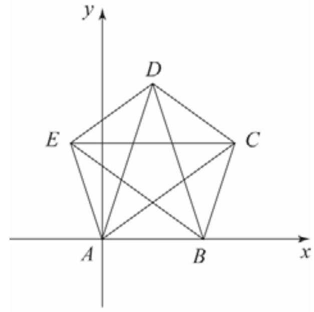
高雄市明誠中學 高一數學複習測驗					日期：95.10.05
範圍	1-3 直線	班級	普一　　班	姓名	
		座號			

一、選擇題 (每題 5 分)



1、(C) 如圖，正五邊形 $ABCDE$ 有 5 條對角線，其中何者斜率最小？ (A) $\overline{AC}$ (B) $\overline{AD}$ (C) $\overline{BD}$ (D) $\overline{BE}$ (E) $\overline{CE}$

【詳解】：斜率最小者爲 $\overline{BD}$

2、(D) 若 $a<0$，$b>0$，則下列何點必在第二象限？ (A) $(a,a-b)$ (B) $(ab,a+b)$ (C) $(a^2+b^2,a-b)$ (D) $(a-b,b-a)$ (E) (a^2-b^2,ab)

【詳解】：(A)（╳）：$\because a<0, b>0$, $\therefore a-b<0$，$\therefore (a,a-b)\in$第三象限。

(B)（╳）：$\because a<0, b>0$, $\therefore ab<0$，$a+b$ 不確定，$\therefore (ab,a+b)$ 不確定。

(C)（╳）：$(a^2+b^2,a-b)\in$第四象限。

(D)（○）：$\because a<0, b>0$, $\therefore a-b<0, b-a>0$，$\therefore (a-b,b-a)\in$第二象限。

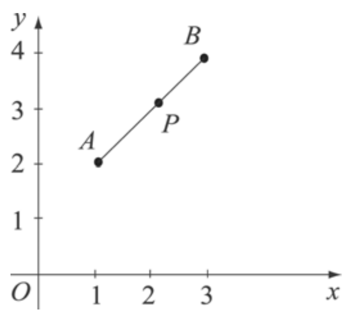
(E)（╳）：$\because a<0, b>0$，$\therefore a^2-b^2$ 不確定，$\therefore (a^2-b^2,ab)$ 不確定。

故答案爲(D)。

3、(A) 設 $P(x,y)$爲坐標平面上一點，且滿足

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}+\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}=\sqrt{(3-1)^2+(4-2)^2}$$

那麼 P 點的位置在哪裡？ (A)第一象限 (B)第二象限 (C)第三象限 (D)第四象限 (E)x 軸或 y 軸上



【詳解】：設 $A(1, 2), B(3, 4), P(x, y)$，則

$\overline{AP}=\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}$ ；

$\overline{BP}=\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}$

$\overline{AB}=\sqrt{(3-1)^2+(4-2)^2}$ ，

依題意 $\overline{AP}+\overline{PB}=\overline{AB}$ ，P 必落在 $\overline{AB}$ 之間，因此，P 必在第一象限。

4、(A) 設 $ab>0,\ ac<0$則直線 $ax+by=c$ 不通過(A)第一 (B)第二 (C)第三 (D)第四 象限

【詳解】：

$ax+by=c$

x	$\frac{c}{a}$	0
y	0	$\frac{c}{b}$

$\because ab>0,\ ac<0\ \therefore \frac{c}{a}<0,\ \frac{c}{b}<0$ 不通過第一象限。

二、填充題：(每題 10 分)

1. 過 $2x-3y=5$ 與$x+2y=1$ 交點且過點(3，1)之直線爲__________。

【解答】$5x-4y=11$

【詳解】

設所求直線 L：$(2x-3y-5)+k(x+2y-1)=0$

$(3，1)$代入 L $\Rightarrow$ $(-2)+4k=0$ $\Rightarrow$ $k=\dfrac{1}{2}$

則 L：$(2x-3y-5)+\dfrac{1}{2}(x+2y-1)=0$，即 L：$5x-4y=11$

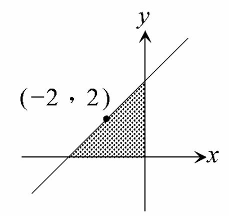
※2.設直線L過$(-2，2)$且與兩軸在第二象限所圍成的三角形中面積最小，求L之方程式為 ______________。

【解答】$x-y+4=0$

【詳解】

設 L：$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$（其中 $a<0$，$b>0$），$\because$ $(-2，2)\in L$ $\therefore$ $\dfrac{-2}{a}+\dfrac{2}{b}=1$

由算幾不等式$\dfrac{\frac{-2}{a}+\frac{2}{b}}{2}\geq\sqrt{\dfrac{-2}{a}\cdot\dfrac{2}{b}}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{1}{4}\geq\dfrac{4}{-ab}$，得$\dfrac{1}{2}|ab|=\dfrac{-1}{2}ab\geq 8$



當$\dfrac{-2}{a}=\dfrac{2}{b}=\dfrac{1}{2}$，即 $a=-4$，$b=4$ 時，所圍三角形面積最小

此時 L：$\dfrac{x}{-4}+\dfrac{y}{4}=1$ $\Rightarrow$ $x-y+4=0$

3. 不論k為任何實數，直線L_k：$x+y-11+k(x-y+5)=0$ 恆過一定點P，

※(1)此定點P的坐標為__________。

(2)如果直線L_k與y軸平行，則$k=$ __________。

(3)如果三直線：L_k，x軸及$y=x$不能圍成一三角形，則k可能值為__________。

【解答】(1) $(3，8)$ (2) 1 (3)$\dfrac{11}{5}$，-1

【詳解】

(1) L_k：$x+y-11+k(x-y+5)=0$ 恆成立，則$\begin{cases}x+y-11=0\\x-y+5=0\end{cases}$，得$\begin{cases}x=3\\y=8\end{cases}$，定點$P(3，8)$

(2) L_k：$(k+1)x+(1-k)y+(5k-11)=0$，若L_k // y軸，則斜率$\dfrac{k+1}{k-1}$不存在(分母為 0)，

得$k=1$

(3) L_k，x軸，$y=x$三直線之斜率分別為$\dfrac{k+1}{k-1}$，0，1

①若L_k // x軸，則$k+1=0$，得$k=-1$

②若L_k // $y=x$，則$\dfrac{k+1}{k-1}=1$ $\Rightarrow$ 無解

③若L_k通過x軸及$y=x$之交點$(0，0)$，則$k=\dfrac{11}{5}$，三直線交一點，不能構成三角形

由①，②，③可知$k=-1$，$\dfrac{11}{5}$時，L_k，x軸及$y=x$不能圍成一三角形

4. 已知$A(5，2)$，$B(1，-2)$，$C(1，-4)$，求過B點且將$\triangle ABC$的面積等分的直線方程式為__。（以$ax+by+c=0$ 之形式表之）

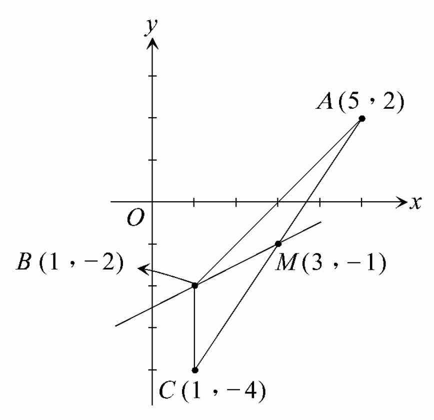
【解答】$x-2y-5=0$

【詳解】

$\because$ 過 B 點將 $\triangle ABC$ 的面積等分的直線必過 $\overline{AC}$ 之中點

$M(\frac{1+5}{2}，\frac{-4+2}{2})=M(3，-1)$，

$\overleftrightarrow{BM}$ 之方程式爲 $y+2=\frac{-1+2}{3-1}(x-1)\Rightarrow x-2y-5=0$



5. 設三直線L_1：$x-2y+3=0$，L_2：$2x+3y=0$，
L_3：$ax-y-1=0$，若L_1，L_2，L_3不能圍成一三角形，則a值爲___________________。

【解答】$\frac{1}{2}$ 或 $-\frac{2}{3}$ 或 $-\frac{13}{9}$

【詳解】

L_1，L_2，L_3不能圍成一三角形之情形有

(1) $L_1 // L_3$：$\frac{1}{2}=a$　(2) $L_2 // L_3$：$-\frac{2}{3}=a$

(3) L_1，L_2，L_3共點：（L_1與L_2之交點在直線L_3上）

解$\begin{cases}x-2y+3=0\\2x+3y=0\end{cases}$得$x=-\frac{9}{7}$，$y=\frac{6}{7}$　$\therefore$　L_3過點$(-\frac{9}{7}，\frac{6}{7})$

$\Rightarrow$　$a(-\frac{9}{7})-\frac{6}{7}-1=0$　$\therefore$　$a=-\frac{13}{9}$

6. 若直線L的斜率爲$\frac{3}{5}$，且和兩坐標軸所圍成的三角形面積爲 30，若L不經過第四象限，得方程式爲$ax+by+30=0$，試求序對$(a，b)$之值爲__________。

【解答】$(3，-5)$

【詳解】

設直線 L：$3x-5y+k=0$，x 截距 $=\frac{-k}{3}$，y 截距 $=\frac{k}{5}$

$30=\frac{1}{2}|\frac{-k}{3}\times\frac{k}{5}|$　$\Rightarrow$　$k=30$ 或 $k=-30$（不合，因 L 不過第四象限）

故 L：$3x-5y+30=0$，即序對$(a，b)=(3，-5)$

$\Rightarrow$　$(3m-5)^2(m^2-1)=0$　$\Rightarrow$　$(3m-5)^2(m+1)(m-1)=0$　$\Rightarrow$　$m=\frac{5}{3}$，1，-1

當$m=\frac{5}{3}$時，直線爲$y=\frac{5}{3}x$過原點不合

當$m=1$ 時，直線爲$\frac{x}{-2}+\frac{y}{2}=1$；

當$m=-1$ 時，直線爲$\frac{x}{8}+\frac{y}{8}=1$

7. 已知$A(2，-2)$，$B(1，1)$，$C(3，5)$，

(1)過A，B兩點之直線方程式爲__________。

(2)過C點且x截距與y截距的絕對值相等，而不過原點之直線方程式爲__________。

(3)$\triangle ABC$之外心坐標爲__________。

【解答】(1) $3x+y-4=0$　(2) $\frac{x}{-2}+\frac{y}{2}=1$ 或 $\frac{x}{8}+\frac{y}{8}=1$　(3) $(6，1)$

【詳解】$A(2，-2)，B(1，1)，C(3，5)$

(1)過A，B兩點之直線方程式爲$y-1=\dfrac{-2-1}{2-1}(x-1)$，即 $3x+y-4=0$

(2)設此直線方程式爲$y-5=m(x-3) \Rightarrow mx-y=3m-5 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y=0 \Rightarrow x=\dfrac{3m-5}{m}, \\ x=0 \Rightarrow y=-(3m-5), \end{cases}$

$\therefore \quad \left|\dfrac{3m-5}{m}\right|=|-(3m-5)|$　兩邊平方$\Rightarrow \quad \left(\dfrac{3m-5}{m}\right)^2=(3m-5)^2$

$\Rightarrow \quad (3m-5)^2(m^2-1)=0 \quad \Rightarrow \quad (3m-5)^2(m+1)(m-1)=0 \quad \Rightarrow \quad m=\dfrac{5}{3}，1，\ -1$

當$m=\dfrac{5}{3}$時，直線爲$y=\dfrac{5}{3}x$過原點不合

當$m=1$時，直線爲$\dfrac{x}{-2}+\dfrac{y}{2}=1$；當$m=-1$時，直線爲$\dfrac{x}{8}+\dfrac{y}{8}=1$

(3)設$P(x，y)$爲$\triangle ABC$之外心，則$\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$

① $\overline{PA}=\overline{PB} \quad \Rightarrow \quad \overline{PA}^2=\overline{PB}^2 \Rightarrow \quad (x-2)^2+(y+2)^2=(x-1)^2+(y-1)^2 \quad \Rightarrow \quad x-3y=3$

② $\overline{PB}=\overline{PC} \quad \Rightarrow \quad \overline{PB}^2=\overline{PC}^2 \Rightarrow \quad (x-1)^2+(y-1)^2=(x-3)^2+(y-5)^2 \quad \Rightarrow \quad x+2y=8$

由①、②得$x=6$，$y=1$　$\therefore$　$\triangle ABC$之外心坐標爲$(6，1)$

8. L爲過$A(2，1)$且與$L_1：2x-y=0$，$L_2：2x+y=0$各交於P，Q之直線，若A爲$\overline{PQ}$的中點，則L之方程式爲__________。

【解答】$y=8x-15$

【詳解】

令$P(a，2a)$，則Q可由中點公式得$(4-a，2-2a)$，又Q在L_2上

$\therefore \quad 2(4-a)+(2-2a)=0 \quad \Rightarrow \quad a=\dfrac{5}{2} \quad \Rightarrow \quad P(\dfrac{5}{2}，5)，Q(\dfrac{3}{2}，-3)$，則$L：y=8x-15$

※9.設$\triangle ABC$之三頂點爲$A(3，\dfrac{1}{2})$，$B(-1，1)$，$C(1，-3)$，若直線$L：mx-y-2m+3=0$與$\triangle ABC$相交，則m之範圍爲__________。

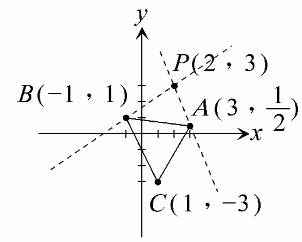
【解答】$m \le \dfrac{-5}{2}$ 或 $m \ge \dfrac{2}{3}$

【詳解】

$L：m(x-2)-(y-3)=0$，解$\begin{cases} x-2=0 \\ y-3=0 \end{cases}$，得$\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$，表$L$恆過定點$P(2，3)$

$\overleftrightarrow{PA}$之斜率$m_1=\dfrac{-5}{2}$，$\overleftrightarrow{PB}$之斜率$m_2=\dfrac{2}{3}$，且L之斜率爲m

當$m \le \dfrac{-5}{2}$或$m \ge \dfrac{2}{3}$時，L與$\triangle ABC$相交



※10.設$L：mx-2y+3=0$與$\triangle ABC$之三邊所在的直線方程式分別爲

$L_1：2x+y-2=0$，$L_2：y=0$，$L_3：x-y+1=0$，

(1) $\forall m \in R$，直線L恆過何定點？

(2)若直線L與$\triangle ABC$有交點，求m值範圍？

【解答】(1) $(0，\dfrac{3}{2})$　(2) $m \le -1$ 或 $m \ge 3$

【詳解】

(1) L：$(y-\frac{3}{2})=\frac{m}{2}(x-0)$恆過$P(0，\frac{3}{2})$

(2)$\because$ $m_{PA}=-\frac{1}{2}$；$m_{PB}=\frac{3}{2}$又$m_L=\frac{m}{2}$；$A(\frac{1}{3}，\frac{4}{3})$

若L與$\triangle ABC$有交點 $\Leftrightarrow$ $\frac{m}{2}\le-\frac{1}{2}$或$\frac{m}{2}\ge\frac{3}{2}$ $\Leftrightarrow$ $m\le-1$或$m\ge3$

11.若直線 L 通過點 $A(2，3)$，且與兩軸在第一象限所圍成的三角形面積為 12，試求直線 L 的方程式。

【解答】$y=-\frac{3}{2}(x-2)+3$

【詳解】

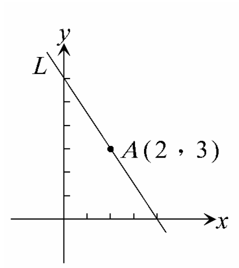
設直線L方程式爲$y-3=m(x-2)$，則L交兩軸於$B(0，-2m+3)$，$C(\frac{-3}{m}+2，0)$兩點

$\therefore$ $\frac{1}{2}(-2m+3)(\frac{-3}{m}+2)=12$

$\Rightarrow$ $(-2m+3)(-3+2m)=24m$ $\Rightarrow$ $4m^2+12m+9=0$

$\Rightarrow$ $(2m+3)^2=0$ $\Rightarrow$ $m=-\frac{3}{2}$

故直線L的方程式爲$y=-\frac{3}{2}(x-2)+3$



12.設 $A(3，-2)$，$B(1，2)$，$C(2，a)$，若$\triangle ABC$ 爲直角三角形，則 $a=$？

【解答】$\pm\frac{5}{2}$，$\pm\sqrt{5}$

【詳解】

三邊所在之直線的斜率分別爲$m_{AB}=-2$，$m_{BC}=(a-2)$，$m_{AC}=-(a+2)$

(1)若$\angle A=90°$，則$m_{AB}\cdot m_{AC}=(-2)\cdot(-a-2)=-1$，$a=\frac{-5}{2}$

(2)若$\angle B=90°$，則$m_{AB}\cdot m_{BC}=(-2)\cdot(a-2)=-1$，$a=\frac{5}{2}$

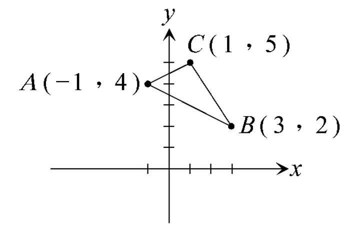
(3)若$\angle C=90°$，則$m_{AC}\cdot m_{BC}=(-a-2)\cdot(a-2)=-1$，$a=\pm\sqrt{5}$

$\therefore$ $a=\pm\frac{5}{2}$，$\pm\sqrt{5}$

13.設 $A(-1，4)$，$B(3，2)$，$C(1，5)$，求$\triangle ABC$ 的重心，外心與垂心。

【解答】重心$(1，\frac{11}{3})$，外心$(\frac{7}{8}，\frac{11}{4})$，垂心$(\frac{5}{4}，\frac{11}{2})$

【詳解】



(1)重心 $=(\frac{-1+3+1}{3}，\frac{4+2+5}{3})=(1，\frac{11}{3})$

(2)設L_1，L_2分別爲$\overline{AB}$，$\overline{BC}$邊上之中垂線

則$\begin{cases}L_1：y-3=2(x-1)\\ L_2：y-\frac{7}{2}=\frac{2}{3}(x-2)\end{cases}$，解$L_1$，$L_2$之交點，得外心$(\frac{7}{8}，\frac{11}{4})$

(3)設ℓ_1，ℓ_2分別爲$\overline{AB}$，$\overline{BC}$邊上之高

則$\begin{cases} L_1：y-5=2(x-1) \\ L_2：y-4=\dfrac{2}{3}(x+1) \end{cases}$，解$\ell_1$，$\ell_2$之交點，得垂心$(\dfrac{5}{4}，\dfrac{11}{2})$

14.過點(4，−4)且與兩軸所圍之三角形面積為 4 之直線方程式為何？

【解答】$\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{4}=1$ 或 $\dfrac{x}{-4}+\dfrac{y}{-2}=1$

【詳解】

設x截距a，y截距b $\Rightarrow$ $L：\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$，$a\neq 0$，$b\neq 0$

$\because$ 過(4，−4) $\therefore$ $\dfrac{4}{a}-\dfrac{4}{b}=1$ $\Rightarrow$ $\dfrac{4b-4a}{ab}=1$ $\Rightarrow$ $4b-4a=ab$……①

$\because$ 與兩軸所圍三角形面積為 4 $\therefore$ $4=\dfrac{1}{2}|ab|$ $\Rightarrow$ $ab=\pm 8$……②

(1)當$ab=8$，解①，②得 $4b-4a=8$ $\Rightarrow$ $b-a=2$，$b=2+a$ $\therefore$ $ab=a(2+a)=8$

$\Rightarrow a^2+2a-8=0$，$(a+4)(a-2)=0$ $\Rightarrow$ $a=2$ 或 -4，$\therefore(a，b)=(2，4)$或$(-4，-2)$

(2)當$ab=-8$，解①，②得 $4b-4a=-8$ $\Rightarrow$ $b-a=-2$，$b=-2+a$

$\therefore$ $ab=a(-2+a)=-8$ $\Rightarrow$ $a^2-2a+8=0$，a無實數解（$\because$ $(-2)^2-4\cdot 1\cdot 8<0$）

由(1)，(2)知$L：\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{4}=1$ 或 $\dfrac{x}{-4}+\dfrac{y}{-2}=1$

※15.設 $A(2，-1)$，$B(4，3)$，而 P 是直線 $L：x+y+1=0$ 的動點，

求(1) $\overline{PA}+\overline{PB}$之最小值。 (2) $|\overline{PA}-\overline{PB}|$ 之最大值。

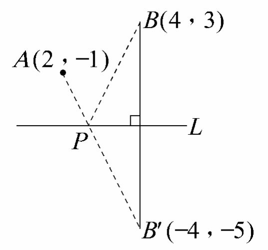
【解答】(1) $2\sqrt{13}$ (2) $2\sqrt{5}$

【詳解】

(1)$\because$ A，B 滿足 $x+y+1>0$ $\therefore$ A，B 在 $L：x+y+1=0$ 之同側

$B(4，3)$對 L 的對稱點為 $B'(-4，-5)$，如圖(一)，$\overline{AB'}$ 交 L 於 P，

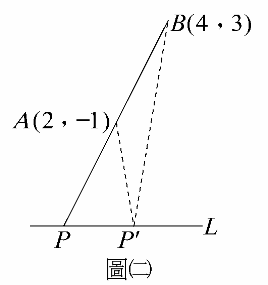
則 $\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{AP}+\overline{PB'}=\overline{AB'}=2\sqrt{13}$ 為最小值



圖(一)

(2)如圖(二) $\because$ $\overline{AB}+\overline{P'A}>\overline{P'B}$ 且 $\overline{AB}+\overline{P'B}>\overline{P'A}$，$\forall P'\in L$，$P'\neq P$

$\therefore$ $|\overline{P'A}-\overline{P'B}|<\overline{AB}$，而 $|\overline{PA}-\overline{PB}|=\overline{AB}$ $\therefore$ $|\overline{PA}-\overline{PB}|=\overline{AB}=2\sqrt{5}$ 為最大值



圖(二)

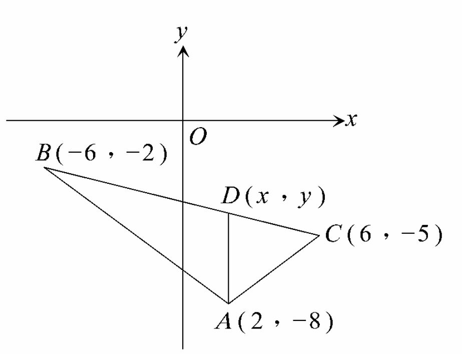
※16.設$\triangle ABC$ 之三頂點為 $A(2，-8)$，$B(-6，-2)$，$C(6，-5)$，而且頂點 A 的分角線交 $\overline{BC}$ 於 D 點，求 D 點的坐標。

【解答】(2，－4)

【詳解】∵ $\overline{AB}=10$，$\overline{AC}=5$，且 $\overline{AD}$ 為∠A 之平分線 ∴ $\dfrac{\overline{BD}}{\overline{CD}}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\dfrac{10}{5}=\dfrac{2}{1}$

令 $D(x，y)$，則由分點公式知$\begin{cases} x=\dfrac{1\times(-6)+2\times 6}{2+1}=2 \\ y=\dfrac{1\times(-2)+2\times(-5)}{2+1}=-4 \end{cases}$

故 D 點的坐標為(2，－4)



17.求點 $P(3，-1)$關於直線 $2x-3y+4=0$ 之對稱點坐標。

【解答】(－1，5)

【詳解】

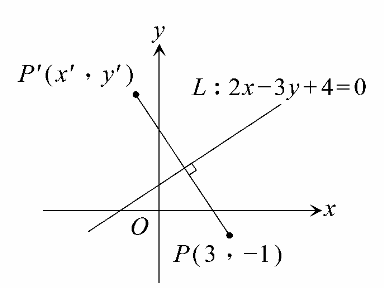
設 $P(3，-1)$對於直線 $L：2x-3y+4=0$ 對稱點 $P'(a，b)$，則直線 L 為 $\overline{PP'}$ 之垂直平分線

$\overline{PP'}\perp L \quad\Rightarrow\quad \dfrac{b+1}{a-3}\times\dfrac{2}{3}=-1 \quad\Rightarrow\quad 3(a-3)+2(b+1)=0 \quad\Rightarrow\quad 3a+2b-7=0$……①

$\overline{PP'}$ 之中點$(\dfrac{3+a}{2}，\dfrac{-1+b}{2})$在 L 上

$\Rightarrow\quad 2(\dfrac{3+a}{2})-3(\dfrac{-1+b}{2})+4=0 \quad\Rightarrow\quad 2a-3b+17=0$……②

①×3＋②×2 得 $13a+13=0$ ∴ $a=-1$ 代入①得 $b=5$，故 $P'(-1，5)$



18.在△ABC 中三邊 $\overline{AB}$，$\overline{BC}$，$\overline{CA}$ 上各有一分點 D，E，F，若 $A(2，-1)$，$B(3，5)$，$C(-1，2)$且 $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{DB}}=\dfrac{\overline{BE}}{\overline{EC}}=\dfrac{\overline{CF}}{\overline{FA}}=\dfrac{2006}{95}$，求△$DEF$ 之重心坐標。

【解答】$(\dfrac{4}{3}，2)$

【詳解】∵ $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{DB}}=\dfrac{\overline{BE}}{\overline{EC}}=\dfrac{\overline{CF}}{\overline{FA}}=\dfrac{2006}{95}\Rightarrow$ △DEF 與△ABC 之重心為同一點

故△DEF 之重心就是△ABC 之重心，即$(\dfrac{2+3-1}{3}，\dfrac{-1+5+2}{3})=(\dfrac{4}{3}，2)$