高雄市明誠中學 高三數學平時測驗　　日期：95.05.02

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 範圍 | Book6　2-3、4 極值 | 班級 | 普三　　　班 | 姓名 | |
| | | 座號 | | | |

一、是非題( 每題 5 分)

1. 若函數 $f$ 在實數集合 $R$ 上遞增，則任意一個數 $a$，$f'(a)$必大於 0。

【解答】╳

【詳解】$f(x)=x^3$時，$f'(x)=3x^2$，此時$f'(0)=0$(反曲點)，而$f$在$R$上遞增

2. 若函數 $f$ 對任意 $a\in R$，$f'(a)$都是正數，則 $f$ 在 $R$ 上爲遞增函數。

【解答】○

3. 若函數 $f(x)$在 $x=a$ 處可微分，且 $f'(a)=0$，則 $f(a)$爲一極值。

【解答】╳

【詳解】

令$f(x)=x^3$，顯然$f(x)$在$x=0$ 處可微分且$f'(0)=0$，但是$f(0)$不是$f(x)$的極值(反曲點)，因爲「$f(x)$在$x=a$處可微分且$f'(a)=0$」是$f(x)$在$x=a$處有極值的必要非充份條件

4. 若 $f$ 在開區間$(a，b)$內的一個數 $c$（$a<c<b$），$f(c)$是相對極大值，則 $f'(c)=0$。

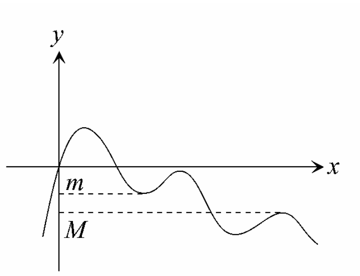
【解答】╳

【詳解】$f(x)=-|x|$且 $x\in(-1，1)$時，$f(0)$是極大值，但 $f'(0)$不存在

5. 若 $m$ 是函數 $f$ 的一個極小值，$M$ 是函數 $f$ 的一個極大值，則 $m\le M$。

【解答】╳

【詳解】

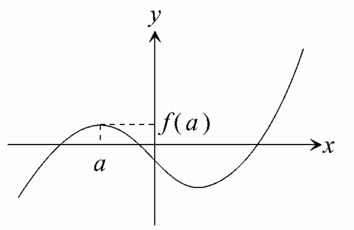



如上圖，$m$ 是相對極小值，$M$ 是相對極大值，但 $m>M$

6. 如果函數 $f$ 只在 $x=a$ 之處有一相對極大值，則 $f(a)$就是函數 $f$ 的最大值。

【解答】╳

【詳解】




如上圖，$f(a)$爲相對極大值，但不是最大值

7. 若函數 $f$ 在實數集合 $R$ 上的任意一個數 $a$，$f'(a)$都是正數，則 $f$ 在 $R$ 上爲遞增函數。

【解答】○

【詳解】增函數的性質之一

8. 若函數 $f$ 在 $x=a$ 之處 $f'(a)=0$，則此函數圖形在點$(a，f(a))$處有一條水平切線。

【解答】○
【詳解】$f'(a)=0$ 表示，切線的斜率爲 0，即有水平切線

9. 若函數 $f$ 在開區間$(a，b)$內的一個數 $c$（$a<c<b$），$f'(c)=0$，則函數 $f$ 在 $x=c$ 之處，$f(c)$ 是一個極值。

【解答】╳
【詳解】當$f(x)=x^3$，$x\in(-1，1)$時，$f'(0)=0$，但$x=0$ 之處，$f(0)$不是極值

## 二、選擇題( 每題 10 分)

1. (複選)關於函數 $f(x)=x+\sqrt{1-x^2}$ 的敘述何者正確？

(A) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$ (B) $f'(\dfrac{\sqrt{3}}{2})=1+\sqrt{3}$ (C) $f(x)$之最大值爲 $\sqrt{2}$ (D) $f(-1)$爲 $f(x)$之極大值

【解答】(A)(C)
【詳解】

| $x$ | $-1$ | | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-1$ 極小值 | | $\sqrt{2}$ 最大值 | | $1$ 極小值 |

$\lim\limits_{x\to 0}(x+\sqrt{1-x^2})=0+1=1$

$f'(x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}-x}{\sqrt{1-x^2}}$ $\Rightarrow$ $f'(\dfrac{\sqrt{3}}{2})=\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=1-\sqrt{3}$。令 $f'(x)=0$ $\Rightarrow$ $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

注意：$f(x)$的定義域爲 $[-1，1]$

## 三、填充題(每題 10 分)

1. 一張矩形鐵片，長 16 公分，寬 10 公分，四個角各截去一個大小相等的正方形，再將四邊摺起，做成一個無蓋的長方體容器，則當截去正方形邊長爲__________公分時容器體積最大，此時容器體積的最大值爲__________立方公分。

【解答】2，144
【詳解】

設截去正方形的邊長爲$x$公分，則摺起來的容器的長爲 $16-2x$公分，寬爲 $10-2x$公分，高爲$x$公分，設容器體積函數$f(x)=x(16-2x)(10-2x)=4(x^3-13x^2+40x)$，$0<x<5$

$f(x)$的導函數爲$f'(x)=4(3x^2-26x+40)=4(x-2)(3x-20)$

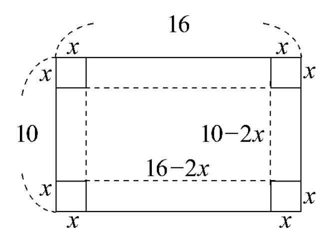
當$f'(x)=0$，得$x=2$ 或$x=\dfrac{20}{3}$（不合），故$f(x)$的極值只可能出現在$x=2$

當 $0<x<2$ 時，$f'(x)>0$，即$f(x)$在 $0<x<2$ 時遞增

而 $2<x<5$ 時，$f'(x)<0$，即$f(x)$在 $2<x<5$ 時遞減

所以對任意$x\in(0，5)$ 都有$f(x)\le f(2)=144$

即當$x=2$ 公分時，容器的最大容積爲 144 立方公分




2. 設實係數二次函數$f(x)=ax^2+bx+c$，並且$g(x)=(x+1)f(x)$，若$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x-2}=3$，又$g(x)$在$x=-1$時有極值，則二次函數$f(x)=$__________。

【解答】$x^2-x-2$

【詳解】

因為$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x-2}=3$極限存在，因此，$f(2)=0$，並且$g(x)$在$x=-1$有極值。

$\begin{cases} f(2)=4a+2b+c=0 \cdots\cdots ① \\ g'(-1)=a-b+c=0 \ \ \cdots\cdots ② \end{cases}$，因為$f(2)=0$，所以$f(x)=(x-2)[ax+(2a+b)]$

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}[ax+(2a+b)]=2a+(2a+b)$，但$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x-2}=3$，所以$2x+(2a+b)=3\cdots\cdots ③$

解①②③聯立方程式，我們可得$a=1$，$b=-1$，$c=-2$，故得$f(x)=x^2-x-2$

3. 設$f(x)=|x|(x^2-3x)$，則$f(x)$在區間$[-1，4]$的最大值為__________，最小值為__________。

【解答】16，$-4$

【詳解】

$f(x)=\begin{cases} x^3-3x^2，0\le x\le 4 \\ -x^3+3x^2，-1\le x<0 \end{cases}$，$f(x)$的導函數，得$\begin{cases} 3x^2-6x，0<x<4 \\ \quad 0 \quad ，\ x=0 \\ -3x^2+6x，-1<x<0 \end{cases}$

$f'(x)=0$，解得$x=0$，2，故$f(x)$的臨界點為$-1$，0，2，4。$f'(x)$符號變化列表如下

| $x$ | $-1$ | | $0$ | | $2$ | | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | | $-$ | | $+$ | |
| $f(x)$增減 | | ↘ | | ↘ | | ↗ | |
| $f(x)$ | 4 | | 0 | | $-4$ | | 16 |

所以$f(2)=-4$為極小值；而端點$x=-1$及$x=4$時為極大值，且$f(-1)<f(4)$

故$f(x)$的最大值為$f(4)=16$，而最小值為$f(2)=-4$

4. 設$f(x)=x^4+4x^3-20x^2-96x+70$，若$f(x)$在閉區間$[-10，a]$中是嚴格遞減，而$f(x)$在區間$[b，\infty)$中是嚴格遞增，則$a$的最大值為__________，$b$的最小值為__________。

【解答】$-4$，3

【詳解】$f(x)$的導函數$f'(x)=4x^3+12x^2-40x-96=4(x+4)(x+2)(x-3)$

$f'(x)$的符號變化列表如下

| $x$ | $-\infty$ | | $-4$ | | $-2$ | | $3$ | | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | | $+$ | | $-$ | | $+$ | |
| $f(x)$增減 | | ↘ | | ↗ | | ↘ | | ↗ | |

由上表可知：$f(x)$只有在$[-10，a]\subset(-\infty，-4]$是嚴格遞減，故$a$的最大值為$-4$

又$f(x)$只有在$[b，\infty)\subset[3，\infty)$是嚴格遞增，故$b$的最小值為 3

5. 設函數$f$：$[-2，3]\to R$定義爲$f(x)=x^3-3x$，則$f(x)$的絕對極大值爲＿＿＿＿＿，絕對極小值爲＿＿＿＿＿。

【解答】18，$-2$

【詳解】

$f(x)$的導函數$f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$，其中$x\in[-2，3]$

令$f'(x)=0$，解之得實根爲$x=1$ 或$x=-1$

$f(x)$的極值只可能出現在定義域的端點$x=-2$ 或$x=3$ 及$x=1$ 與$x=-1$

$f'(x)$的符號變化列表如下

| $x$ | $-2$ | | $-1$ | | $1$ | | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | | $-$ | | $+$ | |
| $f(x)$增減 | | ↗ | | ↘ | | ↗ | |
| $f(x)$極值 | $-2$ | | $2$ | | $-2$ | | $18$ |

第一階導數極值定理知：$f(x)$在$x=-1$ 處有相對極大值 2，在$x=1$ 處有相對極小值 $-2$

又$f(-2)=-2$，$f(3)=18$，因此由絕對極大值、絕對極小值定義得知

$f(-2)=f(1)=-2$ 是絕對極小值，而$f(3)=18$ 是絕對極大值

6. 設函數$f(x)=x^3-3x^2-9x+12$，則$f(x)$的遞增區間爲＿＿＿＿＿，遞減區間爲＿＿＿＿＿。

【解答】$(-\infty，-1]$或$[3，\infty)$，$[-1，3]$

【詳解】

$f(x)$的導函數，$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x^2-2x-3)=3(x+1)(x-3)$

令$f'(x)=0$，得實根爲 $x=-1$ 或$x=3$，$f'(x)$的符號變化列表如下

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $3$ | | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | | $-$ | | $+$ | |
| $f(x)$增減 | | ↗ | | ↘ | | ↗ | |

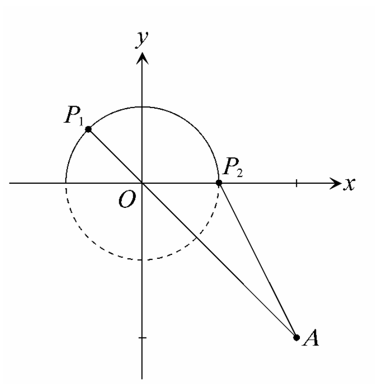
(1)若$x<-1$ 或$x>3$，則$f'(x)>0$，$f(x)$在$(-\infty，-1]$及$[3，\infty)$均爲嚴格遞增函數

(2)若 $-1<x<3$，則$f'(x)<0$，根據定理知：$f(x)$在$[-1，3]$爲嚴格遞減函數

7. $f(x)=\sqrt{1-x^2}$，$-1\le x\le 1$，則$(x-2)^2+(y+2)^2$的最大值是＿＿＿＿＿，最小值是＿＿＿＿。

【解答】$9+4\sqrt{2}$，5

【詳解】




$\Gamma$：$y=\sqrt{1-x^2}$，$\Gamma$ 表一半圓，圓心(0，0)，半徑 1

$A(2，-2)$，$P$ 爲$\Gamma$ 上任一點時，$\sqrt{5}\le\overline{AP}\le 1+\sqrt{2}$

$\therefore$ $\overline{AP}^2$的最大值 $9+4\sqrt{2}$，最小值 5，如上圖（$\overline{AP_1}=1+2\sqrt{2}$，$\overline{AP_2}=\sqrt{5}$）

8. $\Gamma: y=\frac{1}{2}\sqrt{16-x^2}$，$A(5，0)$，$B(0，4)$，$\Gamma$上任一點$P$，則△$ABP$之面積的最小值爲＿＿＿＿＿，又使△$ABP$面積爲最小之點$P$的坐標爲＿＿＿＿＿。

【解答】$10-\sqrt{89}$，$(\frac{32}{\sqrt{89}}，\frac{10}{\sqrt{89}})$

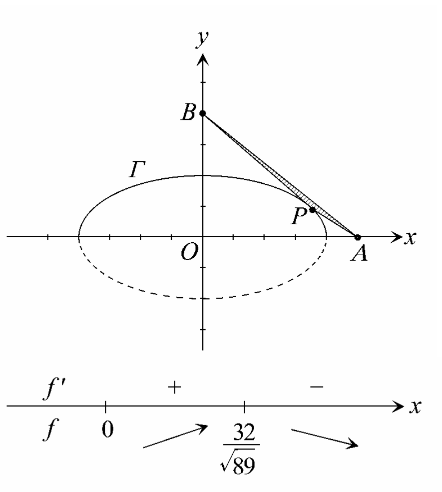
【詳解】

△$ABP$ 的面積 $=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}=10-\frac{1}{2}(4x+5y)$，令 $f(x)=4x+5y=4x+\frac{5}{2}\sqrt{16-x^2}$

$f'(x)=4-\frac{5}{2}\cdot\frac{x}{\sqrt{16-x^2}}=\frac{1024-89x^2}{2\sqrt{16-x^2}(8\sqrt{16-x^2}+5x)}$

得 $f'(x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=\frac{32}{\sqrt{89}}$，而 $f(\frac{32}{\sqrt{89}})=\frac{178}{\sqrt{89}}$ $\quad\therefore\quad$ 當 $P(\frac{32}{\sqrt{89}}，\frac{10}{\sqrt{89}})$時，$f(x)$有最大值

則△$ABP$ 的面積有最小值 $10-\frac{89}{\sqrt{89}}=10-\sqrt{89}$




9. 設$P$爲拋物線$y=x^2$上一動點，$A(3，0)$爲定點，則點$P$與點$A$的最短距離爲＿＿＿＿＿，此時點$P$的坐標爲＿＿＿＿＿。

【解答】$\sqrt{5}$，$(1，1)$

【詳解】

設$P(x，x^2)$爲拋物線$y=x^2$上的點，

令 $\overline{AP}$ 距離爲$f(x)=\sqrt{(x-3)^2+(x^2-0)^2}=\sqrt{x^4+x^2-6x+9}$，其中$x\in R$

$f(x)$的導函數爲$f'(x)=\frac{4x^3+2x-6}{2\sqrt{x^4+x^2-6x+9}}=\frac{(x-1)(2x^2+2x+3)}{\sqrt{x^4+x^2-6x+9}}$

令$f'(x)=0 \quad\because\quad 2x^2+2x+3>0$ 恆成立 $\quad\therefore\quad x=1$ 爲$f(x)$的一臨界值

因爲$\forall x\in(-\infty，1)$恆有$f'(x)<0$，所以$f(x)$在$(-\infty，1)$嚴格遞減

$\forall x\in(1，\infty)$恆有$f'(x)>0$，所以$f(x)$在$(1，\infty)$嚴格遞增，$\forall x\in R$恆有$f(x)\geq f(1)=\sqrt{5}$，

即 $\overline{AP}$ 最短距離爲$\sqrt{5}$，此時$P$的坐標$(1，1)$

10. $f(x)=\sum_{k=1}^{10}k(x-k)^2$，當$x=$＿＿＿＿＿時，$f(x)$有最小值＿＿＿＿＿。

【解答】7，330

【詳解】

$f(x)=(x-1)^2+2(x-2)^2+\cdots+10(x-10)^2=55x^2-2(1^2+2^2+\cdots+10^2)x+c$

$=55x^2-770x+c=55(x-7)^2+d\geq d$

其中$d=f(7)=6^2+2\cdot5^2+3\cdot4^2+4\cdot3^2+5\cdot2^2+6\cdot1^2+8\cdot1^2+9\cdot2^2+10\cdot3^2=330$

$\therefore$ 當$x=7$時，$f(x)$有最小值$d=330$

PS：$f'(x)=\sum_{k=1}^{10}2k(x-k)=2(1+2+\cdots+10)x-2(1^2+2^2+\cdots+10^2)$

$f'(x)=110x-770$，$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=7$

11.$f(x)=\dfrac{x^4-4x^3+8x-3}{x^2-2x+2}$，則當$x=$__________時，$f(x)$有極小值__________。

【解答】$1\pm\sqrt{2}$，$-2$

【詳解】

$f(x)=(x^2-2x-6)+\dfrac{9}{x^2-2x+2}$，$x^2-2x+2$ 恆正，$f(x)=[(x^2-2x+2)+\dfrac{9}{x^2-2x+2}]-8$

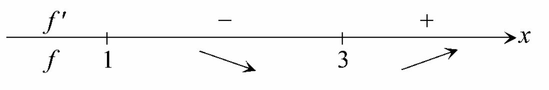
使$f(x)\geq2\sqrt{(x^2-2x+2)\cdot\dfrac{9}{x^2-2x+2}}-8=-2$，故當$x^2-2x+2=\dfrac{9}{x^2-2x+2}$

$x^2-2x+2=\pm3$（負不合）時，$f(x)$有最小值 $-2$，此時$x^2-2x-1=0$，$x=1\pm\sqrt{2}$

【註】$f(x)=x+\dfrac{9}{x}$，$x>1$ 時，由$f'(x)=1-\dfrac{9}{x^2}$知：

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=3$（$\because x>0$）

$\therefore x=3$ 時，$f(x)$有最小值$f(3)=6$，即可用$x$取代$(x-1)^2+1$，使上面[ ]內之最小值 6




12.設有一半徑為$r$的圓，今從此圓切掉一個圓心角為$\theta$ 的扇形，將剩下的部分做成一個直立圓錐，則此直立圓錐的最大體積為__________，又此時$\theta=$__________。

【解答】$\dfrac{2\sqrt{3}}{27}\pi r^3$，$\dfrac{2(3-\sqrt{6})\pi}{3}$

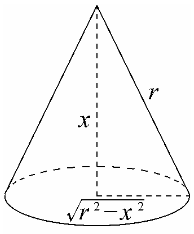
【詳解】

設直立圓錐的高為 $x$，則底的半徑為$\sqrt{r^2-x^2}$，其中 $0<x<r$，令直立圓錐的體積為

$f(x)=\dfrac{1}{3}\pi(\sqrt{r^2-x^2})^2\cdot x=\dfrac{1}{3}\pi(r^2x-x^3)$，$f(x)$的導函數為 $f'(x)=\dfrac{1}{3}\pi(r^2-3x^2)$，$0<x<r$

令 $f'(x)=0$ 時，得 $x=\dfrac{r}{\sqrt{3}}$（負不合），$f'(x)$的符號變化列表如下

| $x$ | $0$ | $\dfrac{r}{\sqrt{3}}$ | $r$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | | $-$ |
| $f(x)$增減 | ↗ | | ↘ |
| $f(x)$極值 | | $\dfrac{2\sqrt{3}}{27}\pi r^3$ | |



因 $f(x)$在區間$(0，\frac{r}{\sqrt{3}})$遞增，在區間$(\frac{r}{\sqrt{3}}，r)$遞減，

故 $f(x)$在 $x=\frac{r}{\sqrt{3}}$ 時有最大值爲 $f(\frac{r}{\sqrt{3}})=\frac{1}{3}\pi[r^2\cdot\frac{r}{\sqrt{3}}-(\frac{r}{\sqrt{3}})^3]=\frac{2\sqrt{3}}{27}\pi r^3$

直圓錐之底的周長爲 $2\pi\sqrt{r^2-x^2}=2\pi\sqrt{r^2-(\frac{r}{\sqrt{3}})^2}=\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi r$

因爲扇形弧長等於直立圓錐之底的周長$(2\pi-\theta)r=\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi r$ ，

解之得$\theta=2\pi-\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi=\frac{2(3-\sqrt{6})\pi}{3}$

13.設函數$f(x)=x^3-3x$，則導函數$f'(x)=$__________，由此可知函數$f$在$x=$__________時，有一個極大值，而$f$在$x=$__________時，有一個極小值。

【解答】$3x^2-3$，$-1$，1

【詳解】

$f(x)=x^3-3x$時，$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$，當$f'(x)=0$ 時，$x=1$ 或 $-1$

| $x$ | | $-1$ | | 1 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | − | 0 | + |

由上表可知，$f(-1)$爲極大值，$f(1)$爲極小值

14.若函數$f(x)=2x^3-9x^2+12x+5$ 在開區間$(a，b)$內是遞減的，則$b-a$的最大值爲__________，又此函數的極大值 =__________，極小值 =__________。

【解答】1，10，9

【詳解】

$f(x)=2x^3-9x^2+12x+5$ 時，$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$

| $x$ | | 1 | | 2 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | − | 0 | + |

由上表可知，$f(x)$在區間$(1，2)$內遞減，且區間$(1，2)$是最大的遞減區間

因此$a=1$，$b=2$，$b-a=1$

$f(1)=2-9+12+5=10$ 爲極大值，$f(2)=2\times 8-9\times 4+12\times 2+5=9$ 爲極小值

15.設函數$f(x)=2x^3-3x^2-12x+10$，若函數$f(x)$在閉區間$[-1，a]$中遞減，則實數$a$的最大值爲__________。

【解答】2

【詳解】

$f(x)$的導函數爲$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x^2-x-2)=6(x+1)(x-2)$

當$f'(x) < 0$時，$f(x)$爲遞減，使 $6(x+1)(x-2) \le 0$ 的最大區間爲$[-1，2]$，
故欲使$f(x)$在閉區間$[-1，a]$中遞減，則最大實數$a = 2$

16.設函數$f(x) = x^3 + ax^2 + ax + 3$ 在$R$中爲遞增函數，則$a$範圍爲__________。
【解答】$0 \le a \le 3$
【詳解】
$f(x)$的導函數爲$f'(x) = 3x^2 + 2ax + a$，$f(x)$在$R$中爲遞增函數，所以$f'(x) \ge 0$ 恆成立，
判別式$D = (2a)^2 - 4 \cdot 3 \cdot a \ge 0$，解之，得 $0 \le a \le 3$

17.設$a$，$b$，$c \in R$，若$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c = 1$ 在$x = 1$ 時有極大值 7，在$x = 3$ 時有極小值$m$，則$a + b =$__________，$m =$__________。
【解答】3，3
【詳解】
$f(x)$的導函數爲$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$，
因爲$f(x)$分別在$x = 1$ 及$x = 3$ 處有極值，故$f'(1) = 0$ 及$f'(3) = 0$，
即$\begin{cases} f'(1) = 3 + 2a + b = 0 & \cdots\cdots① \\ f'(3) = 27 + 6a + b = 0 & \cdots\cdots② \end{cases}$
由①、②，得$a = -6$，$b = 9$，故$a + b = 3$。因爲$f(1) = 1 + a + b + c = 7$，故$c = 3$
所以$f(x)$的最小值$m = f(3) = 3^3 + (-6) \times 3^2 + 9 \times 3 + 3$

18.設$f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx - 5$ 在 $2 < x < 5$ 時爲遞減，在$x > 5$ 或$x < 2$ 時爲遞增，則$a =$________，$b =$__________。
【解答】$-21$，60
【詳解】
$f(x)$的導函數爲$f'(x) = 6x^2 + 2ax + b$
因爲$f(x)$在 $2 < x < 5$ 時爲遞減，且在$x > 5$ 或$x < 2$ 時爲遞增，故 2 及 5 爲$f(x)$的臨界值，亦即 2 及 5 爲$f'(x) = 6x^2 + 2ax + b = 0$ 的二實根
由根與係數關係知：$\begin{cases} 2 + 5 = -\dfrac{2a}{6} \\ 2 \times 5 = \dfrac{b}{6} \end{cases}$，故得$a = -21$，$b = 60$

19.曲線$y = x^3 - 3x^2 + 5x + 1$ 之切線斜率中，斜率最小的切線方程式爲__________。
【解答】$2x - y + 2 = 0$
【詳解】
$f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 1$，$f(x)$的導函數爲$f'(x) = 3x^2 - 6x + 5 = 3(x-1)^2 + 2$
即當$x = 1$ 時，斜率$f'(x) = 2$ 爲最小，此時切點坐標爲$(1，f(1)) = (1，4)$
切線方程式：$2x - y + 2 = 0$

20.設$f(x) = x^3 + 3ax^2 + 3(a+2)x + 1$ 沒有極值，則實數$a$範圍爲__________。
【解答】$-1 \le a \le 2$
【詳解】

$f(x)$的導函數$f'(x) = 3x^2 + 6ax + 3(a+2)$，因爲$f'(x)$沒有極值，故$f'(x) = 0$ 沒有相異二實根
故$D = (6a)^2 - 4 \times 3 \times 3(a+2) \le 0$，$a^2 - a - 2 \le 0$，$(a+1)(a-2) \le 0$ $\quad\therefore\quad -1 \le a \le 2$

21.$A(0，3)$，$\Gamma：y = x^2$，$\Gamma$ 上任一點$P$，當$P =$＿＿＿＿＿時，$\overline{AP}$ 有最小值＿＿＿＿＿。
【解答】$(\pm\frac{\sqrt{10}}{2}，\frac{5}{2})$，$\frac{\sqrt{11}}{2}$
【詳解】
設$P(x，x^2)$，$\overline{AP}^2 = x^2 + (x^2-3)^2 = x^4 - 5x^2 + 9 = f(x)$
$f'(x) = 4x^3 - 10x = 4x(x^2 - \frac{5}{2})$ $\quad\therefore\quad x = \pm\frac{\sqrt{10}}{2}$ 時，$\overline{AP}^2$ 有最小值$f(\pm\frac{\sqrt{10}}{2}) = \frac{11}{4}$

| | | $-\frac{\sqrt{10}}{2}$ | | $0$ | | $\frac{\sqrt{10}}{2}$ | | $x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | $-$ | | $+$ | | $-$ | | $+$ | |
| $f$ | ↘ | | ↗ | | ↘ | | ↗ | |

即$P(\pm\frac{\sqrt{10}}{2}，\frac{5}{2})$時，$\overline{AP}$ 有最小值$\frac{\sqrt{11}}{2}$

22.對每一實數$x$，恆使$x^4 - 4p^3x + 12 > 0$ 成立，則$p$值範圍爲＿＿＿＿＿。
【解答】$|p| < \sqrt{2}$
【詳解】
設$f(x) = x^4 - 4p^3x + 12$，其中$x \in R$，求$f(x)$的導函數爲$f'(x) = 4x^3 - 4p^3$
當 $f'(x) = 0$，即 $4x^3 - 4p^3 = 0$，$(x-p)(x^2 + px + p^2) = 0$
(1)如果$p = 0$，顯然$f(x) > 0$ 成立
(2)如果$p \ne 0$，則$x^2 + px + p^2 > 0$ 恆成立，故$f'(x) = 0$ 的唯一實根爲$x = p$，

| $x$ | $-\infty$ $\quad p$ | $\infty$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $+$ |
| $f(x)$增減 | ↘ | ↗ |
| $f(x)$ | $f(p)$ | |

欲使對每一實數$x$，$f(x) > 0$，只須$f(p) > 0$ 即可，亦即$f(p) = p^4 - 4p^3 \cdot p + 12 > 0$ 恆成立
$\therefore\quad p^4 - 4 < 0 \quad\therefore\quad (p^2+2)(p^2-2) < 0 \quad\therefore\quad -\sqrt{2} < p < -\sqrt{2}$，$p \ne 0$
由(1)及(2)可知，$-\sqrt{2} < p < -\sqrt{2}$，亦即 $|p| < \sqrt{2}$

23.設三次函數$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$在$x = 1$ 處有極大值 5，在$x = -1$ 處有極小值 1，則$a =$＿＿，$b + c + d =$＿＿＿＿＿。
【解答】$-1$，6
【詳解】
$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$，因爲$f(x)$在$x = 1$ 處有極大值 5，在$x = -1$ 處有極小值 1
所以$f'(x) = 0$ 的兩根爲 1 與 $-1$，即$\begin{cases} f'(1) = 3a + 2b + c = 0 & \cdots\cdots ① \\ f'(-1) = 3a - 2b + c = 0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$
又因爲$f(1) = 5$ 且$f(-1) = 1$，即$\begin{cases} f(1) = a + b + c + d = 5 & \cdots\cdots ③ \\ f(-1) = -a + b - c + d = 1 & \cdots\cdots ④ \end{cases}$

解①②③④分別得$a=-1$，$b=0$，$c=3$，$d=3$，故$b+c+d=6$

24.某次期中考的試題偏難，因此任課老師將原始分數開平方再乘以 10 爲調整後的分數。問當原始分數爲__________分時，所增加分數最多，此時所增加分數爲__________分。

【解答】25，25

【詳解】

設原始分數爲 $x$，則調整後的分數爲$10\sqrt{x}$，兩者差爲函數

$f(x)=10\sqrt{x}-x$，其中$f'(x)=\dfrac{5}{\sqrt{x}}-1$，其中 $0<x<100$，令$f'(x)=0$，得 $x=25$，顯然

(1)當 $0<x<25$ 時，$f'(x)>0$，故 $f(x)$在 $0\le x\le 25$ 上遞增

(2)當 $25<x<100$ 時，$f'(x)<0$，故 $f(x)$在 $25\le x\le 100$ 上遞減

故對於$\forall x\in[0，100]$，恆有 $f(x)\le f(25)=25$

即當原始分數爲 $x=25$ 分時，其所增加分數 25 分爲最多

25.設$f(x)=-x^3+27x+9$ 且 $-5\le x\le 1$，則$f(x)$的最大值爲__________，最小值爲__________。

【解答】35，$-45$

【詳解】

$f(x)$的導函數$f'(x)=-3x^2+27$，$-5<x<1$，顯然，$f'(x)=0$ 的實根爲$x=-3$

故$f(x)$的臨界值分別爲$x=-3$ 及定義域的端點 $-5$ 及 1，$f'(x)$符號列表如下

| $x$ | $-5$ | $-3$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | | $+$ |
| $f(x)$增減 | ↘ | | ↗ |
| $f(x)$ | $-1$ | $-45$ | $35$ |

(1)因對每個$x\in[-5，1]$，恆有$f(x)\le f(1)=35$，故$f(x)$在$x=1$ 有最大值 35

(2)因對每個$x\in[-5，1]$，恆有$f(x)\ge f(-3)=-45$，故$f(x)$在$x=-3$ 有最大值 $-45$

26.若函數$f(x)=ax^3-3x^2+(a+2)x+5$ 恆爲遞減函數，對所有$x\in R$，試求$a$之範圍爲何？

【解答】$a\le -3$

【詳解】$f(x)$的導函數爲$f'(x)=3ax^2-6x+(a+2)$

因爲$f(x)$恆爲遞減函數，故對所有$x\in R$，$f'(x)\le 0$ 恆成立

由$f'(x)\le 0$ 恆成立可得：$a<0$ 且判別式$D=36-12a(a+2)\le 0$

即$a<0$ 且$a^2+2a-3\ge 0$ 或$a<0$ 且$(a+3)(a-1)\ge 0$，得$a\le -3$

27.試討論函數 $f(x)=\dfrac{x^2-3x}{x^2+3}$ 的遞增與遞減狀況。

【解答】遞增：$(\infty，-3]\cup[1，\infty)$，遞減：$[-3，1]$

【詳解】求 $f(x)$的導函數爲 $f'(x)=\dfrac{(2x-3)(x^2+3)-(x^2-3x)(2x)}{(x^2+3)^2}=\dfrac{3(x-1)(x+3)}{(x^2+3)^2}$

當 $f'(x)=0$，解出得 $x=1$ 或 $x=-3$。$f'(x)$符號的變化列表如下

| $x$ | $-\infty$ | $-3$ | $1$ | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $-$ | $+$ | |
| $f(x)$增減 | ↗ | ↘ | ↗ | |

根據遞增與遞減判別定理，可得

(1) $f(x)$在$(\infty，-3]\cup[1，\infty)$是遞增函數　(2) $f(x)$在$[-3，1]$是遞減函數

28.試討論函數$f(x)=|x^2(x-1)|$ 的遞增與遞減狀況。

【解答】遞減：$(-\infty，0]\cup\left[\dfrac{2}{3}, 1\right]$；遞增：$\left[0，\dfrac{2}{3}\right]\cup[1，\infty)$

【詳解】$f(x)$的導函數為 $f'(x)=\begin{cases} 3x^2-2x=x(3x-2)，x\ge 1 \\ -3x^2+2x=-x(3x-2)，x<1 \end{cases}$

所以令 $f'(x)=0$，解出得 $x=0$ 或 $x=\dfrac{2}{3}$ 。今將 $f'(x)$符號的變化列表如下

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $\dfrac{2}{3}$ | $1$ | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-$ | $+$ | $-$ | $+$ | |
| $f(x)$增減 | ↘ | ↗ | ↘ | ↗ | |

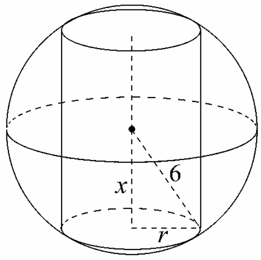
根據遞增與遞減判別定理，可得

(1) $f(x)$在$(-\infty，0]\cup\left[\dfrac{2}{3}, 1\right]$是遞減函數　(2) $f(x)$在$\left[0，\dfrac{2}{3}\right]\cup[1，\infty)$是遞增函數

29.有一半徑為 6 的球面，試求其內接圓柱體體積的最大值。

【解答】$96\sqrt{3}\pi$

【詳解】




設內接於球面的圓柱之底半徑為$r$，高為 $2x$，則$r^2=36-x^2$，設內接圓柱的體積為$f(x)$

$f(x)=$ 底面積 × 高 $=(\pi r^2)2x=2\pi x(36-x^2)=2\pi(36x-x^3)$，其中 $0<x<6$

$f(x)$的導函數為$f'(x)=2\pi(36-3x^2)$

令$f'(x)=0$，即 $36-3x^2=0$，解得$x=2\sqrt{3}$（∵　$0<x<6$）。

$f'(x)$符號變化列表如下

| $x$ | $0$ | $2\sqrt{3}$ | $6$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $-$ | |
| $f(x)$增減 | ↗ | ↘ | |
| $f(x)$ | | $96\sqrt{3}$ | |

根據第一階導數極值判別定理知

當$x=2\sqrt{3}$時，$f(x)$的極大值為$f(2\sqrt{3})=2\pi(36\cdot2\sqrt{3}-24\sqrt{3})=96\sqrt{3}\pi$

對於$x\in(0，6)$，都有$f(x)\le 96\sqrt{3}\pi$，所以，內接圓柱的最大體積為 $96\sqrt{3}\pi$

30.方程式$2x^3-3x^2-12x+k=0$有二相異負根及一正根，試求實數$k$的範圍。

【解答】$-7<k<0$

【詳解】

設$f(x)=2x^3-3x^2-12x+k$

並求$f(x)$的導函數爲$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x^2-x-2)=6(x-2)(x+1)$

令$f'(x)=0$，得臨界值爲$x=-1$，2。今將$f'(x)$的符號變化列表如下

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | $2$ | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | | $-$ | $+$ |
| $f(x)$增減 | ↗ | | ↘ | ↗ |
| $f(x)$極值 | | $k+7$ | $k-20$ | |

因爲$f(x)=0$有二相異負根及一正根

$\Leftrightarrow \begin{cases} f(-1)f(2)<0 \\ f(0)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (k+7)(k-20)<0 \\ k<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7<k<20 \\ k<0 \end{cases} \Leftrightarrow -7<k<0$

所以$f(x)=0$有二相異負根及一正根的範圍是$-7<k<0$

31.設函數$f(x)=2x^3+ax^2+bx+5$在$x=1$處有極大值爲$c$，在$x=2$處有極小值爲$d$，試求$a$，$b$，$c$，$d$值。

【解答】$a=-9$，$b=12$，$c=10$，$d=9$

【詳解】

$f(x)$的導函數$f'(x)=6x^2+2ax+b$，因爲$f(x)$在$x=1$有極大值，在$x=2$有極小值

所以$f'(x)=6x^2+2ax+b=0$的兩根爲$x=1$或2

兩根和爲$1+2=\dfrac{-2a}{6}$，得$a=-9$，兩根積爲$1\times 2=\dfrac{b}{6}$，得$b=12$

函數爲$f(x)=2x^3-9x^2+12x+5$，$f(x)$的極大值爲$f(1)=10$，極小值爲$f(2)=9$

所以$a=-9$，$b=12$，$c=10$，$d=9$

32.設$f(x)$爲三次函數，若$f(x)$在$x=1$處的切線方程式爲$4x-y-3=0$，又在$x=-1$處有極小值$-7$，試求$f(x)$。

【解答】$f(x)=-x^3+x^2+5x-4$

【詳解】

設$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，因爲$f(x)$在$x=1$的切線方程式爲$4x-y-3=0$

所以切點爲$Q(1，1)$及切線斜率爲$f'(1)=4$，將$Q(1，1)$代入$f(x)$得$a+b+c+d=1$……①

$f(x)$的導函數爲$f'(x)=3ax^2+2bx+c$，故切線斜率爲$f'(1)=3a+2b+c=4$……②

因$f(x)$在$x=-1$有極小值$-7$，所以$x=-1$代入$f'(x)$得$3a-2b+c=0$……③

將極小點$(-1，-7)$代入$f(x)$得$-a+b-c+d=-7$……④

解①②③④，得$a=-1$，$b=1$，$c=5$，$d=-4$，故$f(x)=-x^3+x^2+5x-4$

33.設$P$點在拋物線$y^2=4x$上移動，$Q$點坐標爲$(2，1)$，試求$\overline{PQ}$的最小值。

【解答】$\sqrt{2}$

【詳解】設$P(t^2，2t)$在拋物線$y^2=4x$上，$\overline{PQ}=\sqrt{(t^2-2)^2+(2t-1)^2}=\sqrt{t^4-4t+5}$

設$f(t)=t^4-4t+5$，$f'(t)=4t^3-4=4(t-1)(t^2+t+1)$

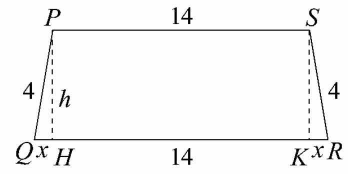
| $t$ | | 1 | |
|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | $-$ | | $+$ |
| $f(t)$ | ↘ | | ↗ |

故$f(t)$的最小值爲$f(1)=2$，即$\overline{PQ}$的最小值爲$\sqrt{f(1)}=\sqrt{2}$，此時$P$ (1，2)

34.製作一面等腰梯形的大型廣告看板，上底長爲 14 公尺，兩腰長均爲 4 公尺，欲使看板面積最大時，其高度應爲多少公尺？

【解答】$\sqrt{15}$ 公尺

【詳解】




如圖，$PQRS$ 爲一等腰梯形，上底$\overline{PS}=14$，兩腰$\overline{PQ}=\overline{SR}=4$，設梯形高$\overline{PH}\perp\overline{QR}$於 $H$

令$\overline{QH}=x$，則$\overline{PH}=\sqrt{4^2-x^2}$，而$\overline{QR}=2x+14$，因此令梯形的面積爲函數

$f(x)=\frac{1}{2}(\overline{PS}+\overline{QR})\overline{PH}=\frac{1}{2}[14+(14+2x)]\sqrt{16-x^2}=(x+14)\sqrt{16-x^2}$，其中 $0\le x\le 4$

$f(x)$的導函數

$f'(x)=1\cdot\sqrt{16-x^2}+\frac{(x+14)(-2x)}{2\sqrt{16-x^2}}=\frac{16-14x-2x^2}{\sqrt{16-x^2}}=-\frac{2(x+8)(x-1)}{\sqrt{16-x^2}}$，其中 $0<x<4$

令 $f'(x)=0$ 時，$x=1$ 或 $x=-8$（不合），故 $f(x)$的極值只有可能在 $x=0$，$x=1$ 及 $x=4$ 處

$f'(x)$的符號變化列表如下：$f(x)$在區間[0，1]嚴格遞增，$f(x)$在區間[1，4]嚴格遞減

| $x$ | 0 | 1 | 4 |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | | $-$ |
| $f(x)$增減 | ↗ | | ↘ |
| $f(x)$極值 | 56 | $15\sqrt{15}$ | 0 |

$f(x)$在 $x=1$ 處有極大值爲 $f(1)=(14+1)\sqrt{16-1^2}=15\sqrt{15}$ 平方公尺，此時$\overline{PH}=\sqrt{15}$ 公尺

35.設 $f(x)=2x^3-3(m+1)x^2+6mx+(m-3)$，求實數 $m$ 值使得 $f(x)$的極大值爲 0。

【解答】$m=-1$

【詳解】

因爲$f'(x)=6x^2-6(m+1)x+6m=6(x-1)(x-m)$，令$f'(x)=0$ 時，得$x=1$ 及$x=m$

(1)若$m>1$ 時，那麼當$x<1$ 時，$f'(x)>0$，當 $1<x<m$時，$f'(x)<0$

根據第一階導數極值定理知：

極大值爲$f(1)=2-3(m+1)+6m+(m-3)=0$，解得$m=1$（不合）

(2)若$m<1$ 時，那麼當$x<m$時，$f'(x)>0$，當$m<x<1$ 時，$f'(x)<0$

根據第一階導數極值定理知：極大值爲$f(m)=2m^3-3(m+1)m^2+6m^2+(m-3)=0$

得$(m+1)(m-1)(m-3)=0$，即得$m=-1$，$m=1$ 及$m=3$

但$m=1$ 及$m=3$ 均不合，故$m=-1$

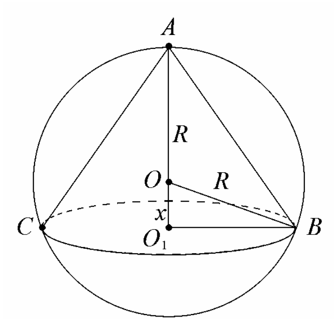
(3)若$m=1$，則$f'(x)=6(x-1)^2\ge 0$，此時$f(x)$沒有極值，故$m=1$ 也不合

綜合(1)(2)(3)討論，可知當$m=-1$ 時，$f(x)$的極大值爲 0

36.設半徑為 $R$ 的球體，試求其內接直圓錐的最大體積。

【解答】$\frac{32}{81}\pi R^3$

【詳解】




設球內接直圓錐底圓圓心為$O_1$，其高為$\overline{AO_1}$，球之球心為$O$，令$\overline{OO_1}=x$，$\overline{OB}=\overline{OA}=R$

則底圓半徑$\overline{O_1B}=\sqrt{R^2-x^2}$，球內接直圓錐體積為$f(x)=\frac{1}{3}\pi(\sqrt{R^2-x^2})(R+x)$

$=\frac{\pi}{3}(R^2-x^2)(R+x)=\frac{\pi}{3}(-x^3-Rx^2+R^2x+R^3)$，其中 $0<x<R$

$f(x)$的導函數為$f'(x)=\frac{\pi}{3}(-3x^2-2Rx+R^2)=\frac{\pi}{3}(-3x+R)(x+R)$

| $x$ | $0$ | | $\frac{R}{3}$ | | $R$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | | $-$ | |
| $f(x)$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | |

故$f(x)$有最大值為$f(\frac{R}{3})=\frac{32}{81}\pi R^3$

37.設 $f(x)=x\sqrt{32+x}$，試求函數 $f$ 在哪些區間是遞增的或遞減的？

【解答】$f(x)$在$[-\frac{64}{3}$，$\infty)$是遞增的，$f(x)$在$[-32$，$-\frac{64}{3}]$是遞減的

【詳解】

$f'(x)=1\cdot\sqrt{32+x}+x\cdot\frac{1}{2}(32+x)^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{32+x}+\frac{x}{2\sqrt{32+x}}=\frac{2(32+x)+x}{2\sqrt{32+x}}=\frac{3x+64}{2\sqrt{32+x}}$

當 $f'(x)>0$ 時，$3x+64>0$，$x>-\frac{64}{3}$，當 $f'(x)<0$ 時，$3x+64<0$，$x<-\frac{64}{3}$

又 $f(x)$的定義域 $D=\{x\mid x\geq-32\}$，所以 $f'(x)<0$ 可得 $-32\leq x<-\frac{64}{3}$

故 $f(x)$在$[-\frac{64}{3}$，$\infty)$是遞增的，$f(x)$在$[-32$，$-\frac{64}{3}]$是遞減的

38.直圓柱的底半徑 $r$，高 $h$，其體積 $V$ 為定值，則表面積之最小值為何？又使表面積為最小時，$h$ 與 $r$ 之關係為何？

【解答】$3\sqrt[3]{2\pi V^2}$，此時 $h=2r$

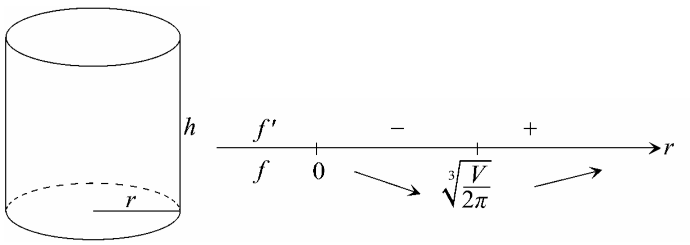
【詳解】

體積$V=\pi r^2h$為一定值，表面積$A=2\pi r^2+2\pi rh$

$A=2\pi r^2+2\cdot\dfrac{V}{r}$，$A=f(r)$時，由$f'(r)=4\pi r-\dfrac{2V}{r^2}$知

$f'(r)=0 \quad\Leftrightarrow\quad 2\pi r^3=V \quad\Leftrightarrow\quad r=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$，而$r=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$時，$h=\dfrac{V}{\pi r^2}=\sqrt[3]{\dfrac{4V}{\pi}}$，$2r=h$

由$f'(r)=\dfrac{2(2\pi r^3-V)}{r^2}$知 $\therefore$ 當$r=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$時，$f(r)$有最小值$f(\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}})=3\sqrt[3]{2\pi V^2}$




39.求下列各函數的極值：

(1) $f(x)=x^3+x^2-8x+3$ (2) $f(x)=-x^3-3x^2+9x+2$ (3) $f(x)=x^4+x^3-2x^2-3x$

【解答】

(1)極大值 15，極小值 $-\dfrac{95}{27}$ (2)極大值 7，極小值 $-25$ (3)極大值$\dfrac{261}{256}$，極小值 1 或 $-3$

【詳解】

(1) $f'(x)=3x^2+2x-8=(3x-4)(x+2)$

| $x$ | $-2$ | $\frac{4}{3}$ | |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | − | + |
| $f(x)$ | ↗ | ↘ | ↗ |

故$f(x)$有極大值爲$f(-2)=15$，$f(x)$有極小值爲$f(\dfrac{4}{3})=-\dfrac{95}{27}$

(2) $f'(x)=-3x^2-6x+9=-3(x+3)(x-1)$

| $x$ | $-3$ | $1$ | |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | − | + | − |
| $f(x)$ | ↘ | ↗ | ↘ |

故$f(x)$有極大值爲$f(1)=7$，$f(x)$有極小值爲$f(-3)=-25$

(3) $f'(x)=4x^3+3x^2-4x-3=(4x+3)(x+1)(x-1)$

| $x$ | $-1$ | $-\frac{4}{3}$ | $1$ | |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | − | + | − | + |
| $f(x)$ | ↘ | ↗ | ↘ | ↗ |

故$f(x)$有極大值爲$f(-\dfrac{3}{4})=\dfrac{261}{256}$，$f(x)$有極小值爲$f(-1)=1$ 或$f(1)=-3$

40.設函數$f(x)=x^3-12x+12$，$-3\le x\le 3$，在哪些開區間上是遞增的？

【解答】$(-3，-2)$，$(2，3)$

【詳解】$f(x)=x^3-12x+12$，$-3\le x\le 3$ 時，$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

| $x$ | $-3$ | | $-2$ | | $2$ | | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | 不存在 | + | 0 | − | 0 | + | 不存在 |

由上表可知，$f(x)$在區間$(-3，-2)$與區間$(2，3)$內爲遞增的

41.若$f(x)=x^3-3kx^2+3(k+2)x+10$之圖形與$x$軸恰有一交點，試求實數$k$的範圍。
【解答】$-1\le k\le 2$
【詳解】
$f(x)$導函數$f'(x)=3x^2-6kx+3(k+2)$
因爲$f(x)$圖形與$x$軸恰有一交點且$f(x)$首項係數爲正，所以$f(x)$在$R$上爲嚴格遞增函數
對任意實數$x$，$f'(x)\ge 0$恆成立，故從而得知：$f'(x)$的判別式$D=(-6k)^2-4\cdot 3(k+2)\le 0$
$\therefore\ \ k^2-k-2\le 0\quad\therefore\ \ (k+1)(k-2)\le 0$解之，得 $-1\le k\le 2$

42.設函數$f(x)=3x^4-8x^3-30x^2+72x+1$，試求$f(x)$的極值。
【解答】$f(x)$有極大值爲$f(1)=38$，$f(x)$有極小值爲$f(-2)=-151$與$f(3)=-26$
【詳解】
$f'(x)=12x^3-24x^2-60x+72=12(x^3-2x^2-5x+6)=12(x+2)(x-1)(x-3)$
當$f'(x)>0$時，得 $-2<x<1$或$x>3$，當$f'(x)<0$時，得$x<-2$或$1<x<3$

| $x$ | $-2$ | $1$ | $3$ | |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $+$ | $-$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↘ | ↗ | ↘ | ↗ |

故$f(x)$有極大值爲$f(1)=38$，$f(x)$有極小值爲$f(-2)=-151$與$f(3)=-26$

43.設函數$f(x)=x^3-12x+2$，在區間$[-3，5]$中，試求$f(x)$的最大值與最小值。
【解答】$f(x)$的最大值爲$f(5)=67$，$f(x)$的最小值爲$f(2)=-14$
【詳解】
$f(x)$的導函數$f'(x)=3x^2-12=3(x-2)(x+2)$
當$f'(x)>0$時，得$x<-2$或$x>2$，當$f'(x)<0$時，得 $-2<x<2$

| $x$ | $-2$ | $2$ | |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $-$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | ↘ | ↗ |

(1) $f(x)$在$x=-2$有極大值$f(-2)=18$，與區間兩端點之函數值做比較
$f(-3)=11$，$f(5)=67$，可知$f(x)$的最大值爲$f(5)=67$
(2) $f(x)$在$x=2$有極小值$f(2)=-14$，與區間兩端點之函數值做比較
$f(-3)=11$，$f(5)=67$，可知$f(x)$的最小值爲$f(2)=-14$

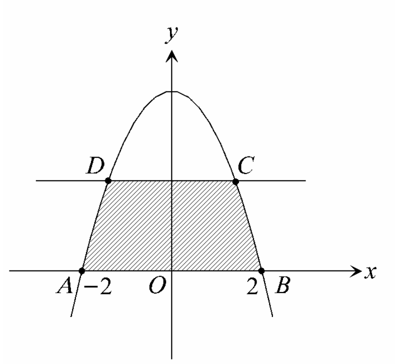
44.設函數$f(x)=x^3+ax^2+3ax+4a^2$在$x=-1$處有極大值，求$a$之值，並求$f(x)$之極小值。
【解答】$a=-3$，極小值 9
【詳解】
$f'(x)=3x^2+2ax+3a$，因$f(x)$在$x=-1$有極大值，故$x=-1$是$f'(x)=0$之一根
將$x=-1$代入$f'(x)$得$3(-1)^2+2a(-1)+3a=0$，$a=-3$
$f(x)=x^3-3x^2-9x+36$，$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x-3)(x+1)$，$f(x)$的極小值$f(3)=9$

| $x$ | $-1$ | $3$ | |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $-$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | ↘ | ↗ |

45.設拋物線$y = 4 - x^2$交$x$軸於$A$，$B$兩點，平行$x$軸且在$x$軸上方的直線與拋物線交於$C$，$D$兩點，試求梯形$ABCD$之最大面積。

【解答】$\dfrac{256}{27}$

【詳解】




因拋物線$y = 4 - x^2$交$x$軸於$A(-2，0)$，$B(2，0)$

設$C(t，4 - t^2)$，$D(-t，4 - t^2)$，其中 $0 < t < 2$

梯形$ABCD$面積為$f(t) = \dfrac{1}{2}(4 + 2t)(4 - t^2) = -t^3 - 2t^2 + 4t + 8$

$f'(t) = -3t^2 - 4t + 4 = -(3t - 2)(t + 2)$，故$f(t)$有最大值$f(\dfrac{2}{3}) = \dfrac{256}{27}$

| $t$ | 0 | | $\frac{2}{3}$ | | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(t)$ | | + | | − | |
| $g(t)$ | 8 | ↗ | $\frac{256}{27}$ | ↘ | 0 |