高雄市明誠中學 高三數學平時測驗　　日期：95.05.01					
範圍	Book6　2-1、2 導數	班級	普三　　　班	姓名	
		座號			

一、是非題(每題 5 分)

1.若函數 f 在 $x=a$ 之處連續，則導數 $f'(a)$必存在。

【解答】╳

【詳解】如 $f(x)=|x|$ 時，$f(x)$在 $x=0$ 之處連續，但 $f'(0)$不存在

2.一次函數 $f(x)=2x-3$，則任意一個點 a，導數 $f'(a)$都是 2。

【解答】○

【詳解】同爲任意一實數 a，$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=2$，即 $f'(a)=2$

3.設一質點在數線上運動，$f(x)$表示時刻 x 時的位置，則 $f'(a)$表示在時刻 a 時的瞬間速度。

【解答】○

【詳解】$f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$表示瞬時的平均位移，就是瞬間速度

二、填充題(每題 10 分)

1. 設$f(x)=x^2+3x+5$，則$f(x)$在$x=a$處的導數$f'(a)=$ ______________；
若$f'(a)$等於從$x=1$ 到$x=3$ 的平均變化率，則a之值爲___________。

【解答】$2a+3$，2

【詳解】根據導數的定義 $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x^2+3x+5)-(a^2+3a+5)}{x-a}$

$$=\lim_{x\to a}\frac{(x^2-a^2)+3(x-a)}{x-a}=\lim_{x\to a}[(x+a)+3]=2a+3$$

$f(x)$值從 $x=1$ 到 $x=3$ 的平均變化率爲$\dfrac{f(3)-f(1)}{3-1}=\dfrac{(3^2+3\cdot3+5)-(1^2+3\cdot1+5)}{2}=7$

因爲 $2a+3=7$，所以 $a=2$

2. $f(x)=\dfrac{-x}{x^2+4}$，則$f'(0)=$__________。滿足$f'(a)=0$ 之實數a值共有__________個。

【解答】$-\dfrac{1}{4}$，2

【詳解】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-1}{x^2+4}=\dfrac{-1}{4}$（$\because$　$f'(0)=0$）

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{\dfrac{-x}{x^2+4}+\dfrac{a}{a^2+4}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(ax-4)}{(x-a)(x^2+4)(a^2+4)}=\lim_{x\to a}\frac{ax-4}{(x^2+4)(a^2+4)}=\frac{a^2-4}{(a^2+4)^2}$$

$\therefore$　$f'(a)=0$　$\Leftrightarrow$　$a=\pm 2$，使 $f'(a)=0$ 之 a 值共有 2 個

3. Γ：$y=\dfrac{1}{1+x^2}$，$A(0，1)$，$B(1，\dfrac{1}{2})$，過A切Γ 之直線L_1的方程式是__________________，過B切Γ 之直線L_2的方程式是__________________________。

【解答】$y=1$，$x+2y-2=0$

【詳解】A與B均在Γ上，令$f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{\dfrac{1}{1+x^2}-\dfrac{1}{1+a^2}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{-(x-a)(x+a)}{(x-a)(1+x^2)(1+a^2)}=-\lim_{x\to a}\frac{(x+a)}{(1+x^2)(1+a^2)}=-\frac{2a}{(1+a^2)^2}$$

得$f'(0)=0$，L_1：$y-1=0(x-0)$，即L_1：$y=1$。$f'(1)=-\dfrac{1}{2}$，L_2：$x+2y-2=0$

4. 斜率 5 之直線L與曲線Γ：$y=x^2+x+1$ 相切於點P，則L之方程式是__________________，點P的坐標是__________________。

【解答】$5x-y-3=0$，$(2，7)$

【詳解】

令切點$P(a，b)$，$f(x)=x^2+x+1$，易知$f'(a)=2a+1$

由 $5=f'(a)$知$a=2$，$b=7$，故$P(2，7)$。L：$y-7=5(x-2)$，即L：$5x-y-3=0$

5.過$(3，4)$切圓$x^2+y^2=25$ 之直線方程式爲____________________。

【解答】$3x+4y=25$

【詳解】

令Γ：$y=\sqrt{25-x^2}$，$A(3，4)$在Γ上，$f(x)=\sqrt{25-x^2}$

$$f'(3)=\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{25-x^2}-4}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(25-x^2)-16}{(x-3)(\sqrt{25-x^2}+4)}=\lim_{x\to 3}\frac{-(x+3)}{\sqrt{25-x^2}+4}=\frac{-6}{8}=\frac{-3}{4}$$

$\therefore$ 切線 L 之斜率爲$\dfrac{-3}{4}$，L：$3x+4y=25$

6.函數$y=f(x)$滿足：$f(a+b)=f(a)+f(b)$對任意a，$b\in R$恆成立，若$f'(0)=2$，則$f'(3)=$______，又$f'(0)=$__________。

【解答】2，0

【詳解】

$f(0+0)=f(0)+f(0)$得$f(0)=2f(0)$ $\quad\therefore\quad f(0)=0$

已知$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=2$，而$f(0)=0$ $\quad\therefore\quad 2=\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$

$$f'(3)=\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{f(x-3+3)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{[f(x-3)+f(3)]-f(3)}{x-3}$$

$$\therefore\quad f'(3)=\lim_{x\to 3}\frac{f(x-3)}{x-3}=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t}=2$$

7. 自原點O作曲線$y=x^3-3x^2-3x+4$ 的切線，則切點坐標爲__________________，而切線方程式爲__________________。

【解答】(2，$-$6)，$3x+y=0$

【詳解】

設$y=f(x)=x^3-3x^2-3x+4$，再$f(x)$的導函數爲$f'(x)=3x^2-6x-3$

設過原點O切線之切點坐標爲$P(t,t^3-3t^2-3t-3)$，此切線斜率爲 $f'(t)=3t^2-6t-3$

過此切點的切線 $y-(t^3-3t^2-3t-3)=(3t^2-6t-3)(x-t)$

過原點$O(0,0)$代入得 $2t^3-3t^2-4=0\Rightarrow(t-2)(2t^2+t+2)=0$

因爲 $2t^2+t+2>0$ 恆成立，得 $t=2$，所以切點爲(2，$-$6)，

斜率爲$f'(2)=3\cdot 2^2-6\cdot 2-3=-3$，所求切線方程式爲$y=-3x$，即 $3x+y=0$

8. 等軸雙曲線$xy=9$上，以P(3，3)爲切點的切線方程式爲________________，法線方程式爲________________。

【解答】$x+y-6=0$；$x-y=0$

【詳解】

$$xy=9\Rightarrow y=\frac{9}{x}\text{，切線斜率 } f'(3)=\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{\frac{9}{x}-3}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{3(3-x)}{x(x-3)}=\lim_{x\to3}\frac{-3}{x}=-1$$

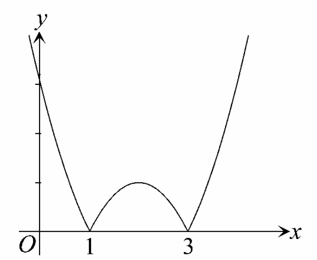
切線方程式：$y=-(x-3)+3$，即 $x+y-6=0$

法線方程式：$y=(x-3)+3$，即 $x-y=0$

9. 設函數$f(x)=|(x-1)(x-3)|$，若f在$x=a$的導數不存在，則$a=$__________。

【解答】1 或 3

【詳解】$f(x)=\begin{cases}x^2-4x+3\text{，}x\ge3\text{ 或 }x\le1\\-x^2+4x-3\text{，}1\le x\le3\end{cases}$



由圖知f在$x=1$及$x=3$出現「右導數與左導數」不同

∴ $a=1$ 或 3

【註】$f'(1^+)=2$，$f'(1^-)=-2$ 使$f'(1)$不存在。

10. 對於某外文課程單字的學習，經過t小時練習，學會單字的個數學習函數$f(t)=72\sqrt[3]{t}$，其中 $0\le t\le10$，則學習函數的瞬時變化率爲________________；8 小時末的瞬時變化率爲____________。

【解答】$f'(x)=\dfrac{24}{\sqrt[3]{x^2}}$，其中 $0<x\le10$；6

【詳解】

(1)學習函數在 $t=x$，其中 $0<x\le10$ 的瞬時變化率爲

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{72(\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x})}{h}=\lim_{h\to0}\frac{72h}{h(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{(x+h)x}+\sqrt[3]{x^2})}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{72}{\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{(x+h)x}+\sqrt[3]{x^2}}=\frac{24}{\sqrt[3]{x^2}}$$

(2) 8 小時末的瞬時變化率即爲 $f'(8)=\dfrac{24}{\sqrt[3]{64}}=6$

22.設函數$f(x)=\dfrac{(x+1)(x-3)}{x-1}$，$x\neq 1$，則$f'(3)=$______________。

【解答】2

【詳解】 $f'(3)=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\dfrac{(x+1)(x+3)}{x-1}-0}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{3+1}{3-1}=2$

11.曲線$y=\dfrac{x}{x+1}$上，以點(0，0)爲切點的切線方程式爲_______________。

【解答】$x-y=0$

【詳解】

令$f(x)=\dfrac{x}{x+1}$，則$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{x}{x+1}-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x+1}=1$，即$y=\dfrac{x}{x+1}$在(0，0)的切線斜率爲 1

所以切線方程式爲 $y-0=1\cdot(x-0)$，即 $x-y=0$

12.設$f(x)=\dfrac{(x-1)(x-2)^2}{(x+2)^3}$，則$f'(1)=$__________。

【解答】$\dfrac{1}{27}$

【詳解】

$f(x)=\dfrac{(x-1)(x-2)^2}{(x+2)^3}$時，$f(1)=0$

$f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\dfrac{(x-1)(x-2)^2}{(x+2)^3}-0}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-2)^2}{(x+2)^3}=\dfrac{(1-2)^2}{(1+2)^3}=\dfrac{1}{27}$

13.若函數$k(x)=\sqrt{\dfrac{x+1}{x^2+1}}$，則$k'(0)=$__________。

【解答】$\dfrac{1}{2}$

【詳解】

$k(x)=\sqrt{\dfrac{x+1}{x^2+1}}$時，$k'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{k(x)-k(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\dfrac{x+1}{x^2+1}}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2+1})}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2+1})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2+1})}{x\sqrt{x^2+1}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2+1})}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+1)-(x^2+1)}{x\sqrt{x^2+1}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2+1})}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-x}{\sqrt{x^2+1}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2+1})}=\dfrac{1}{1\cdot(1+1)}=\dfrac{1}{2}$

14.拋物線$y^2-x-2y+2=0$上，以(2，0)爲切點的切線斜率爲__________，切線方程式爲____。

【解答】$-\frac{1}{2}$，$x+2y-2=0$

【詳解】

原式整理$y^2-2y+(2-x)=0$，得$y=\dfrac{2\pm\sqrt{4-4(2-x)}}{2}=1\pm\sqrt{x-1}$

拋物線可分解為兩個函數的圖形：$f(x)=1-\sqrt{x-1}$及$g(x)=1+\sqrt{x-1}$

點(2，0)在$y=f(x)$圖形上，又$f(x)$的導函數為$f'(x)=-\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$

以(2，0)為切點的切線斜率為$f'(2)=-\dfrac{1}{2\sqrt{2-1}}=-\dfrac{1}{2}$

切線方程式為$y-0=-\dfrac{1}{2}(x-2)$，亦即$x+2y-2=0$

15.設$f(x)=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3$，則$f'(1)=$__________，$f'(3)=$__________。

【解答】-8，0

【詳解】

$f'(1)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x-2)^2(x-3)^3-0}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}(x-2)^2(x-3)^3=(1-2)^2(1-3)^3=-8$

$f'(3)=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{(x-1)(x-2)^2(x-3)^3-0}{x-3}=\lim\limits_{x\to3}(x-1)(x-2)^2(x-3)^2=0$

16.設$f(x)=\begin{cases}4-x^2, & x\le1\\ 2+x^2, & x>1\end{cases}$，則$f'(1)=$__________，$f'(2)=$__________。

【解答】不存在，4

【詳解】

(1) $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{(4-x^2)-3}{x-1}=-\lim\limits_{x\to1^-}(x+1)=-2$

而$\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{(2+x^2)-3}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}(x+1)=2$，故$f'(1)$不存在

(2) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(2+x^2)-6}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}(x+2)=4$

17.設一質點在數線上運動，當時刻t時，質點的坐標為$2t^2-4t+6$，則此質數在$t=3$時的速度為__________________。

【解答】8

【詳解】

$t=3$時刻的速度就是在$t=3$時的瞬間速度$f'(3)$，而$f(3)=12$

又$f'(3)=\lim\limits_{t\to3}\dfrac{f(t)-f(3)}{t-3}=\lim\limits_{t\to3}\dfrac{(2t^2-4t+6)-12}{t-3}=\lim\limits_{t\to3}\dfrac{2t^2-4t-6}{t-3}=\lim\limits_{t\to3}\dfrac{2(t-3)(t+1)}{t-3}$

$=\lim\limits_{t\to3}2(t+1)=8$

18.設$f(x)=-2x^3+3x$，試求以$P(1，1)$為切點的切線方程式。

【解答】$3x+y-4=0$

【詳解】

切線斜率$f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(-2x^3+3x)-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(-2x^3+2)+(3x-3)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(-2)(x^3-1)+3(x-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}[(-2)(x^2+x+1)+3]=-3$

故以$P(1，1)$為切點的切線方程式為$y-1=(-3)(x-1)$，即 $3x+y-4=0$

19.設一質點在數線上移動，當時刻為x時，質點的位置為x^4-2x^2，求在$x=3$時的瞬時速度。

【解答】96

【詳解】

設$f(x)=x^4-2x^2$，

瞬時速度為$f'(3)=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x^4-2x^2)-63}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x^4-3^4)-2(x^2-3^2)}{x-3}$

$=\lim\limits_{x\to 3}[(x+3)(x^2+9)-2(x+3)]=6\cdot 18-2\cdot 6=96$

20.函數$f(x)=\sqrt{1+x+x^2}$，試求$f(x)$在$x=1$處的導數$f'(1)$之值。

【解答】$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

【詳解】

由導數的定義可得

$f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{3}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{3})(\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{3})}{(x-1)(\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{3})}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{3})}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+2}{\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{3}}=\dfrac{1+2}{\sqrt{3}+\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

21.設$P(3，15)$在$y=x^2+3x+1$拋物線外，試求拋物線過P點的切線方程式。

【解答】$5x-y=0$，$13x-y-24=0$

【詳解】

設切線在拋物線上的切點為$Q(t，t^2+3t+1)$

切線斜率為$f'(t)=\lim\limits_{x\to t}\dfrac{f(x)-f(t)}{x-t}=\lim\limits_{x\to t}\dfrac{(x^2+3x+1)-(t^2+3t+1)}{x-t}=\lim\limits_{x\to t}[(x+t)+3]=2t+3$

所求的切線方程式為$y-(t^2+3t+1)=(2t+3)(x-t)$

$P(3，15)$代入切線方程式得 $15=(2t+3)(3-t)+t^2+3t+1$，即$t^2-6t+5=0$，得$t=1$或 5

①當$t=1$時，切點$Q(1，5)$，切線斜率為 5，切線方程式為 $5x-y=0$

②當$t=5$時，切點$Q(5，41)$，切線斜率為 13，切線方程式為 $13x-y-24=0$

22.試求曲線$y=x^3+3x$上斜率為 15 的切線方程式。

【解答】$15x-y\pm 16=0$

【詳解】設切點為$Q(t，t^2+3t)$，切線斜率

$f'(t)=\lim\limits_{x\to t}\dfrac{f(x)-f(t)}{x-t}=\lim\limits_{x\to t}\dfrac{(x^3+3x)-(t^3+3t)}{x-t}=\lim\limits_{x\to t}[(x^2+xt+t^2)+3]=3t^2+3$

$f'(t)=15$，所以 $3t^2+3=15$，$t=\pm 2$

①當 $t=2$ 時，切點 $Q(2，14)$，切線方程式爲 $y-14=15(x-2)$，得 $15x-y-16=0$

②當 $t=-2$ 時，切點 $Q(-2，-14)$，切線方程式爲 $y+14=15(x+2)$，得 $15x-y+16=0$

23.設 $f(x)=\begin{cases}3x^2,\ x\ge 0\\ -x，x<0\end{cases}$，試求 $f'(0)$之値。

【解答】不存在

【詳解】當 $x>0$ 時，$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{3x^2-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}3x=0$。當 $x<0$ 時，$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}(-1)=-1$

因爲 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{3x^2-0}{x-0}\ne\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x-0}{x-0}$，故 $f'(0)$不存在

24.設 $f(x)=\dfrac{1}{2x-3}$，試求以 $P(2，1)$爲切點的切線方程式。

【解答】$2x+y-5=0$

【詳解】

以 $P(2，1)$爲切點的切線斜率爲 $f'(2)$

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{2x-3}-1}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{-2x+4}{(2x-3)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{-2}{2x-3}=-2$$

切線方程式 $y-1=(-2)(x-2)$，即 $2x+y-5=0$

25.設 $f(x)=\begin{cases}x^2\quad，x\ge 1\\ ax+b，x<1\end{cases}$，若 $f'(1)$存在，試求 a，b 之值。

【解答】$a=2$，$b=-1$

【詳解】

連續+可微分 $\Rightarrow$ 設 $g(x)=x^2$，$h(x)=ax+b$，且 $g(1)=h(1)$ 及 $g'(1)=h'(1)$ 解 a，b 之值。

26.設 $f(x)=x^2+\dfrac{1}{x}$，試求 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x-h)}{h}$。

【解答】$4x-\dfrac{2}{x^2}$

【詳解】

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)-f(x)]+[f(x)-f(x-h)]}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(x+(-h))-f(x)}{(-h)}=f'(x)+f'(x)=2f'(x)$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{[(x+h)^2+\frac{1}{x+h}]-(x^2+\frac{1}{x})}{h}=\lim_{h\to 0}[(2x+h)-\frac{1}{x(x+h)}]=2x-\frac{1}{x^2}$$

故得 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x-h)}{h}=4x-\dfrac{2}{x^2}$

27.設一質點在數線上運動，當時刻為x時，此質點的坐標為 $2x^2+6x-3$。求在$x=3$時，該質點的位置及當時的瞬時速度。

【解答】該質點位置為 33，瞬時速度為 18

【詳解】

設$f(x)=2x^2+6x-3$

①當$x=3$時，該質點的位置為$f(3)=2\cdot 3^2+6\cdot 3-3=33$

②當$x=3$時，該質點的瞬時速度為

$$f'(3)=\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(2x^2+6x-3)-33}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{2(x-3)(x+6)}{x-3}=\lim_{x\to 3}2(x+6)=18$$

28.設$f(x)$為一多項函數，且$f(3)=0$，$f'(3)=-8$，試求$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3+5h)}{h}$之值。

【解答】-40

【詳解】 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3+5h)}{h}=5\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3+5h)-f(3)}{5h}=5f'(3)=-40$

29.過$A(-1，1)$切Γ：$y=x^2-2x+2$之直線為__________，若B與C表二切點時，$\overleftrightarrow{BC}$之方程式為__________。

【解答】$y=1$ 或 $8x+y+7=0$，$4x+y-5=0$

【詳解】

$y'=2x-2$，令切點(a,b)，此時$b=a^2-2a+2$ 且$\dfrac{b-1}{a+1}=2a-2$（切線斜率），得$\begin{cases}b=a^2-2a+2\\ b=2a^2-1\end{cases}$

$\therefore$ $(a，b)=(1，1)$或$(-3，17)$。又二切點$B(1，1)$及$C(-3，17)$使$\overleftrightarrow{BC}$：$4x+y-5=0$

30.寫出下列各函數的導函數：

(1)若$f(x)=2x^3+3x^2+5x+12$，則$f'(x)=$__________。

(2)若$f(x)=(x^2+x+1)(x^2-x+10)$，則$f'(x)=$__________。

(3)若$f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$，則$f'(x)=$__________。

(4)若$f(x)=\sqrt{1+x+x^2}$，則$f'(x)=$__________。

(5)若$f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{1}{x^2}$，則$f'(x)=$__________。

【解答】(1) $6x^2+6x+5$ (2) $4x^3+20x+9$ (3) $\dfrac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$ (4) $\dfrac{2x+1}{2\sqrt{1+x+x^2}}$ (5) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{2}{x^3}$

【詳解】

(1) $f'(x)=6x^2+6x+5$

(2) $f'(x)=(x^2+x+1)'(x^2-x+10)+(x^2+x+1)(x^2-x+10)'$

$=(2x+1)(x^2-x+10)+(x^2+x+1)(2x-1)=4x^3+20x+9$

(3) $f'(x)=\dfrac{(x)'(x^2+1)-x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=\dfrac{1\cdot(x^2+1)-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$

(4) $f'(x)=\dfrac{(1+x+x^2)'}{2\sqrt{1+x+x^2}}=\dfrac{2x+1}{2\sqrt{1+x+x^2}}$

(5) $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-2x^{-3}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{2}{x^3}$

31.設曲線$y=f(x)$在$x=-2$ 處的切線方程式為 $y=3x+5$ ，若 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x^2}$ ，則導數$g'(-2)=$____ 。

【解答】 $\dfrac{1}{2}$

【詳解】

曲線 $y=f(x)$在 $x=-2$ 處的切線斜率為 3，即 $f'(-2)=3$

$y=f(x)$與直線 $y=3x+5$ 相切於 $x=-2$ 處，且 $y=f(-2)=3\times(-2)+5=-1$

$g'(x)=\dfrac{f'(x)x^2-2xf(x)}{x^4}=\dfrac{f'(x)x-2f(x)}{x^3}$ ，$g'(-2)=\dfrac{f'(-2)(-2)-2f(-2)}{(-2)^3}=\dfrac{3(-2)-2\cdot(-1)}{-8}=\dfrac{1}{2}$

32.若曲線$f(x)=-x^3+3x^2+6x-2$ 上有一斜率最大的切線，則最大斜率為__________，此時切線方程式為__________ 。

【解答】$f'(1)=9$， $9x-y-3=0$

【詳解】

$f(x)$ 的導函數$f'(x)=-3x^3+3x^2+6x+6=-3(x^2-2x+1)+9=-3(x-1)^2+9$

當$x=1$ 時，$f'(x)$有最大值$f'(1)=9$，此時切點坐標為(1，$f(1)$) = (1，6)

故所求最大切線斜率之切線方程式為$y=f'(1)(x-1)+f(1)$

即$y=9(x-1)+6$，亦即為 $9x-y-3=0$

33.若多項式 $f(x)$ 以 $(x-1)^2$ 除之，餘式為 $3x+2$，則$f'(1)=$______，而$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3f(1)-f(x^2)}{x-1}=$____ 。

【解答】3，9

【詳解】

因為多項式 $f(x)$ 以$(x-1)^2$除之，餘式為 $3x+2$

$f(x)=(x-1)^2g(x)+3x+2$ ，其中 $g(x)$ 為一多項式

$f(x)$ 導函數為$f'(x)=2(x-1)g(x)+(x-1)^2g'(x)+3$，得$f(1)=5$，而$f'(1)=3$

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3f(1)-f(x^2)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{[x^3f(1)-f(1)]-[f(x^2)-f(1)]}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x^3-1)f(1)}{x-1}-\lim_{x\to1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}(x^2+x+1)f(1)-\lim_{x\to1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}\lim_{x\to1}(x+1)=3f(1)-2f'(1)=3\cdot5-2\cdot3=9$$

34.過$A(1，2)$，切Γ：$y=x^3-3x+4$ 之直線方程式為__________或__________ 。

【解答】$y-2=0$，$9x+4y-17=0$

【詳解】

A在Γ上及y的導數為 $y'=3x^2-3$。切線斜率為 $3\cdot1^2-3=0$ 時，切線方程式為$y-2=0$

設切點為$(a，b)$，由$b=a^3-3a+4$ 及 $3a^2-3=\dfrac{b-2}{a-1}$（切線斜率），得

$$\begin{cases}b=a^3-3a+4 & \cdots\cdots① \\ b=3a^3-3a^2-3a+5 & \cdots\cdots②\end{cases}$$

②－①：$0 = 2a^3 - 3a^2 + 1$，$0 = (2a + 1)(a - 1)^2$，$a = 1$ 或 $-\dfrac{1}{2}$

∴ $(a，b) = (1，2)$或$(-\dfrac{1}{2}，\dfrac{43}{8})$，切線斜率爲 0 或 $-\dfrac{9}{4}$

故切線方程式爲$y - 2 = 0$ 或 $9x + 4y - 17 = 0$

35.直線L：$ax + y = 4$ 切曲線Γ：$y = x^5$於點P，則$a =$__________，P的坐標爲__________。

【解答】-5，$(-1，-1)$

【詳解】

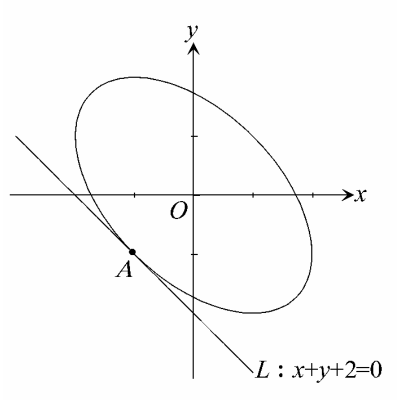
$y = -ax + 4 \Rightarrow m = -a$；又 $y' = 5x^4$，令切點爲$(r，s)$必滿足$\begin{cases} ar + s = 4 & \cdots\cdots① \\ s = r^5 & \cdots\cdots② \\ -a = 5r^4 & \cdots\cdots③ \end{cases}$

②，③代入①中：$-5r^5 + r^5 = 4$，$r^5 = -1$，得$r = -1$，$s = -1$，$a = -5$，切點$(-1，-1)$

36.Γ：$x^2 + xy + y^2 = 3$，$A(-1，-1)$，則過A切Γ之直線方程式爲__________。

【解答】$x + y + 2 = 0$

【詳解】



$y^2 + xy + (x^2 - 3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = \dfrac{-1}{2}(x \pm \sqrt{12 - 3x^2})$

令Γ'：$y = \dfrac{-1}{2}(x + \sqrt{12 - 3x^2})$，$A(-1，-1)$在$\Gamma'$($\Gamma$ 兩部分之一)，

即$f(x) = \dfrac{-1}{2}(x + \sqrt{12 - 3x^2})$，$f(-1) = -1$

$$f'(-1) = \lim_{x \to -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \to -1} \frac{\frac{-1}{2}(x + \sqrt{12 - 3x^2}) + 1}{x + 1}$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{[(-x + 2) - \sqrt{12 - 3x^2}][(-x + 2) + \sqrt{12 - 3x^2}]}{2(x + 1)[(-x + 2) + \sqrt{12 - 3x^2}]}$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{4(x + 1)(x - 2)}{2(x + 1)[(-x + 2) + \sqrt{12 - 3x^2}]} = \lim_{x \to -1} \frac{2(x - 2)}{(-x + 2) + \sqrt{12 - 3x^2}} = \frac{-6}{6} = -1 \text{（切線斜率）}$$

∴ 過A切Γ'之直線爲$x + y + 2 = 0$ 即Γ的切線

※可用切線公式

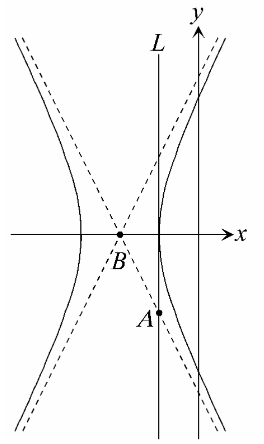
$P(x_0，y_0)$在二次曲線Γ：$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ 上，

則L切Γ 於點P：$ax_0 x + b(\dfrac{y_0 x + x_0 y}{2}) + cy_0 y + d(\dfrac{x + x_0}{2}) + e(\dfrac{y + y_0}{2}) + f = 0$。

37.$A(-1，-2)$，$B(-2，0)$及雙曲線Γ：$4x^2 - y^2 + 16x + 12 = 0$，則過$A$與$\Gamma$相切之直線方程式爲______________，過B與Γ相切之直線共有__________條。

【解答】$x + 1 = 0$，0

【詳解】



切點$(a，b)$時，切線L：$4ax-by+8(x+a)+12=0$

(1) A在L上：

$$\begin{cases}4a^2-b^2+16a+12=0\\-4a+2b+8(-1+a)+12=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b^2=4a^2+16a+12\\b=-2a-2\end{cases}\Leftrightarrow(a，b)=(-1，0)$$

即切點$(-1，0)$，切線L：$x+1=0$

(2) B在L上：

$$\begin{cases}4a^2-b^2+16a+12=0\\-8a+8(-2+a)+12=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4a^2-b^2+16a+12=0\\-4=0\end{cases}（矛盾）$$

∴　切線L不存在，過B切Γ之直線共有 0 條，圖示如上

38.$A(1，-3)$，Γ：$y=x^2+2x+3$，由A引曲線Γ的二切線，若切點爲P與Q時，$\overleftrightarrow{PQ}$之方程式爲__________。

【解答】$4x-y+11=0$

【詳解】

令切點$(a，b)$，滿足$b=a^2+2a+3$ 及$\dfrac{b+3}{a-1}=2a+3$（斜率）

$$\begin{cases}b=a^2+2a+3\\b=2a^2-5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0=a^2-2a-8\\b=2a^2-5\end{cases}\Leftrightarrow(a，b)=(-2，3)或(4，27)$$

得切點$P(-2，3)$，$Q(4，27)$，$\overleftrightarrow{PQ}$：$4x-y+11=0$

39.設$f(x)=\sqrt{x+(x^2+1)^3}$，則$f'(1)=$__________。

【解答】$\dfrac{25}{6}$

【詳解】

$$f(x)=[x+(x^2+1)^3]^{\frac{1}{2}}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}[x+(x^2+1)^3]^{-\frac{1}{2}}[1+3(x^2+1)^2\cdot 2x]=\frac{1+3(x^2+1)^2 2x}{2\sqrt{x+(x^2+1)^3}}，$$

$$f'(1)=\frac{1+6(1+1)^2}{2\sqrt{1+(1+1)^3}}=\frac{25}{6}$$

40.已知$f(x)=x^3+ax^2+bx$的圖形過點$P(-1，-5)$，而在點P的切線垂直於直線$x+2y-5=0$，則數對$(a，b)=$__________。

【解答】$(5，9)$

【詳解】

$f(x)$的第一階導函數$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$f(x)$圖形在點$P(-1，-5)$的切線垂直直線$x+2y-5=0$，故$f'(-1)=3-2a+b=2$……①

點$P(-1，-5)$在$y=f(x)$圖形上，得$f(-1)=-1+a-b=-5$……②

由①及②聯立，解得$a=5$，$b=9$

41.設$g(x)=f(\dfrac{x-1}{x+1})$，且$f(y)=y^3$，則$g'(y)=$__________。

【解答】$\dfrac{6(y-1)^2}{(y+1)^4}$

【詳解】

$g(y)=f(\dfrac{y-1}{y+1})=(\dfrac{y-1}{y+1})^3$，依連鎖規則

$\Rightarrow g'(y)=3(\dfrac{y-1}{y+1})^2(\dfrac{y-1}{y+1})'=3(\dfrac{y-1}{y+1})^2[\dfrac{1\cdot(y-1)-(y+1)\cdot 1}{(y+1)^2}]=3(\dfrac{y-1}{y+1})^2\dfrac{2}{(y+1)^2}=\dfrac{6(y-1)^2}{(y+1)^4}$

42.曲線$y=\dfrac{x}{x+1}$上以(0，0)爲切點的切線斜率爲__________。

【解答】1

【詳解】$y=\dfrac{x}{x+1}$在(0，0)上的切線斜率爲$\dfrac{x}{x+1}$在$x=0$之處的導數

$y=f(x)=\dfrac{x}{x+1}$，則$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x}{x+1}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{1}=1$，切線斜率 $=1$

43.設函數$f(x)=\dfrac{3}{2}\sqrt{x^2-4}$，則$y=f(x)$上以點($\dfrac{4}{\sqrt{3}}$，$\sqrt{3}$)爲切點的切線方程式爲__________。

【解答】$3x-y-3\sqrt{3}=0$

【詳解】

$f'(\dfrac{4}{\sqrt{3}})=\lim\limits_{x\to\frac{4}{\sqrt{3}}}\dfrac{f(x)-f(\frac{4}{\sqrt{3}})}{x-\frac{4}{\sqrt{3}}}=\lim\limits_{x\to\frac{4}{\sqrt{3}}}\dfrac{\frac{3}{2}\sqrt{x^2-4}-\sqrt{3}}{x-\frac{4}{\sqrt{3}}}=\lim\limits_{x\to\frac{4}{\sqrt{3}}}\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3}\sqrt{x^2-4}-2)}{\frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{3}x-4)}$

$=\lim\limits_{x\to\frac{4}{\sqrt{3}}}\dfrac{3(\sqrt{3}\sqrt{x^2-4}-2)}{2(\sqrt{3}x-4)}=\lim\limits_{x\to\frac{4}{\sqrt{3}}}\dfrac{3}{2}\times\dfrac{(\sqrt{3}\sqrt{x^2-4}-2)(\sqrt{3}\sqrt{x^2-4}+2)}{(\sqrt{3}x-4)(\sqrt{3}\sqrt{x^2-4}+2)}$

$=\lim\limits_{x\to\frac{4}{\sqrt{3}}}\dfrac{3}{2}\times\dfrac{3(x^2-4)-4}{(\sqrt{3}x-4)(\sqrt{3}\sqrt{x^2-4}+2)}=\lim\limits_{x\to\frac{4}{\sqrt{3}}}\dfrac{3}{2}\times\dfrac{3x^2-16}{(\sqrt{3}x-4)(\sqrt{3}\sqrt{x^2-4}+2)}$

$=\lim\limits_{x\to\frac{4}{\sqrt{3}}}\dfrac{3}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}x+4}{\sqrt{3}\sqrt{x^2-4}+2}=\dfrac{3}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}\times\frac{4}{\sqrt{3}}+4}{\sqrt{3}\sqrt{\frac{16}{3}-4}+2}=\dfrac{3}{2}\times\dfrac{8}{2+2}=3$

$y=f(x)$在($\dfrac{4}{\sqrt{3}}$，$\sqrt{3}$)處的切線方程式爲$y-\sqrt{3}=3(x-\dfrac{4}{\sqrt{3}})$，即$3x-y-3\sqrt{3}=0$

44.若函數$y=x^2+ax+b$與函數$y=\dfrac{8}{x}$的圖形相交於點(2，4)，則

(1) $y=\dfrac{8}{x}$上以(2，4)爲切點的切線方程式爲__________。

(2)若兩函數圖形在(2，4)的切線互相垂直，則數對(a，b) =__________。

【解答】(1) $2x+y=8$ (2) ($\dfrac{-7}{2}$，7)

【詳解】

(1) $y=f(x)=\dfrac{8}{x}$，則$f'(2)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\frac{8}{x}-\frac{8}{2}}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4(2-x)}{x(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-4}{x}=-2$

切線方程式爲$y-4=-2(x-2)$，即 $2x+y=8$

(2) $y=x^2+ax+b$與$y=\dfrac{8}{x}$相交於點(2，4)時，$4=4+a\cdot 2+b$，即 $2a+b=0$

由(1)的結果與(2)的條件可知；$y=x^2+ax+b$在(2，4)的切線斜率爲$\dfrac{1}{2}$，

即在$x=2$ 時，$y'=2x+a=\dfrac{1}{2}$，得$a=\dfrac{1}{2}-4=\dfrac{-7}{2}$，

又 $2a+b=0$，故$b=7$，數對$(a，b)=(\dfrac{-7}{2}，7)$

45.曲線$x^3+4x+4y-28=0$，以點$(4，k)$爲切點的切線方程式爲____，法線方程式爲________。

【解答】$13x+y-39=0$，$x-13y-173=0$

【詳解】

切點$(4，k)$在曲線$x^3+4x+4y-28=0$ 上，$64+16+4k-28=0$，$k=-13$

此時$y=f(x)=\dfrac{-1}{4}x^3-x+7$，及$f'(x)=\dfrac{-3}{4}x^2-1$，$f'(4)=\dfrac{-3}{4}(16)-1=-13$，

切線方程式爲$y+13=-13(x-4)$，即 $13x+y-39=0$

法線方程式爲$y+13=\dfrac{1}{13}(x-4)$，即 $13y+169=x-4$，亦即$x-13y-173=0$

46.設 $f(x)$爲二次函數，若$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x-2}=2$ 且 $f'(x)=-2$，試求 $f(x)$。

【解答】 $f(x)=x^2-2x$

【詳解】

設 $f(x)=ax^2+bx+c$，因爲$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x-2}=2$存在，所以$f(2)=4a+2b+c=0$……①

$f'(x)=2ax+b$，得$f'(0)=0+b=-2$，即$b=-2$ 代入①得$c=4-4a$……②

$f(x)=ax^2+bx+c=ax^2-2x+(4-4a)=a(x^2-4)-2(x-2)=(x-2)[a(x+2)-2]$

已知$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)[a(x+2)-2]}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}[a(x+2)-2]=4a-2=2$

即$a=1$，將其代入②得$c=0$，故 $f(x)=x^2-2x$

47.設 $f(x)=\dfrac{5x^2+6x+1}{x+1}$，試求以 P (1，6)爲切點的切線方程式。

【解答】$5x-y+1=0$

【詳解】

$f'(x)=\dfrac{(10x+6)(x+1)-(5x^2+6x+1)(1)}{(x+1)^2}=\dfrac{5x^2+10x+5}{(x+1)^2}=5$，切線方程式的斜率爲 $f'(1)=5$

故以 P(1，6)爲切點的切線方程式爲 $y-6=5(x-1)$，即 $5x-y+1=0$

48.設函數 $f(x)=|x(x-4)|+x+2$，試求 $f(x)$的導函數。

【解答】$f'(x)=\begin{cases} 2x-3, & 當\ x<0\ 或\ x>4 \\ -2x+5, & 當\ 0<x<4 \end{cases}$

【詳解】

當$x<0$ 或$x>4$ 時，則$f(x)=x(x-4)+x+2=x^2-3x+2$，此時$f'(x)=2x-3$

當 $0<x<4$ 時，則$f(x)=-x(x-4)+x+2=-x^2+5x+2$，此時$f'(x)=-2x+5$

①當$x=0$ 時，$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(-x^2+5x+2)-2}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}(-x+5)=5$，

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{(x^2-3x+2)-2}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}(x-3)=-3$

所以$f'(0)$不存在

②同理當$x=4$ 時，$\lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{f(x)-f(4)}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4^+}(x+1)=5$，$\lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{f(x)-f(4)}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4^-}[-(x-1)]=-3$

所以$f'(4)$也不存在

綜合①②上述可得$f'(x)=\begin{cases} 2x-3, & 當\ x<0\ 或\ x>4 \\ -2x+5, & 當\ 0<x<4 \end{cases}$