^2-c(1-i)+1=0 \quad \Rightarrow \quad c(1-i)=1-2i$

$\Rightarrow \quad c=\dfrac{1-2i}{1-i}=\dfrac{(1-2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{1+i-2i-2i^2}{1-i^2}=\dfrac{1-i+2}{1+1}=\dfrac{3-i}{2}$

11. 設z為複數，若$z^2=5-12i$，則$z=$__________。

【解答】$3-2i$或$-3+2i$

【詳解】

設$z=x+yi$，x，$y\in R$，則$(x+yi)^2=5-12i\Rightarrow x^2-y^2+2xyi=5-12i\Rightarrow$ $\begin{cases}x^2-y^2=5\cdots\cdots①\\ 2xy=-12\ \cdots\cdots②\end{cases}$

又 $|(x+yi)^2|=|5-12i|$，$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{5^2+12^2}\Rightarrow x^2+y^2=13\cdots\cdots③$

由①③$\Rightarrow \quad x^2=9 \quad \Rightarrow \quad x=\pm3$；$y=\pm2$，由②知 x 、y 異號

若$x=3\Rightarrow \quad y=-2$；若$x=-3\Rightarrow \quad y=2$；故 $z=3-2i$或 $z=-3+2i$

12.設z為複數，

(1)若$z^2=16-30i$，則$z=$__________。 (2) $z^2-(1+i)z-(4-8i)=0$之解為________。

【解答】(1) $\pm(5-3i)$ (2)$3-i$，$-2+2i$

【詳解】

(1)設$z=x+yi$，則$(x+yi)^2=16-30i \Rightarrow x^2-y^2+2xyi=16-30i \Rightarrow \begin{cases} x^2-y^2=16 \cdots\cdots ① \\ 2xy=-30 \quad \cdots\cdots ② \end{cases}$

又 $|(x+yi)^2|=|16-30i|$；$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{16^2+(-30)^2} \Rightarrow x^2+y^2=34 \cdots\cdots ③$

由①③知 $x^2=25 \Rightarrow x=\pm 5$；$y^2=9 \Rightarrow y=\pm 3$，由②知 x 、y 異號

若$x=5 \Rightarrow y=-3$；若$x=-5 \Rightarrow y=3$；故$z=5-3i$或 $-5+3i$

(2) $z^2-(1+i)z-(4-8i)=0$

$$z=\frac{(1+i)\pm[(1+i)^2+4(4-8i)\text{的平方根}]}{2}$$

$$=\frac{(1+i)\pm[16-30i)\text{的平方根}]}{2}\text{（利用(1)之結果）}=\frac{(1+i)\pm(5-3i)}{2}=3-i\text{或 }-2+2i$$