<table>
<tr><td colspan="6">高雄市明誠中學 高三數學平時測驗　　日期：95.05.03</td></tr>
<tr><td rowspan="2">範圍</td><td rowspan="2">Book6　2-5 曲線下面積</td><td>班級</td><td>普三　　班</td><td rowspan="2">姓名</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>座號</td><td></td></tr>
</table>

一、填充題(每題 10 分)

1. 設$f(x)=x^2$，令R表由曲線$y=f(x)$，直線$y=0$，$x=-2$與$x=2$所圍成的區域，若將區間$[-2，2]$八等分，將區間R分割成 8 個長條，則
下矩形面積之和$L_8=$__________；上矩形面積之和$U_8=$__________。

【解答】$\dfrac{7}{2}$，$\dfrac{15}{2}$

【詳解】

將閉區間$[-2，2]$八等分，則其分割點依次為 $-2，-\dfrac{3}{2}，-1，-\dfrac{1}{2}，0，\dfrac{1}{2}，1，\dfrac{3}{2}，2$

過分割點作x軸的垂直線，將區域分割成八個長條

又函數$f(x)=x^2$，在$[-2，0]$是嚴格遞減，而在$[0，2]$是嚴格遞增。

下和$L_8=\dfrac{1}{2}[f(-\dfrac{3}{2})+f(-1)+f(-\dfrac{1}{2})+f(0)+f(0)+f(\dfrac{1}{2})+f(1)+f(\dfrac{3}{2})]$

$=\dfrac{1}{2}(\dfrac{9}{4}+1+\dfrac{1}{4}+0+0+\dfrac{1}{4}+1+\dfrac{9}{4})=\dfrac{7}{2}$

上和 $U_8=\dfrac{1}{2}[f(-2)+f(-\dfrac{3}{2})+f(-1)+f(-\dfrac{1}{2})+f(\dfrac{1}{2})+f(1)+f(\dfrac{3}{2})+f(2)]$

$=\dfrac{1}{2}(4+\dfrac{9}{4}+1+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}+1+\dfrac{9}{4}+4)=\dfrac{15}{2}$

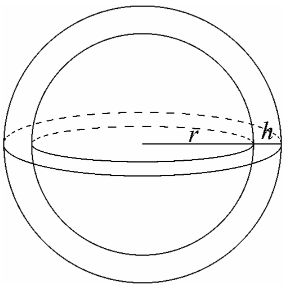
2. 已知半徑r之球面體積為$\dfrac{4}{3}\pi r^3$，π 為圓周率，則此球之表面積為__________。

【解答】$4\pi r^2$

【詳解】

A為以$r+h$及r為半徑之二球體之間的「球殼」之(體積÷厚度)的極限值

如下圖，球表面積$A=\lim\limits_{h\to 0}[\dfrac{4}{3}\pi(r+h)^3-\dfrac{4}{3}\pi r^3]\dfrac{1}{h}$



$\therefore\quad A=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{4}{3}\pi(3r^2h+3rh^2+h^3)\dfrac{1}{h}=\dfrac{4}{3}\pi(3r^2+3r\cdot 0+0^2)=4\pi r^2$

3. 設由直線 $y=\dfrac{1}{2}x$，直線$y=0$，$x=0$及$x=4$所圍成的區域為R。

(1)將點$(0，0)$至$(4，0)$間的線段分成 10 等分，過各分割點作x軸的垂直線，將區域R分割成 10 個長條，則其上和為__________，下和為__________。

(2)承(1)，將點(0，0)至(4，0)間的線段分成n等分，令下和為L_n，上和為U_n。若欲使$|U_n-L_n|<10^{-2}$恆成立，則最小自然數n之值為＿＿＿＿＿。

【解答】(1) $\frac{22}{5}$；$\frac{18}{5}$　(2) 801

【詳解】

(1)閉區間[0，4]十等分割點依次為 0，$\frac{2}{5}$，$\frac{4}{5}$，$\frac{6}{5}$，$\frac{8}{5}$，2，$\frac{12}{5}$，$\frac{14}{5}$，$\frac{16}{5}$，$\frac{18}{5}$，4

且 $y=\frac{1}{2}x$ 在區間[0，4]為嚴格遞增，

上和為U_{10}

$=\frac{2}{5}(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{5}+\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot\frac{12}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{14}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{16}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{18}{5}+\frac{1}{2}\cdot 4)=\frac{22}{5}$

下和為L_{10}

$=\frac{2}{5}(\frac{1}{2}\cdot 0+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{5}+\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot\frac{12}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{14}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{16}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{18}{5})=\frac{18}{5}$

(2)設x_0，x_1，…，x_n分別表區間[0，4]的n等分割點，其中$x_k=\frac{4k}{n}$，$k=0$，1，2，…，n

因為 $y=\frac{1}{2}x$ 在區間[0，4]為嚴格遞增，

上和為$U_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{4}{n}(\frac{1}{2}\cdot\frac{4k}{n})=\frac{4n(n+1)}{n^2}=4(1+\frac{1}{n})$

下和為$L_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{4}{n}[\frac{1}{2}\cdot\frac{4(k-1)}{n}]=\frac{4n(n-1)}{n^2}=4(1-\frac{1}{n})$，因此$|U_n-L_n|<10^{-2}$　$\Rightarrow$　$\frac{8}{n}<\frac{1}{100}$

$\Rightarrow$　$n>800$，故最小自然數$n=801$

4. 設由函數 $f(x)=x^2$ 的圖形，直線$y=0$，$x=2$ 及$x=4$ 所圍成的區域為R。

(1)若將閉區間[2，4]四等分，則下和$L_4=$＿＿＿＿＿。

(2)若將閉區間[2，4]八等分，則上和$U_8=$＿＿＿＿＿。

(3)若將閉區間[2，4]n等分，則下和$L_n=$＿＿＿＿＿，上和$U_n=$＿＿＿＿＿。

(4)由曲線$y=f(x)$，直線$y=0$，$x=2$ 及$x=4$ 所圍成的區域為R的面積為＿＿＿＿＿。

【解答】(1) $L_4=\frac{63}{4}$　(2) $U_8=\frac{323}{16}$　(3) $L_n=\frac{56}{3}-\frac{12}{n}+\frac{4}{3n^2}$，$U_n=\frac{56}{3}+\frac{12}{n}+\frac{4}{3n^2}$　(4) $\frac{56}{3}$

【詳解】

(1)閉區間[2，4]四等分割點依次為 2，$\frac{5}{2}$，3，$\frac{7}{2}$，4 且 $f(x)=x^2$ 在區間[2，4]為嚴格遞增

故下和為 $L_4=\frac{1}{2}[f(2)+f(\frac{5}{2})+f(3)+f(\frac{7}{2})]=\frac{1}{2}(4+\frac{25}{4}+9+\frac{49}{4})=\frac{63}{4}$

(2)閉區間[2，4]八等分割點依次為 2，$\frac{9}{4}$，$\frac{5}{2}$，$\frac{11}{4}$，3，$\frac{13}{4}$，$\frac{7}{2}$，$\frac{15}{4}$，4

且 $f(x)=x^2$ 在區間[2，4]為嚴格遞增，

故上和為$U_8=\frac{1}{4}[f(\frac{9}{4})+f(\frac{5}{2})+f(\frac{11}{4})+f(3)+f(\frac{13}{4})+f(\frac{7}{2})+f(\frac{15}{4})+f(4)]=\frac{323}{16}$

(3)設x_0，x_1，…，x_n表區間[2，4]的n等分割點，其中$x_k=2+\frac{2k}{n}$，$k=0$，1，2，…，n

且 $f(x)=x^2$ 在區間[2，4]為嚴格遞增

故

$$L_n=\sum_{k=1}^{n}f(2+\frac{2(k-1)}{n})\frac{2}{n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{n}[2+\frac{2(k-1)}{n}]^2=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{n}\cdot 4+\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{n}\cdot\frac{8(k-1)}{n}+\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{n}[\frac{2(k-1)}{n}]^2$$

$$=8+8(1-\frac{1}{n})+\frac{4}{3}(1-\frac{1}{n})(2-\frac{1}{n})=\frac{56}{3}-\frac{12}{n}+\frac{4}{3n^2}$$

$$U_n=\sum_{k=1}^{n}f(2+\frac{2k}{n})\frac{2}{n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{n}(2+\frac{2k}{n})^2=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{n}\cdot 4+\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{n}\cdot\frac{8k}{n}+\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{n}(\frac{2k}{n})^2$$

$$=8+8(1+\frac{1}{n})+\frac{4}{3}(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})=\frac{56}{3}+\frac{12}{n}+\frac{4}{3n^2}$$

(4)因爲$\lim\limits_{n\to\infty}L_n=\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{56}{3}-\frac{12}{n}+\frac{4}{3n^2})=\frac{56}{3}$，而$\lim\limits_{n\to\infty}U_n=\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{56}{3}+\frac{12}{n}+\frac{4}{3n^2})=\frac{56}{3}$

故所求區域R的面積爲 $A(R)=\frac{56}{3}$

速解：$\int_2^4 x^2dx=\frac{1}{3}x^3\Big|_2^4=\frac{1}{3}(4^3-2^3)=\frac{56}{3}$

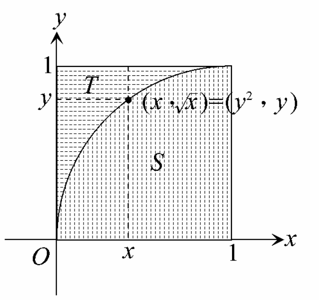
5. $S=\{(x，y)|\ 0\le x\le 1，0\le y\le\sqrt{x}\}$，則$S$的面積爲__________。

【解答】$\frac{2}{3}$

【詳解】

令$T=\{(x，y)|\ 0\le x\le 1，\sqrt{x}\le y\le 1\}$，此時$S+T=1$，又$T=\{(x，y)|\ 0\le y\le 1，0\le x\le y^2\}$

$T=\frac{1}{3}$，如下圖所示　∴　$S=\frac{2}{3}$



速解：$\int_0^1\sqrt{x}\,dx=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}x^{1+\frac{1}{2}}\Big|_0^1=\frac{2}{3}(1^{\frac{3}{2}}-0^{\frac{3}{2}})=\frac{2}{3}$

6. $S=\{(x，y)|\ 0\le x\le 1，0\le y\le x^2\}$，$T=\{(x，y)|\ 0\le x\le 1，x^3\le y\le x^2\}$，則$S$的面積爲__________，$T$的面積爲__________。

【解答】$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{12}$

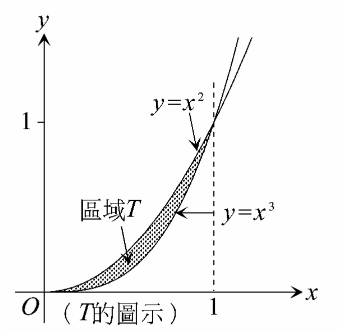
【詳解】

(1) S之下和$a_n=\frac{1}{n}[(\frac{1}{n})^2+(\frac{2}{n})^2+\cdots+(\frac{n-1}{n})^2]$及上和$b_n=\frac{1}{n}[(\frac{1}{n})^2+(\frac{2}{n})^2+\cdots+(\frac{n}{n})^2]$

其中$a_n=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)$，$b_n=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{6}(n+1)n(2n+1)$，$a_n<S<b_n$，

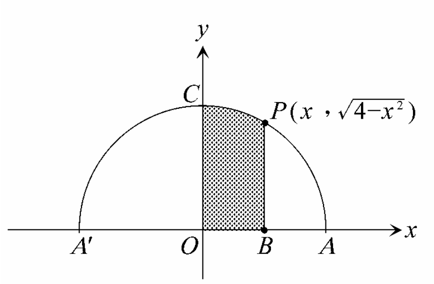
$a_n=\frac{1}{3}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}$，$b_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}$。　$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{3}=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$　∴　$S=\frac{1}{3}$

(2)令$R=\{(x，y)|\ 0\le x\le 1，0\le y\le x^3\}$，同(1)，得$R=\dfrac{1}{4}$，而$T=S-R=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{12}$



速解：$S=\int_0^1 x^3dx=\dfrac{1}{4}x^4\,|_0^1=\dfrac{1}{4}(1^4-0^4)=\dfrac{1}{4}$；$T=\int_0^1(x^2-x^3)dx=(\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{4}x^4)\,|_0^1=(\dfrac{1}{3}\cdot 1^3-\dfrac{1}{4}1^4)=\dfrac{1}{12}$

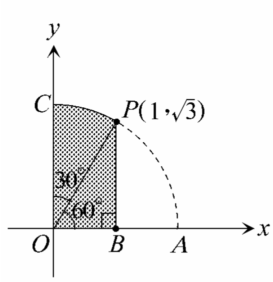
7. 下圖以$\overline{AA'}$爲直徑之半圓上一點$P(x，\sqrt{4-x^2})$，$A(2，0)$，$A'(-2，0)$，$B(x，0)$，則$x=1$時陰影部分面積爲__________；$x=\dfrac{8}{5}$時陰影部分面積爲__________。



【解答】$\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\pi}{3}$，$2\cos^{-1}(\dfrac{3}{5})+\dfrac{24}{25}$

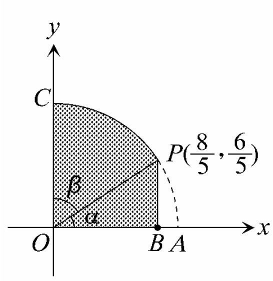
【詳解】

(1)區域$OBPC=\triangle OBP+$ ⌔ $OPC=\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{3}+\dfrac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\pi}{3}$



(2) $\alpha=\cos^{-1}(\dfrac{4}{5})$，$\beta=\cos^{-1}(\dfrac{3}{5})$

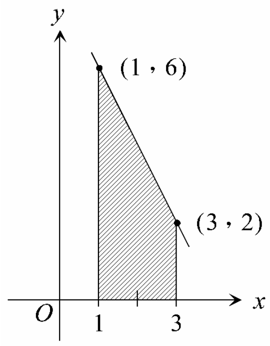
區域$OBPC=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{8}{5}\cdot\dfrac{6}{5}+\dfrac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\cos^{-1}(\dfrac{3}{5})=2\cos^{-1}(\dfrac{3}{5})+\dfrac{24}{25}$



8. 設由$f(x)=-2x+8$，$x=1$，$x=3$及x軸所圍的區域爲R，試求L_n，U_n及R之面積。

【解答】$L_n=8-\dfrac{4}{n}$，$U_n=8+\dfrac{4}{n}$，$A(R)=8$

【詳解】



將[1，3]n等分，其中$I_k=[1+\dfrac{2(k-1)}{n}，1+\dfrac{2k}{n}]$，$1\le k\le n$

$$L_n=\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}f(1+\frac{2k}{n})=\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}[-2(1+\frac{2k}{n})+8]=\frac{2}{n}[\frac{-4}{n}\sum_{k=1}^{n}k+6n]$$

$$=\frac{2}{n}[\frac{-4}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}+6n]$$

$$=\frac{-4(n+1)}{n}+12=8-\frac{4}{n}$$

$$U_n=\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}f(1+\frac{2(k-1)}{n})=\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}[-2(1+\frac{2(k-1)}{n})+8]=\frac{2}{n}[\frac{-4}{n}\sum_{k=1}^{n}(k-1)+6n]$$

$$=\frac{2}{n}[\frac{-4}{n}\cdot\frac{n(n-1)}{2}+6n]=\frac{-4(n-1)}{n}+12=8+\frac{4}{n}$$

$$A(R)=\lim_{n\to\infty}L_n=\lim_{n\to\infty}U_n=8$$

速解：$R=\int_1^3(-2x+8)dx=(-x^2+8x)\big|_1^3=[-3^2+8\cdot3]-[-1^2+8\cdot1]=8$

9.設$y=x^2$，$x=1$，$x=4$及x軸所圍的區域爲R，

(1)將[1，4]三等分，試求L_3與U_3　(2)將[1，4]n等分，試求L_n，U_n及$A(R)$

【解答】(1) $L_3=14$，$U_3=29$　(2) $L_n=21-\dfrac{45}{2n}+\dfrac{9}{2n^2}$，$U_n=21+\dfrac{45}{2n}+\dfrac{9}{2n^2}$，$A(R)=21$

【詳解】

(1)將[1，4]三等分，分點各爲 1，2，3，4

$$L_3=\frac{4-1}{3}(1^2+2^2+3^2)=14，U_3=\frac{4-1}{3}(2^2+3^2+4^2)=29$$

(2)將[1，4]n等分，分點各爲 $1，1+\dfrac{3}{n}，1+\dfrac{2\cdot3}{n}，\cdots，1+\dfrac{k\cdot3}{n}，\cdots，4$

$$L_n=\frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}f(1+\frac{3(k-1)}{n})=\frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}[1+\frac{3(k-1)}{n}]^2=\frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}[1+\frac{6(k-1)}{n}+\frac{9(k-1)^2}{n^2}]$$

$$=\frac{3}{n}[n+\frac{6}{n}\sum_{k=1}^{n}(k-1)+\frac{9}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(k-1)^2]=\frac{3}{n}[n+\frac{6}{n}\cdot\frac{n(n-1)}{2}+\frac{9}{n^2}\cdot\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}]$$

$$=3+\frac{9(n-1)}{n}+\frac{9(n-1)(2n-1)}{2n^2}=21-\frac{45}{2n}+\frac{9}{2n^n}$$

$$U_n=\frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}f(1+\frac{3k}{n})=\frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}(1+\frac{3k}{n})^2=\frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}(1+\frac{6k}{n}+\frac{9k^2}{n^2})=\frac{3}{n}(n+\frac{6}{n}\sum_{k=1}^{n}k+\frac{9}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k^2)$$

$$=\frac{3}{n}[n+\frac{6}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}+\frac{9}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}]=3+\frac{9(n+1)}{n}+\frac{9(n+1)(2n+1)}{2n^2}=21+\frac{45}{2n}+\frac{9}{2n^2}$$

$A(R)=\lim\limits_{x\to\infty}L_n=\lim\limits_{x\to\infty}U_n=21$

速解： $A(R)=\int_1^4 x^2dx=\frac{1}{3}x^3|_1^4=\frac{1}{3}(4^3-1^3)=21$

10.試求由$y=x^3$，$x=1$，$x=3$ 及x軸所圍區域R的面積。

【解答】20

【詳解】

設$f(x)=x^3$，將[1，3]n等分，區間$I_k=[1+\frac{2(k-1)}{n}$ ，$1+\frac{2k}{n}]$，$1\le k\le n$

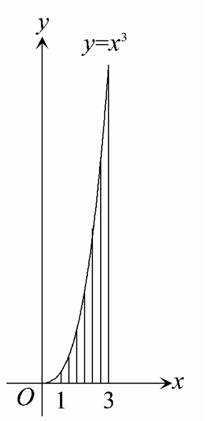
$$T_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{n}f(1+\frac{2k}{n})=\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}f(1+\frac{2k}{n})=\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}(1+\frac{2k}{n})^3$$

$$=\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}[1+3(\frac{2k}{n})+3(\frac{2k}{n})^2+(\frac{2k}{n})^3]=\frac{2}{n}[n+\frac{6}{n}\sum_{k=1}^{n}k+\frac{12}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k^2+\frac{8}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^3]$$

$$=\frac{2}{n}[n+\frac{6}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}+\frac{12}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{8}{n^3}\cdot\frac{n^2(n+1)^2}{4}]$$

$$=\frac{2}{n}[n+3(n+1)+\frac{2(n+1)(2n+1)}{n}+\frac{2(n+1)^2}{n}]=8+\frac{6}{n}+\frac{4(n+1)(2n+1)}{n^2}+\frac{4(n+1)^2}{n^2}$$

$A(R)=\lim\limits_{n\to\infty}T_n=\lim\limits_{n\to\infty}[8+\frac{6}{n}+\frac{4(n+1)(2n+1)}{n^2}+\frac{4(n+1)^2}{n^2}]=8+8+4=20$，所求區域$R$面積爲 20



速解： $R=\int_1^3 x^3dx=\frac{1}{4}x^4|_1^3=\frac{1}{4}(3^4-1^4)=20$

11.設 $f(x)=x^3-x+1$ ，試證：當$0\le x\le 1$時，恆有 $f(x)>0$，

並求曲線 $y=f(x)$與直線 $x=0$，$x=1$ 及 x 軸所圍成區域的面積。

【解答】 $\frac{3}{4}$

【詳解】

(1)求$f(x)$的導函數爲$f'(x)=3x^2-1$，令$f'(x)=0$ 時，得 $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ （$\because$　$0\le x\le 1$）

$f'(x)$的符號變化列表如下：所以$\forall x\in[0，1]$，都使得 $f(x)\ge f(\frac{1}{\sqrt{3}})=1-\frac{2\sqrt{3}}{9}>0$恆成立

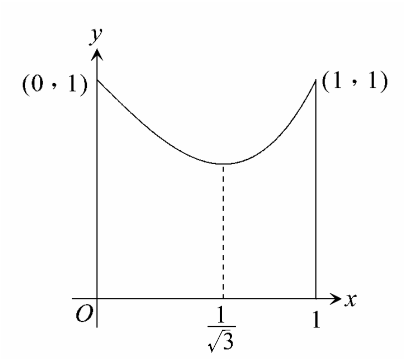
x	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$ 增減	↘		↗
$f(x)$ 極值		$1-\frac{2\sqrt{3}}{9}$	

(2)如圖，設x_0，x_1，…，x_n為區間[0，1]的n等分割點，其中$x_k=\frac{k}{n}$，$k=0$，1，2，…，n

曲線$y=f(x)$與直線$x=0$，$x=1$ 及x軸所圍成區域的面積的左端點矩形法為

$$T_n=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}f(\frac{k}{n})=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}[(\frac{k}{n})^3-(\frac{k}{n})+1]=\frac{1}{n}[\sum_{k=0}^{n-1}(\frac{k}{n})^3-\sum_{k=0}^{n-1}(\frac{k}{n})+\sum_{k=0}^{n-1}1]=\frac{n^2(n-1)^2}{4n^4}-\frac{n(n-1)}{2n^2}+1$$

$=\frac{1}{4}(1-\frac{1}{n})^2-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{n})+1$，因為$\lim\limits_{n\to\infty}T_n=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+1=\frac{3}{4}$，故所求區域的面積為$\frac{3}{4}$



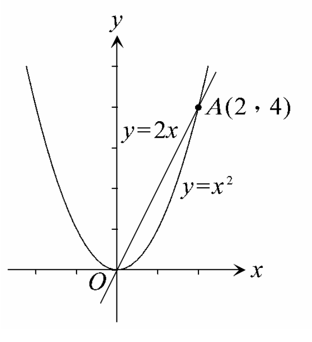
速解：$R=\int_0^1(x^3-x+1)dx=(\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2+x)\Big|_1^3=(\frac{1}{4}\cdot1^4-\frac{1}{2}\cdot1^2+1)=\frac{3}{4}$

12.試求函數$f(x)=2x$與$g(x)=x^2$二圖形所圍成區域的面積。

【解答】$\frac{4}{3}$

【詳解】(1)解方程組$\begin{cases}y=2x\cdots\cdots①\\y=x^2\cdots\cdots②\end{cases}$

由①代入②消去y，得x^2-2x，解之得$x=0$，$x=2$，故兩曲線的交點為(0，0)與(2，4)



(2)設x_0，x_1，…，x_n分別表區間[0，2]的n等分割點，其中$x_k=\frac{2k}{n}$，$k=0$，1，2，…，n

令R表直線$y=2x$，鉛直線$x=0$，$x=2$ 及拋物線$y=x^2$所圍成的區域

對於每個$x\in[0，2]$，都有$2x\geq x^2$，我們利用右端點矩形可得

$$A(R)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}[2\cdot\frac{2k}{n}-(\frac{2k}{n})^2]\frac{2}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n(n+1)}{n^2}-\lim_{n\to\infty}\frac{8n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$

$=\lim\limits_{n\to\infty}4(1+\frac{1}{n})-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{3}(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})=4-\frac{8}{3}=\frac{4}{3}$，故所求區域$R$的面積爲$\frac{4}{3}$

速解：$R=\int_0^2(2x-x^2)dx=(x^2-\frac{1}{3}x^3)\Big|_0^2=(2^2-\frac{1}{3}\cdot 2^3)=\frac{4}{3}$

13.試求拋物線$y=4-x^2$與直線$y=x+2$所圍成封閉區域的面積。

【解答】$\frac{9}{2}$

【詳解】解方程組$\begin{cases}y=4-x^2 & \cdots\cdots① \\ y=x+2 & \cdots\cdots②\end{cases}$

由①②，解得$x=-2$，$x=1$，兩曲線交點爲$A(1，3)$與$B(-2，0)$

設x_0，x_1，…，x_n表區間$[-2，1]$的n等分割點，其中$x_k=-2+\frac{3k}{n}$，$k=0，1，2，\cdots，n$

當$x\in[-2，1]$時，則$4-x^2\geq x+2$，即$2-x-x^2\geq 0$

兩曲線所圍成區域S的面積爲

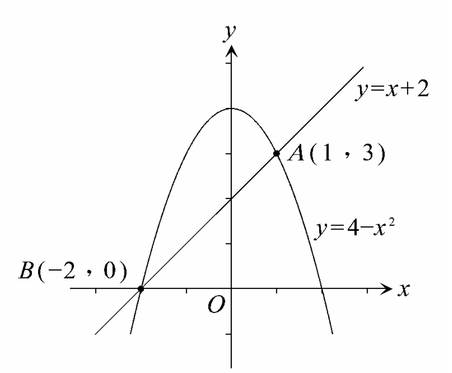
$$A(S)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}[2\cdot\frac{3}{n}-(-2+\frac{3k}{n})\frac{3}{n}-(-2+\frac{3k}{n})^2\frac{3}{n}]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}[2\cdot\frac{3}{n}+(2\cdot\frac{3}{n}-\frac{9k}{n^2})-(4\cdot\frac{3}{n}-\frac{36k}{n^2}+\frac{27k^2}{n^3})]=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(\frac{27k}{n^2}-\frac{27k^2}{n^3})$$

$$=\lim_{n\to\infty}[\frac{27}{n^2}\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-\frac{27}{n^3}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)]$$

$$=\lim_{n\to\infty}[\frac{27}{2}(1+\frac{1}{n})-\frac{27}{6}(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})]$$

$$=\frac{27}{2}-\frac{18}{2}=\frac{9}{2}$$



速解：$A(S)=\int_{-2}^{1}[(4-x^2)-(x+2)]dx=\int_{-2}^{1}(-x^2-x+2)]dx=(-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+2x)\Big|_{-2}^{1}$

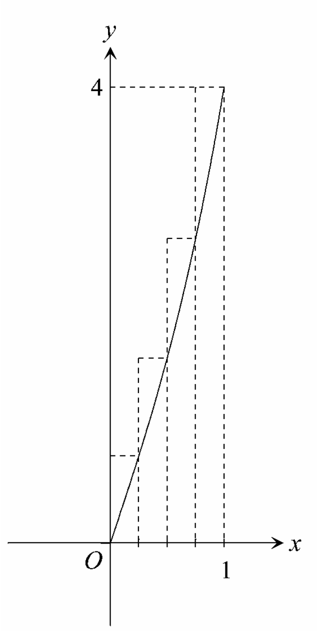
$=(-\frac{1}{3}\cdot 1^3-\frac{1}{2}\cdot 1^2+2)-[-\frac{1}{3}\cdot(-2)^3-\frac{1}{2}\cdot(-2)^2+2(-2)]=\frac{9}{2}$

14.設函數$f(x)=x^3+3x$，欲求$y=f(x)$的圖形下與x軸、y軸及直線$x=1$所圍成的封閉區域面積，我們先將此區域在x軸上的閉區間等分割成 4 段與 8 段，再分別以各段的右端點之函數值爲高，作成長條矩形面積和S_4與S_8，求此封閉區域面積的近似值，

(1)試求S_4與S_8之值　(2)比較S_4與S_8的大小，並說明其逼近的意義

【解答】(1) $S_4=\frac{145}{64}$，$S_8=\frac{513}{256}$　(2) $S_8<S_4$

【詳解】



(1) $f(x)=x^3+3x$時，函數$y=f(x)$的圖形如上，$0\le x\le 1$，將區間[0，1]分割成 4 等分

則分割的端點為 0，$\frac{1}{4}$，$\frac{2}{4}$，$\frac{3}{4}$，1，以各分割區間的右端點為高的長條矩形之面積和

$$S_4=\frac{1}{4}[f(\frac{1}{4})+f(\frac{2}{4})+f(\frac{3}{4})+f(1)]$$
$$=\frac{1}{4}[(\frac{1}{64}+\frac{3}{4})+(\frac{8}{64}+\frac{6}{4})+(\frac{27}{64}+\frac{9}{4})+(\frac{64}{64}+\frac{12}{4})]$$
$$=\frac{1}{4}[\frac{1+8+27+64}{64}+\frac{3+6+9+12}{4}]=\frac{1}{4}(\frac{100}{64}+\frac{30}{4})=\frac{145}{64}$$

(2)將區間[0，1]等分成八分時，其分割的端點為 0，$\frac{1}{8}$，$\frac{2}{8}$，$\frac{3}{8}$，…，$\frac{7}{8}$，1，此時

$$S_8=\frac{1}{8}[f(\frac{1}{8})+f(\frac{2}{8})+\cdots+f(\frac{8}{8})]$$
$$=\frac{1}{8}\sum_{k=1}^{8}[(\frac{k}{8})^3+(\frac{3k}{8})]=\frac{1}{8}[\frac{1}{8^3}\sum_{k=1}^{8}k^3+\frac{3}{8}\sum_{k=1}^{8}k]$$
$$=\frac{1}{8}(\frac{1}{8^3}\times\frac{8^2\times 9^2}{4}+\frac{3}{8}\times\frac{8\times 9}{2})=\frac{1}{8}(\frac{81}{32}+\frac{27}{2})=\frac{513}{256}$$

(3) $S_8-S_4=\frac{513}{256}-\frac{145}{64}=\frac{-67}{256}$，$S_8<S_4$小。$f(x)$在[0，1]內為增函數

以右端點為高的長條矩形區域面積和都比原曲線下的面積大

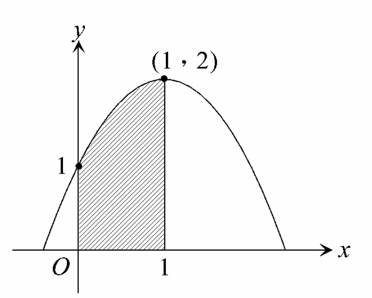
當分割的小區間越多分時，長條矩形的區域面積和與原曲線下的面積越接近，誤差越小

15.設由$f(x)=-x^2+2x+1$，$x=0$，$x=1$ 及x軸所圍的區域為R，試求：

(1) L_n及U_n　(2)若$U_n-L_n<0.01$，則n之最小值

【解答】(1) $L_n=\frac{5}{3}-\frac{1}{2n}-\frac{1}{6n^2}$，$U_n=\frac{5}{3}+\frac{1}{2n}-\frac{1}{6n^2}$　(2) 101

【詳解】



(1)將[0，1]n等分，分點為 0，$\frac{1}{n}$，$\frac{2}{n}$，…，$\frac{k}{n}$，…，1

$$L_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(\frac{k-1}{n})=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}[-(\frac{k-1}{n})^2+2(\frac{k-1}{n})+1]$$

$$=\frac{1}{n}[\frac{-1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(k-1)^2+\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}(k-1)+n]$$

$$=\frac{-1}{n^3}\cdot\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}+\frac{2}{n^2}\cdot\frac{n(n-1)}{2}+1=\frac{5}{3}-\frac{1}{2n}-\frac{1}{6n^2}$$

$$U_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(\frac{k}{n})=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}[-(\frac{k}{n})^2+2(\frac{k}{n})+1]$$

$$=\frac{1}{n}(\frac{-1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k^2+\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}k+n)$$

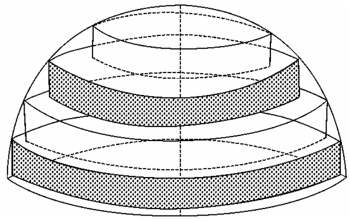
$$=\frac{-n(n+1)(2n+1)}{6n^3}+\frac{2n(n+1)}{2n}+1=\frac{5}{3}+\frac{1}{2n}-\frac{1}{6n^2}$$

(2) $U_n-L_n=(\frac{5}{3}+\frac{1}{2n}-\frac{1}{6n^2})-(\frac{5}{3}-\frac{1}{2n}-\frac{1}{6n^2})=\frac{1}{n}<0.01$，故$n>100$，即$n$至少為 101

16.半徑 1 之半球面積為何？

【解答】$\frac{2\pi}{3}$

【詳解】半球面S的下和a_n及上和b_n，如下圖



$$a_n=\frac{1}{n}\cdot\pi\{[1-(\frac{1}{n})^2]+[1-(\frac{2}{n})^2]+\cdots+[1-(\frac{n-1}{n})^2]\}$$

$$b_n=\frac{1}{n}\cdot\pi\{1+[1-(\frac{1}{n})^2]+[1-(\frac{2}{n})^2]+\cdots+[1-(\frac{n-1}{n})^2]\}$$

$$\begin{cases}a_n=\dfrac{\pi}{n^3}[n^3-(1^2+2^2+\cdots+n^2)]\\ b_n=\dfrac{\pi}{n^3}[n^3-(1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2)]\end{cases}$$

得$a_n=\pi[1-\frac{1}{6}\cdot1\cdot(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})]$，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{2}{3}\pi$

$b_n=\pi[1-\frac{1}{6}(1-\frac{1}{n})\cdot1\cdot(2-\frac{1}{n})]$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\frac{2}{3}\pi$

而$a_n\le S\le b_n$，故$S=\frac{2\pi}{3}$

17.求由$f(x)=x^2-4x+6$，$x=0$，$x=3$ 及x軸所圍區域R的面積。

【解答】9

【詳解】

設$f(x)=x^2-4x+6$，將[0，3]n等分，區間$I_k=[\frac{3(k-1)}{n}$ ， $\frac{3k}{n}]$

則$T_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{n}f(\frac{3k}{n})=\frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}f(\frac{3k}{n})=\frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}[(\frac{3k}{n})^2-4(\frac{3k}{n})+6]=\frac{3}{n}[\frac{9}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k^2-\frac{12}{n}\sum_{k=1}^{n}k+6n]$

$=\frac{3}{n}[\frac{9}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{12}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}+6n]=\frac{9(n+1)(2n+1)}{2n^2}-\frac{18(n+1)}{n}+18$

$A(R)=\lim_{n\to\infty}T_n=\lim_{n\to\infty}\frac{9(n+1)(2n+1)}{2n^2}-\lim_{n\to\infty}\frac{18(n+1)}{n}+18=9-18+18=9$，所求的區域面積為 9

速解：$R=\int_0^3(x^2-4x+6)dx=(\frac{1}{3}x^3-2x^2+6x)|_0^3=(\frac{1}{3}\cdot3^3-2\cdot3^2+6\cdot3)=9$

18.試求由拋物線$y^2=x$與直線$x=1$ 所圍成區域之面積。

【解答】$\frac{4}{3}$

【詳解】

曲線$y^2=x$及直線$x=1$ 旋轉 90°後，其方程式分別為$x^2=y$及$y=1$

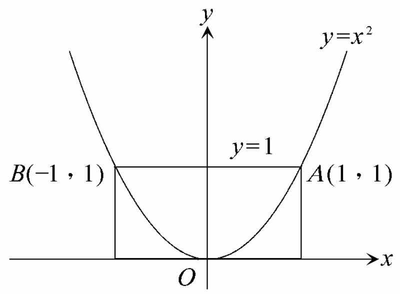
曲線$y^2=x$及直線$x=1$ 圍成區域面積與曲線$y=f(x)=x^2$及直線$y=1$ 圍成區域R面積相等

設x_0，x_1，…，x_n分別表區間[－1，1]的n等分割點，其中$x_k=-1+\frac{2k}{n}$ ，$k=1$，2，…，n

當$x\in[-1$，1]時，則$1\ge x^2$，即$1-x^2\ge0$，區域R的面積為

$A(R)=\lim_{n\to\infty}[\sum_{k=1}^{n}1\cdot\frac{2}{n}-\sum_{k=1}^{n}f(-1+\frac{2k}{n})\frac{2}{n}]=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}[1-(-1+\frac{2k}{n})^2]\frac{2}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(\frac{4k}{n}-\frac{4k^2}{n^2})\frac{2}{n}$

$=8\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(\frac{k}{n^2}-\frac{k^2}{n^3})=8\lim_{n\to\infty}[\frac{1}{2}(1+\frac{1}{n})-\frac{1}{6}(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})]=8(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})=\frac{4}{3}$



速解：$R=\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx=(x-\frac{1}{3}x^3)|_{-1}^{1}=(1-\frac{1}{3}\cdot1^3)-[(-1)-\frac{1}{3}\cdot(-1)^3]=\frac{4}{3}$

19.設由函數$f(x)=x^3$的圖形，直線$x=-\frac{3}{4}$ ，$x=0$ 及$y=0$ 所圍成的區域為R，再將R分成n個等寬的長條，令其下和為L_n，上和為U_n。

(1)試求L_n及U_n之值　(2)試利用L_n及U_n的極限求區域R的面積

【解答】(1) $L_n=\frac{81}{1024}-\frac{81}{512n}+\frac{81}{1024n^2}$ ，$U_n=\frac{81}{1024}+\frac{81}{512n}+\frac{81}{1024n^2}$　(2) $\frac{81}{1024}$

【詳解】

由函數$f(x)=x^3$的圖形，直線$x=-\frac{3}{4}$，$x=0$ 及$y=0$ 所圍成的區域R的面積

與由函數$f(x)=x^3$的圖形，直線$x=\frac{3}{4}$，$x=0$ 及$y=0$ 所圍成的區域S的面積相同

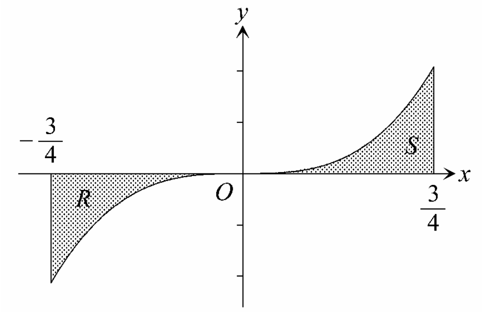
因此求S面積即可

將區間$[0，\frac{3}{4}]$ n等分，其分割點依次爲 0，$\frac{3}{4}\times\frac{1}{n}$，$\frac{3}{4}\times\frac{2}{n}$，…，$\frac{3}{4}\times\frac{n-1}{n}$，$\frac{3}{4}\times\frac{n}{n}$

$f(x)=x^3$在閉區間$[0，\frac{3}{4}]$是絕對遞增函數。下和L_n及上和U_n如下

$$L_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{4n}f(\frac{3(k-1)}{4n})=\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{4n}(\frac{3(k-1)}{4n})^3=\frac{81}{256n^4}\sum_{k=1}^{n}(k-1)^3=\frac{81}{256n^4}\times\frac{1}{4}(n-1)^2n^2$$
$$=\frac{81}{1024}(1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})=\frac{81}{1024}-\frac{81}{512n}+\frac{81}{1024n^2}$$
$$U_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{4n}f(\frac{3k}{4n})=\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{4n}(\frac{3k}{4n})^3=\frac{81}{256n^4}\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{81}{256n^4}\times\frac{1}{4}n^2(n+1)^2=\frac{81}{1024}(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})$$
$$=\frac{81}{1024}+\frac{81}{512n}+\frac{81}{1024n^2}$$

又$\lim\limits_{n\to\infty}L_n=\lim\limits_{n\to\infty}U_n=\frac{81}{1024}$，故所求區域$R$的面積爲$\frac{81}{1024}$

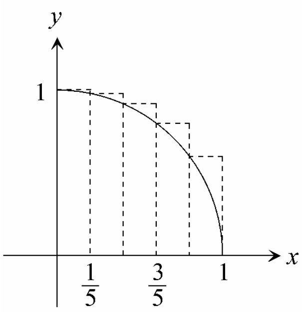


速解：$R=\int_{-\frac{3}{4}}^{0}(0-x^3)dx=(-\frac{1}{4}x^4)\Big|_{-\frac{3}{4}}^{0}=0-[-\frac{1}{4}\cdot(-\frac{3}{4})^4]=\frac{81}{1024}$

20.設函數$f(x)=1-x^2$，若將[0，1]區間分割成五等分，其分割點爲 0，$\frac{1}{5}$，$\frac{2}{5}$，$\frac{3}{5}$，$\frac{4}{5}$，1。以$f(0)$，$f(\frac{1}{5})$，$f(\frac{2}{5})$，$f(\frac{3}{5})$，$f(\frac{4}{5})$爲五等分之分割區間上長條矩形的高，則 5 個長條矩形的面積和爲何？

【解答】$\frac{19}{25}$

【詳解】



$f(x)=1-x^2$，將[0，1]分割成五等分，在拋物線$y=f(x)$的圖形下以$f(0)$，$f(\frac{1}{5})$，$f(\frac{2}{5})$，$f(\frac{3}{5})$，$f(\frac{4}{5})$爲長條矩形的高的長條矩形圖如上

5 個長條矩形面積和 $=\frac{1}{5}[f(0)+f(\frac{1}{5})+f(\frac{2}{5})+f(\frac{3}{5})+f(\frac{4}{5})]$

$=\frac{1}{5}[1+(1-\frac{1}{25})+(1-\frac{4}{25})+(1-\frac{9}{25})+(1-\frac{16}{25})]=\frac{1}{5}(5-\frac{1+4+9+16}{25})=\frac{1}{5}(5-\frac{6}{5})=\frac{19}{25}$

21.設$f(x)=x^2+2x$，將區域[0，1] n等分，其中區間$I_k=[\frac{k-1}{n}，\frac{k}{n}]$內最大值爲$M_k$，最小值爲$m_k$（$k=1，2，\cdots，n$），令$L_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f(m_k)$，$U_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f(M_k)$，

(1)試求由$y=f(x)$，$x=0$，$y=1$ 及x軸所圍區域R的面積。

(2)若$U_n-L_n<0.01$，則自然數n最小值爲何？

【解答】(1) $\frac{4}{3}$　(2) 301

【詳解】

(1) $U_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f(M_k)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f(\frac{k}{n})=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}[(\frac{k}{n})^2+2(\frac{k}{n})]=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}[(\frac{k}{n})^2+2(\frac{k}{n})]$

$=\frac{1}{n}[\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k^2+\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}k]=\frac{1}{n}[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^2}+\frac{2n(n+1)}{2n}]=\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}+\frac{n+1}{n}$

$A(R)=\lim_{n\to\infty}U_n=\lim_{n\to\infty}[\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}+\frac{n+1}{n}]=\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}$，所以所圍的區域面積爲$\frac{4}{3}$

速解：$R=\int_0^1(x^2+2x)dx=(\frac{1}{3}x^3+x^2)|_0^1=\frac{1}{3}\cdot1^3+1^2=\frac{4}{3}$

(2) $L_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f(m_k)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f(\frac{k-1}{n})=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}[(\frac{k-1}{n})^2+2(\frac{k-1}{n})]=\frac{1}{n}[\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(k-1)^2+\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}(k-1)]$

$=\frac{1}{n}[\frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^2}+\frac{2n(n-1)}{2n}]=\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}+\frac{n+1}{n}$

$U_n-L_n=[\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}+\frac{n+1}{n}]-[\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}+\frac{n-1}{n}]=\frac{6n}{6n^2}+\frac{2}{n}=\frac{3}{n}$

因$U_n-L_n<0.01$，故得$\frac{3}{n}<0.01$，即$n>300$，n最小值爲 301