高雄市明誠中學 高三數學平時測驗			日期：95.04.27		
範圍	Book6 1-3 連續	班級	普三 班	姓名	
		座號			

一、是非題(每題 5 分)

1. 設 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$，則 $f(x)$ 在實數集合 R 中為一連續函數。

【解答】╳

【詳解】

因為 $1-x^2\ge 0\Rightarrow x^2-1\le 0\Rightarrow -1\le x\le 1$，所以 $f(x)$ 的定義域為 $[-1，1]$，且 $f(x)$ 在定義域都連續，故 $f(x)$ 是閉區間 $[-1，1]$ 的連續函數，但不是到處連續的函數

2. 設 f 與 g 均為實變數函數，$f：A\to B$ 且 $g：B\to R$。若 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$ 且 $\lim\limits_{x\to b}g(x)$ 存在，則 $\lim\limits_{x\to a}g(f(x))=g(b)$。

【解答】╳

【詳解】若 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$ 且 $\lim\limits_{x\to b}g(x)=g(b)$，則 $\lim\limits_{x\to a}g(f(x))=g(b)$。（亦即 g 在 $x=b$ 處連續）

3. 設 $f(x)=\dfrac{x-3}{x^2+3}$，則 $f(x)$ 在實數集合 R 上為一連續函數。

【解答】○

【詳解】$f(x)$ 在 R 都有意義且 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\dfrac{a-3}{a^2+3}=f(a)$，任意 $a\in R$，即 $f(x)$ 為 R 上的連續函數

4. 設函數 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{|x|}，x\ne 0\\ 1\quad，x=0\end{cases}$，則 $f(x)$ 在實數集合 R 上為一連續函數。

【解答】╳

【詳解】$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{|x|}，x\ne 0\\ 1\quad，x=0\end{cases}$ 時，$f(x)=\begin{cases}1，x\ge 0\\ -1，x<0\end{cases}$，顯然 f 在 $x=0$ 時不連續

二、選擇題(每題 10 分)

1. 設方程式 $4x^2+ax+(a-13)=0$ 有一根介於 0 與 1 之間，另一根介於 -3 與 -2 之間，則

(A) $\dfrac{9}{2}<a<13$ (B) $\dfrac{23}{2}<a<13$ (C) $3<a<\dfrac{9}{2}$ (D) $\dfrac{9}{2}<a<\dfrac{23}{2}$ (E) $3<a<\dfrac{23}{2}$

【解答】(D)

【詳解】

設 $f(x)=4x^2+ax+(a-13)$，由 $f(0)f(1)<0$ 及 $f(-3)f(-2)<0$ 得不等式組

$$\begin{cases}f(0)f(1)<0\\ f(-3)f(-2)<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a-13)(4+a+a-13)<0\\ (16-2a+a-13)(36-3a+a-13)<0\end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases}(a-13)(2a-9)<0\\(3-a)(23-2a)<0\end{cases} \Leftrightarrow \frac{9}{2}<a<13$ 且 $3<a<\frac{23}{2}$

取交集，得 $\frac{9}{2}<a<\frac{23}{2}$

2. (複選)設 $f(x)$ 是連續函數，$g(x)$ 不是連續函數，則下列敘述何者正確？

(A) $f(x)+g(x)$ 必是連續函數　(B) $f(x)+g(x)$ 不是連續函數　(C) $f(x)\cdot g(x)$ 必是連續函數

(D) $f(x)\cdot g(x)$ 一定是不連續函數　(E) $f(x)\cdot g(x)$ 不一定是不連續函數

【解答】(B)(E)

【詳解】

已知 $f(x)$ 是連續函數，$g(x)$ 不是連續函數，則

① $f(x)+g(x)$ 不是連續函數　　② $f(x)\cdot g(x)$ 不一定是不連續函數

如：取 $f(x)=\sin x$，$x\in(-\pi，\pi)$，而 $g(x)=\frac{1}{x}$，$x\in(-\pi，\pi)$，則 $f(x)\cdot g(x)$ 不是連續函數

若取 $f(x)=0$，則 $f(x)\cdot g(x)$ 是連續函數。故應選(B)(E)

3. (複選)下列敘述哪些是正確的？

(A) $f(x)=x^2-3x+2$ 在 R 上是連續函數　　(B) $f(x)=\log_2(x^2+1)$ 在 R 上是連續函數

(C) $f(x)=\tan x$ 在區間 $(-\pi，\pi)$ 上是連續函數　　(D) $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ 是 R 上連續函數

(E) $f(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x}，x\neq 0\\0，x=0\end{cases}$ 是 R 上連續函數

【解答】(A)(B)(E)

【詳解】

(A)多項函數是連續函數

(B)令 $h(x)=x^2+1$，$g(x)=\log_2 x$，則 $f(x)=(h(x))=\log_2(x^2+1)$

因 $h(x)=x^2+1$ 是連續函數，$g(x)=\log_2 x$ 在 $x>0$ 是連續函數，故 $f(x)$ 在 R 上是連續函數

(C) $f(x)=\tan x$ 在 $x=\pm\frac{\pi}{2}$ 處極限不存在，故 $f(x)$ 在區間 $(-\pi，\pi)$ 上不是連續函數

(D)因 $f(x)$ 在 $x=0$ 處不存在，故 $f(x)$ 在 R 上不是連續函數

(E)①因 $f(x)$ 在 $x\neq 0$ 處均連續

②考慮 $x\neq 0$ 時，$0<\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leq 1$，故 $0<\left|x\sin\frac{1}{x}\right|\leq|x|$

但 $\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$，由夾擠定理知：$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(x\sin\frac{1}{x})=0=f(0)$，故 $f(x)$ 在 $x=0$ 處也連續

由①及②知：$f(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x}，x\neq 0\\0，x=0\end{cases}$ 是 R 上連續函數

三、填充題(每題 10 分)

1. 若$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-6x-16}{x+2}，x\neq -2\\ k，x=-2\end{cases}$是$R$上的連續函數，則$k$的值為 ＿＿＿＿＿。

【解答】-10

【詳解】

$f(x)=\begin{cases}x-8，x\neq -2\\ k，x=-2\end{cases}$是 R 上的連續函數，所以 $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=f(-2)=k$

$\lim\limits_{x\to -2} f(x)=\lim\limits_{x\to -2}(x-8)=-2-8=-10$，且 $f(-2)=k$，$\lim\limits_{x\to -2} f(x)=f(-2)=k$，故 $k=-10$

2. 若函數$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x}{\sin x}，x\neq n\pi，n\in Z\\ 1，x=n\pi，n\in Z\end{cases}$，則$f(x)$不連續的$x$值為 ＿＿＿＿＿。

【解答】$x=n\pi$，$n\in Z$

【詳解】

當 $x\neq n\pi$，$n\in Z$ 時，$\sin x\neq 0$

得 $f(x)=\dfrac{\sin 2x}{\sin x}=\dfrac{2\sin x\cos x}{\sin x}=2\cos x$，故 $f(x)=\begin{cases}2，x\neq n\pi，n=2k\in Z\\ -2，x\neq n\pi，n=2k-1\in Z\\ 1，x=n\pi，n\in Z\end{cases}$

所以①n 為偶數時，$\lim\limits_{x\to n\pi} f(x)=2$　②n 為奇數時，$\lim\limits_{x\to n\pi} f(x)=-2$　②$f(n\pi)=1$

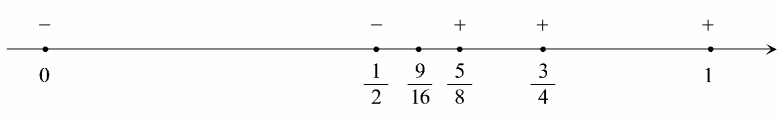
由①②與③知 $\lim\limits_{x\to n\pi} f(x)\neq f(n\pi)$，故 $f(x)$不連續的 x 值為 $x=n\pi$，$n\in Z$

3. 若用二分逼近法求方程式$x^3+x^2+x-1=0$ 在 0 與 1 之間實根的近似值，使其誤差要小於 $\dfrac{1}{16}$，則近似值為＿＿＿＿＿。

【解答】$\dfrac{9}{16}$

【詳解】

要求 0 與 1 之間的一實根，如圖為一條標示 0 與 1 的數線



依序計算下列各函數值，並在數線上標示±號，$f(0)=-1<0$，$f(1)=2>0$

$f(\frac{1}{2})=\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{8}<0$，故根在$\frac{1}{2}$與 1 之間

$f(\frac{3}{4})=\frac{27}{64}+\frac{9}{16}+\frac{3}{4}-1=\frac{47}{64}>0$，故根在$\frac{1}{2}$與$\frac{3}{4}$之間

$f(\frac{5}{8})=\frac{125}{512}+\frac{25}{64}+\frac{5}{8}-1=\frac{133}{512}>0$，故根在$\frac{1}{2}$與$\frac{5}{8}$之間

取$\frac{1}{2}$與$\frac{5}{8}$兩點的中點$\frac{9}{16}$作為$f(x)=0$ 近似根，其誤差小於$\frac{1}{16}$　$(\because \frac{1}{2}-\frac{5}{8}=\frac{1}{16})$

4. 設函數$f(x)=\begin{cases}-2x-5，x<a\\ x+1，a\le x<3\\ 2x+b，x\ge 3\end{cases}$，若$f(x)$是定義於$R$的連續函數，則數對$a^2+b^2$之值爲______。

【解答】8

【詳解】

因$f(x)$是定義於R的連續函數，故$f(x)$在$x=a$處及$x=3$處均連續

①$f(x)$在$x=a$處連續 $\Leftrightarrow$ $f(x)$在$x=a$處的左右極限相等

即$\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=f(a)$ $\Leftrightarrow$ $-2a-5=a+1$，得$a=-2$

②$f(x)$在$x=3$處連續 $\Leftrightarrow$ $f(x)$在$x=3$處的左右極限相等

即$\lim\limits_{x\to 3^-}f(x)=f(3)$ $\Leftrightarrow$ $3+1=6+b$，得$b=-2$

由①②得$a=-2$，$b=-2$，故$a^2+b^2=8$

5. 設$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3+6x^2+11x+6}{x(x+1)}，x\ne 0 \text{ 且 } x\ne -1\\ -2 \qquad\qquad，x=0 \text{ 且 } x=-1\end{cases}$，則$f(x)$在哪些位置不連續？__________。

【解答】$x=0$

【詳解】

$x\ne 0$ 且 $x\ne -1$ 時，$f(x)=\dfrac{(x+1)(x+2)(x+3)}{x(x+1)}=\dfrac{(x+2)(x+3)}{x}$

$\lim\limits_{x\to -1}f(x)=\dfrac{(-1+2)(-1+3)}{-1}=-2=f(-1)$且$\lim\limits_{x\to a}f(x)=\dfrac{(a+2)(a+3)}{a}=f(a)$

$a\ne -1$ 且 $a\ne 0$，但$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$不存在，所以$f(x)$只在 $x=0$ 處不連續

6. 設$g(x)=\sqrt{x-1}$，$f(x)=\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}$對於$x\ge 1$，則$\lim\limits_{x\to 2}f(x)=$__________，$f$在哪些點不連續？__________。

【解答】1，$x=1$

【詳解】$f(x)=\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}=\dfrac{\sqrt{x-1}}{x-1}=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$（$\because$ $g(1)=0$）

$\therefore$ $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2-1}}=1$，且 f 在 $x=1$ 不連續

7. 已知$x^3-3x^2+10x+60=0$恰有一實根，且它在兩個連續整數n與$n+1$之間，則$n=$______。

【解答】 -3

【詳解】

令$f(x)=x^3-3x^2+10x+60$，則$f(x)$爲R上的連續函數

$f(-3)=-27-27-30+60=-24$，$f(-2)=-8-12-20+60=20$

由勘根定理知，$f(x)=0$ 在$(-3，-2)$區間內有一實根，所以$n=-3$

8. 設$f(x)=x^4+ax^3+2x^2-3x-2a=0$在開區間$(-2,-1)$與$(1,2)$各恰有一實根，則實數$a$的範圍爲__________。

【解答】$2<a<3$

【詳解】

因爲$f(x)=0$在開區間$(-2,-1)$與$(1,2)$各恰有一實根，依據勘根定理知

$$\begin{cases} f(-2)f(-1)<0 \\ f(1)f(2)<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-10a+30)(-3a+6)<0 \cdots\cdots ① \\ (-a)(6a+18)<0 \quad \cdots\cdots ② \end{cases}$$

由①解得$2<a<3$；由②解得$a<-3$或$a>0$。兩者取交集，可得$2<a<3$

9. 設方程式$f(x)=12x^3-8x^2-23x+11=0$在開區間$(a，a+1)$，$(b，b+1)$，$(c，c+1)$各有一根，若$a，b，c\in Z$且$a<b<c$，則$b=$__________，而$a+b+c=$__________。

【解答】0，-1

【詳解】

利用綜合除法計算$f(x)$的一些函數值如下表

x	-2	-1	0	1	2
$y=f(x)$	-71	14	11	-8	29

因爲$f(-2)f(-1)<0$，$f(0)f(1)<0$，$f(1)f(2)<0$

由勘根定理知：$f(x)=0$在開區間$(-2，-1)$，$(0，1)$，$(1，2)$各恰有一實根

$a=-2$，$b=0$，$c=1$，亦即$a+b+c=-1$

10.設$g(x)=\begin{cases} x^2 & ，x\le 1 \\ ax+b & ，1<x<2 \\ x^3 & ，x\ge 2 \end{cases}$，若$g：R\to R$是連續函數，則$a=$________，$b=$________。

【解答】7，-6

【詳解】

因爲$g：R\to R$是連續函數，所以g在$x=1$及$x=2$處均連續

故$\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)=g(1) \Leftrightarrow a+b=1\cdots\cdots①$。

$\lim\limits_{x\to 2^-} g(x)=g(2) \Leftrightarrow 2a+b=8\cdots\cdots②$

解①與②，得$a=7$，$b=-6$

11.設$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+4x-12}{x^2+x-6} & ，x\ne 2 \\ 0 & ，x=2 \end{cases}$，試求$\lim\limits_{x\to 2} f(x)$之值=________________，$f(x)$在$x=2$處是否連續？______________

【解答】$\dfrac{8}{5}$，否

【詳解】

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+4x-12}{x^2+x-6}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+6)}{(x-2)(x+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+6}{x+3}=\frac{8}{5}\ne f(2)$$，$f(x)$在$x=2$是不連續的

12.(複選)判斷下列各函數是否「到處連續」？(A)$f(x)=x^6+8x^4-2x^2+5$　(B) $g(x)=2^{x+2}-3$

(C) $h(x)=\sin(3x+\frac{\pi}{4})$　(D) $p(x)=\frac{x+1}{x(x-2)}$　(E)$q(x)=\frac{1}{x}$　(F)$r(x)=\sqrt[3]{2x+1}$

【解答】到處連續：(A)(B)(C)(F)

【詳解】

(A)多項函數均是到處連續

(B)指數函數的指數 x 並沒有任何限制，所以它是到處連續

(C) $y=\sin x \xrightarrow[\frac{1}{3}\text{倍}]{\text{左右伸縮}} y=\sin 3x \xrightarrow[\frac{\pi}{12}]{\text{向左平移}} y=\sin 3(x+\frac{\pi}{12})$

因 $y=\sin x$ 是到處連續，所以 $y=\sin(3x+\frac{\pi}{4})$也是到處連續

(D) $p(x)=\frac{x+1}{x(x-2)}$ 在 $x=0$ 及 $x=2$ 不連續

(E) $q(x)=\frac{1}{x}$ 在 $x=0$ 處不連續

(F) $r(x)=\sqrt[3]{2x+1}$ 立方根內的 x 並沒有任何限制，所以 $r(x)$是到處連續

13.設 k 為一定數，欲使函數 $f(x)=\begin{cases} x^3+2，x\ge 1 \\ -x^2+k，x<1 \end{cases}$ 為一連續函數，則 k 之值為何？________

【解答】4

【詳解】$x=1$ 代入$x^3+2=1^3+2=3$。$x=1$ 代入 $-x^2+k=-1+k=3$，$k=4$

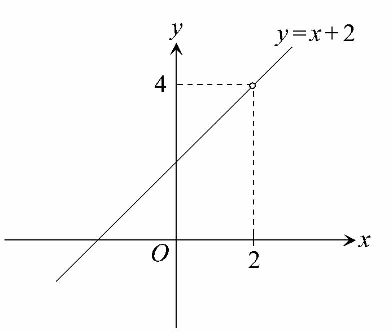
14.設 $f(x)=\begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, x\ne 2 \\ k\quad，x=2 \end{cases}$，欲使 $f(x)$為到處連續函數，則 k 值為何？______________

【解答】$k=4$

【詳解】

當 $x\ne 2$ 時，$f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}=x+2$，其圖形為一直線（但少一點 $x=2$）

如果要補上這一點，則必須 $k=f(2)=4$，所以欲使 $f(x)$為到處連續，則 $k=4$



15.判斷方程式 $10^x-6x^2+3x=50$ 是否有實數解？_______________

【解答】有

【詳解】

(Sol一)：

令$f(x) = 10^x - 6x^2 + 3x$，則$f(0) = 1< 50$，$f(2) = 82 > 50$，且$f(x)$是到處連續函數

由中間值定理知：存在$\alpha\in(0，2)$，使得$f(\alpha) = 10^\alpha - 6\alpha^2 + 3\alpha = 50$

故方程式 $10^x - 6x^2 + 3x = 50$ 有實數解

(Sol二)：畫圖$\begin{cases} y = 10^x \\ y = 6x^2 - 3x + 50 \end{cases}$觀察二圖形交點

16.判斷方程式$\log x + 3x^2 + 2x = 10$ 是否有實數解？________________

【解答】有

【詳解】

設$f(x) = \log x + 3x^2 + 2x$，則$f(1) < 10$，$f(10) >10$

17.設函數$f(x) = x + \sqrt{x}$ ，試求：

(1)$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{f(x) - f(4)}{x - 4}$之值_______________

(2)設函數f在集合 A 上都連續，求最大的集合 A=_____________________

【解答】(1)$\dfrac{5}{4}$　(2) $A = \{x \mid x\geq 0\}$

【詳解】

(1)$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x + \sqrt{x}) - (4 + \sqrt{4})}{x - 4} = \lim\limits_{x\to 4}(1 + \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x - 4})$

$= \lim\limits_{x\to 4}(1 + \dfrac{1}{\sqrt{x} + 2}) = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{4} + 2} = \dfrac{5}{4}$

(2)函數$f(x) = x + \sqrt{x}$是多項函數 x 與無理函數$\sqrt{x}$的和函數

因爲多項函數 x 在 R 上到處連續，而$\sqrt{x}$是定義在區間$[0，\infty)$上的連續函數

故函數$f(x)$在 $R \cap [0，\infty) = [0，\infty)$上連續，亦即最大集合 $A = \{x \mid x\geq 0\} = [0，\infty)$

18.試求方程式 $5x^3 + 11x^2 - 7x - 10 = 0$ 的實根位置，在哪些連續整數之間？________________

【解答】$(-3，-2)$，$(-1，0)$及$(1，2)$

【詳解】

(1)正實根
$$\begin{array}{c|c} 5 + 11 - 7 - 10 & 0 \\ \hline 5 + 16 + 9 - 1 & 1 \\ \hline 5 + 21 + 35 + 60 & 2 \end{array} > \alpha$$

(2)負實根
$$\begin{array}{ccccccccc|c} 5 & + & 11 & - & 7 & - & 10 & & & 0 \\ \hline 5 & + & 6 & - & 13 & + & 3 & & & -1 \\ \hline 5 & + & 1 & - & 9 & + & 8 & & & -2 \\ \hline 5 & - & 4 & + & 5 & - & 25 & & & -3 \end{array}$$
（0 與 -1 之間 $> \beta$，-2 與 -3 之間 $> \gamma$）

所以 $1 < \alpha < 2$，$- 1 < \beta < 0$，$- 3 < \gamma < - 2$

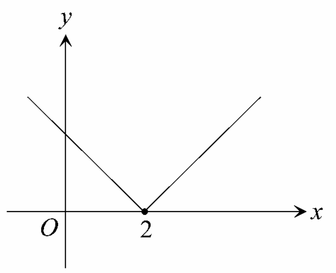
19.判斷下列各函數是否「到處連續」？(A) $f(x)=|x-2|$　(B) $g(x)=\cos(3x-\frac{\pi}{3})$

(C) $h(x)=\sqrt{x+3}$　(D) $p(x)=\frac{2x+3}{x(x+1)}$　(E) $q(x)=\frac{x+5}{x^2+3}$　(F) $r(x)=3^{x+2}$

【解答】(A)是　(B)是　(C)不是　(D)不是　(E)是　(F)是

【詳解】

(1) $y=x-2$ 的圖形為一直線，$f(x)$是取$x-2$ 的絕對值，故$f(x)$的圖形是把直線$y=x-2$ 落在x軸下方的部分，對x軸對稱上來，所以$f(x)$仍是到處連續



(2) $g(x)=\cos(3x-\frac{\pi}{3})=\cos3(x-\frac{\pi}{9})$

$$y=\cos x \xrightarrow[\text{伸縮}\frac{1}{3}]{\text{左右水平方向}} y=\cos3x \xrightarrow{\text{右移}\frac{\pi}{9}} y=\cos3(x-\frac{\pi}{9})$$

因$y=\cos x$是到處連續，所以$y=\cos3(x-\frac{\pi}{9})$也是到處連續

(3) $h(x)$的定義域為$[-3，\infty)$且$h(x)$在其上都是連續

故$h(x)$在$[-3，\infty)$上連續，但它不是到處連續

(4) $p(x)$在$x=0$ 與$x=-1$ 是沒有定義的，所以$p(x)$不是到處連續

(5)因為分母$x^2+3>0$ 對每一個實數x均成立，故$q(x)$在R上都有定義，$q(x)$是到處連續

(6)指數函數的x在R上都有定義，所以$r(x)$是到處連續