高雄市明誠中學 高三數學平時測驗					日期：95.04.20
範圍	Book6　1-1、2 極限	班級	普三　　班	姓名	
		座號			

一、是非題(每題 5 分)

1. 若$<a_n>$為一收斂數列，且任意正整數n，$a_n\neq 0$，則$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{a_n}$也是收斂數列。

【解答】╳

【詳解】當$a_n=\dfrac{1}{n}$，$n\in N$時，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，但$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}n$不存在

2. 設$<a_n>$，$<b_n>$，$<c_n>$為三個數列，且任意正整數n，$a_n\le b_n\le c_n$均成立，則當$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$與$\lim\limits_{n\to\infty}c_n$都存在時，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n$也存在。

【解答】╳

【詳解】

$<a_n>=<-2,-2,\cdots>$，$<c_n>=<2,2,2,\cdots>$，$<b_n>=<-1,1,-1,1,\cdots>$時

$<a_n>$，$<c_n>$都是收斂數列，但$<b_n>$不是收斂數列

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5}{n^2}+\cdots+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{n^2}=0+0+\cdots+0=0$。

【解答】╳

【詳解】$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n^2}=1\neq 0$

4. 下列各敘述何者為真確？何者為錯誤？

(A)若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$且$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$，則$\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=0$

(B)若$<a_n>$為無窮數列，並且對於每一自然數n都有$a_{n+1}\ge a_n\ge 0$，則$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$

(C)若對一切自然數n，恆有$a_n\le b_n\le c_n$，並且$<a_n>$及$<c_n>$均是收斂數列，則$<b_n>$也是收斂數列

(D)設$<a_n>$及$<b_n>$為二收斂數列且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\beta$，若對每一自然數$n$都有$a_n<b_n$，則 $\alpha<\beta$

(E)設$<a_n>$為一無窮數列，若$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$，則$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$

【解答】(A)╳　(B)╳　(C)╳　(D)╳　(E)○

【詳解】

(1)錯誤，$a_n=n^2$，$b_n=\dfrac{1}{n}$，則$\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=\infty$

(2)錯誤，$a_n=1-\dfrac{1}{n}$，則恆有$a_{n+1}\ge a_n$，但是$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$

(3)錯誤，$a_n=-1$，$b_n=(-1)^n$，$c_n=1$。顯然，對每一個自然數n，$a_n\le b_n\le c_n$均成立並且$<a_n>$及$<c_n>$均是收斂數列，但$<b_n>$是發散數列

(4)錯誤，例如：令$a_n = 1 + \frac{1}{n}$，$b_n = 1 + \frac{2}{n}$，顯然，對每一個自然數n，都有$a_n < b_n$，但是

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$

(5)正確

5. 設$< a_n >$，$< b_n >$為二個數列，且$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n)$存在，則$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$。

【解答】╳

【詳解】當$a_n = n$，$b_n = -n$時，對任意n，$a_n + b_n = 0$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = 0$，但$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$與$\lim\limits_{n\to\infty} b_n$都不存在，所以$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$不成立

6. 若$\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^2 - 2x + a}{x+1}$存在，則$a = -3$。

【解答】○

【詳解】

當$\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^2 - 2x + a}{x+1}$存在時，$x^2 - 2x + a$在$x = -1$時，其值為 0

所以$(-1)^2 - 2(-1) + a = 0$，即得$a = -3$

7. 設$f(x) = [x]$ 為高斯函數，則當$x_1 > x_2$時，$f(x_1) > f(x_2)$。

【解答】╳

【詳解】$f(3.2) = f(3) = 3$

8. 因為$\lim\limits_{x\to -3}(x+3) = 0$，所以$\lim\limits_{x\to -3} \frac{x^3 + 27}{x+3}$不存在。

【解答】╳

【詳解】$\lim\limits_{x\to -3} \frac{x^3 + 27}{x+3} = \lim\limits_{x\to -3} \frac{(x+3)(x^2 - 3x + 9)}{x+3} = \lim\limits_{x\to -3}(x^2 - 3x + 9) = (-3)^2 - 3 \times (-3) + 9 = 27$

9. 設$f(x) = |x - 1|$，則$f(x)$在$x = 1$之處不連續。

【解答】╳

【詳解】$f(x) = |x - 1|$ 時，$f(1) = |1 - 1| = 0$

又$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} |x - 1| = 0 = f(1)$，所以$f(x)$在$x = 1$之處連續

10.設函數$f(x) = \frac{|x|}{x}$，則$\lim\limits_{x\to -1} f(x) = -1$。

【解答】○

【詳解】$f(x) = \frac{|x|}{x}$時，$\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \lim\limits_{x\to -1} \frac{|x|}{x} = \lim\limits_{x\to -1}(\frac{-x}{x}) = \lim\limits_{x\to -1}(-1) = -1$

二、選擇題(每題 10 分)

1. 設二數列的第n項分別為$a_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$，$b_n = n^3 + 5n + 1$，則$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$等於

(A) 0 (B)$\dfrac{1}{6}$ (C)$\dfrac{1}{3}$ (D)$\dfrac{1}{2}$ (E) 2

【解答】(C)

【詳解】

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3+5n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{n^3+5n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3+30n+6}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2+3\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{6+30\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{6}{n^3}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}(2+3\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})}{\lim\limits_{n\to\infty}(6+30\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{6}{n^3})}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

2. (複選)令$a_n=\sum\limits_{k=2}^{n}\log(1-\dfrac{1}{k^2})$，則下列各敘述何者為真？（式中[ ]為高斯符號）

(A) $-\log\dfrac{3}{2}<a_n<0$ (B) $-\log 2<a_n<0$ (C) $[10^{a_n}]=2$ (D) $[2\cdot 10^{a_n}]=1$(E) $[2\cdot 10^{a_n}]=2$

【解答】(B)(D)

【詳解】

$$a_n=\sum_{k=2}^{n}\log(1-\frac{1}{k^2})=\log(1-\frac{1}{2^2})+\log(1-\frac{1}{3^2})+\log(1-\frac{1}{4^2})+\cdots+\log(1-\frac{1}{n^2})$$

$$=\log[(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})(1-\frac{1}{4^2})\cdots(1-\frac{1}{n^2})]$$

$$=\log[(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{4})\cdots(1-\frac{1}{n})(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{4})\cdots(1+\frac{1}{n})]$$

$$=\log[(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{n-1}{n})(\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{n+1}{n})]=\log\frac{n+1}{2n}$$

①$\because$ $n\ge 2$ $\therefore$ $\dfrac{1}{2}<\dfrac{n+1}{2n}<1$ $\therefore$ $-\log 2<a_n<0$

②由$a_n=\log\dfrac{n+1}{2n}$，得$10^{a_n}=\dfrac{n+1}{2n}$，所以$[10^{a_n}]=0$，而 $[2\cdot 10^{a_n}]=[\dfrac{n+1}{n}]=[1+\dfrac{1}{n}]=1$

故應選(B)(D)

3. (複選)下列數列哪些是收斂數列？

(A)$<\sqrt{n+1}-\sqrt{n}>$ (B)$<\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}>$ (C)$<\dfrac{2n^3}{n^2+1}-\dfrac{n^2+1}{n}>$ (D)$<2+(-\dfrac{\pi}{3})^{n-1}>$

【解答】(A)(B)

【詳解】

(A)$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$

(B)$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}=0$

(C)$\dfrac{2n^3}{n^2+1}-\dfrac{n^2+1}{n}=\dfrac{n^4-2n^2-1}{n^3+n}$極限值不存在，$<\dfrac{2n^3}{n^2+1}-\dfrac{n^2+1}{n}>$發散

(D)數列$<(-\frac{\pi}{3})^{n-1}>$是公比小於 -1 的等比數列，是一發散數列

令$a_n = 2+(-\frac{\pi}{3})^{n-1}$，並設$\langle a_n \rangle$收斂，則 $(-\frac{\pi}{3})^{n-1} = a_n - 2 \quad \Rightarrow \quad <(-\frac{\pi}{3})^{n-1}>$收斂，矛盾

故$<2+(-\frac{\pi}{3})^{n-1}>$發散

4. (複選)設 $f(x)$ 爲一多項式，已知$\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=24$ ，$\lim\limits_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=-20$，$\lim\limits_{x\to3}\frac{f(x)}{x-3}=60$，若 $f(x)$ 以 $(x-1)(x-2)(x-3)$ 除之所得商式爲 $g(x)$ ，則

(A) $(x-1)(x-2)$ 可整除 $f(x)$ (B) $(x-2)(x-3)$ 可整除 $f(x)$ (C) $g(1)=30$ (D) $g(2)=20$

(E) $g(x)$ 被 $(x-1)(x-2)(x-3)$ 除之餘式爲 x^2+5x+6

【解答】(A)(B)(D)(E)

【詳解】

因$\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=24$ ，$\lim\limits_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=-20$，$\lim\limits_{x\to3}\frac{f(x)}{x-3}=60$ ，故 $f(1)=0$ ，$f(2)=0$ ，$f(3)=0$

由因式定理知 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)g(x)$

$\because \quad \lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}(x-2)(x-3)g(x)=(-1)(-2)g(1)=24 \quad \therefore \quad g(1)=12$

$\because \quad \lim\limits_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}(x-1)(x-3)g(x)=1\cdot(-1)g(2)=-20 \quad \therefore \quad g(2)=20$

$\because \quad \lim\limits_{x\to3}\frac{f(x)}{x-2}=\lim\limits_{x\to3}(x-1)(x-2)g(x)=2\cdot1\cdot g(3)=60 \quad \therefore \quad g(3)=30$

令 $g(x)=(x-1)(x-2)(x-3)Q(x)+ax^2+bx+c$ ，則得$\begin{cases} g(1)=a+b+c=12 \\ g(2)=4a+2b+c=20 \\ g(3)=9x+3b+c=30 \end{cases}$

解方程組得 $a=1$ ，$b=5$ ，$c=6$ ，即 $g(x)$ 被 $(x-1)(x-2)(x-3)$ 除之餘式爲 x^2+5x+6

故應選(A)(B)(D)(E)

二、填充題(每題 10 分)

1. 設$a_n = 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$，且$b_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{a_k}$ ，則$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=$ ＿＿＿＿＿。

【解答】6

【詳解】

$\because \quad a_n = 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

$\therefore \quad b_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{a_k}=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)}=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{6}{k(k+1)}=6\sum\limits_{k=1}^{n}(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1})$

$=6[(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\cdots+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})]=6(1-\frac{1}{n+1}) \quad \therefore \quad \lim\limits_{n\to\infty}b_n=6$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})(1-\frac{1}{4^2})\cdots(1-\frac{1}{n^2})\right]=$ ＿＿＿＿＿。

【解答】 $\frac{1}{2}$

【詳解】

$$\lim_{n\to\infty}\left[(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})(1-\frac{1}{4^2})\cdots(1-\frac{1}{n^2})\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(2^2-1)}{2^2}\cdot\frac{(3^2-1)}{3^2}\cdot\frac{(4^2-1)}{4^2}\cdot\cdots\cdot\frac{(n^2-1)}{n^2}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(1\cdot3)(2\cdot4)(3\cdot5)(4\cdot6)\cdots(n-1)(n+1)}{2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot\cdots\cdot n\cdot n}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot(n+1)}{2\cdot n}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\frac{1}{2}$$

3. 若數列 $\langle a_n \rangle$ 中，$a_n=\sqrt{1\cdot2}+\sqrt{2\cdot3}+\cdots+\sqrt{n(n+1)}$，則 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}=$ ＿＿＿＿＿＿。

(提示：利用 $n\le\sqrt{n(n+1)}\le n+1$、夾擠定理)

【解答】 $\frac{1}{2}$

【詳解】

$a_n=\sqrt{1\cdot2}+\sqrt{2\cdot3}+\cdots+\sqrt{n(n+1)}$

$$\begin{aligned}
1&<\sqrt{1\cdot2}<2\\
2&<\sqrt{2\cdot3}<3\\
3&<\sqrt{3\cdot4}<4\\
&\vdots\\
+)\ n&<\sqrt{n(n+1)}<n+1
\end{aligned}$$

$\therefore\ 1+2+3+\cdots+n<\sqrt{1\cdot2}+\sqrt{2\cdot3}+\sqrt{3\cdot4}+\cdots+\sqrt{n(n+1)}<2+3+\cdots+(n+1)$

即 $\frac{n(n+1)}{2}<a_n<\frac{(n+1)(n+2)}{2}-1$，因此 $\frac{1}{n^2}[\frac{n(n+1)}{2}]<\frac{a_n}{n^2}<\frac{1}{n^2}[\frac{(n+1)(n+2)}{2}-1]$

即 $\frac{n+1}{2n}<\frac{a_n}{n^2}<\frac{(n+1)(n+2)}{2n^2}-\frac{1}{n^2}$，又 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}[\frac{(n+1)(n+2)}{2n^2}-\frac{1}{n^2}]=\frac{1}{2}$

由夾擠定理可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}=\frac{1}{2}$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1\cdot(2n-1)+2\cdot(2n-3)+3\cdot(2n-5)+\cdots+n\cdot1}{n^3}=$ ＿＿＿＿＿＿。

【解答】 $\frac{1}{3}$

【詳解】

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot(2n-1)+2\cdot(2n-3)+3\cdot(2n-5)+\cdots+n\cdot1}{n^3}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}k\left[2n-(2k-1)\right]}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}k(2n+1)-2\sum_{k=1}^{n}k^2}{n^3}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)\cdot(2n+1)-2\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})=\frac{1}{3}$$

5. 設 $\langle a_n \rangle$ 為一數列，若 $\lim\limits_{n\to\infty}n\,a_n=2$，則 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=$ ＿＿＿＿＿＿。又 $\lim\limits_{n\to\infty}(3n-1)a_n=$ ＿＿＿＿＿＿。

【解答】0，6

【詳解】

(1)因為$\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 2$，於是可得$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}(na_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0\times 2 = 0$

故$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

(2)因為$\lim\limits_{n\to\infty}(3n-1)a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n-1}{n}(na_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n-1}{n}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}(na_n) = 3\times 2 = 6$

故$\lim\limits_{n\to\infty}(3n-1)\ a_n = 6$

6. 設$a_n = 1+2+3+\ \cdots\ +n$，則$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n}) =$ __________。

【解答】$\frac{\sqrt{2}}{2}$

【詳解】

因為$a_n = 1+2+3+\ \cdots\ +n$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n})$

$=\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{1+2+\cdots+n+(n+1)}-\sqrt{1+2+\cdots+n})$

$=\lim\limits_{n\to\infty}[\sqrt{\frac{1}{2}(n+1)(n+2)}-\sqrt{\frac{1}{2}n(n+1)}] = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{2}}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1}} = \frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{1+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

7. 設a，b為實數，若無窮級數

$\frac{a}{2^1}+\frac{b}{2^2}+\frac{a}{2^3}+\frac{b}{2^4}+\cdots+\frac{a}{2^{2n-1}}+\frac{b}{2^{2n}}+\cdots\ = 3$ 且$a+b=5$，則$a =$ __________，$b =$ __________。

【解答】4，1

【詳解】

因$\frac{a}{2^1}+\frac{b}{2^2}+\frac{a}{2^3}+\frac{b}{2^4}+\cdots+\frac{a}{2^{2n-1}}+\frac{b}{2^{2n}}+\cdots\ = 3$是收斂級數，即

$(\frac{a}{2^1}+\frac{a}{2^3}+\frac{a}{2^5}+\ \cdots\ +\frac{a}{2^{2n-1}}+\ \cdots)+(\frac{b}{2^2}+\frac{b}{2^4}+\frac{b}{2^6}+\ \cdots\ +\frac{b}{2^{2n}}+\ \cdots) = 3$

$\therefore\quad \frac{\frac{a}{2}}{1-\frac{1}{4}}+\frac{\frac{b}{4}}{1-\frac{1}{4}} = 3 \quad\Rightarrow\quad 2a+b=9$，又$a+b=5$，解此方程式，故得$a=4$，$b=1$

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3a_n+1}{4a_n-2} = 2$，則$\langle a_n\rangle$的極限是__________。

【解答】1

【詳解】

令$b_n = \frac{3a_n+1}{4a_n-2}$，得$4b_na_n-2b_n = 3a_n+1$及$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 2\quad\therefore\quad a_n = \frac{2b_n+1}{4b_n-3}$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2b_n+1}{4b_n-3} = \dfrac{2\cdot 2+1}{4\cdot 2-3} = 1$

9.若 $\lim\limits_{n\to\infty}(a\sqrt{2n^2+n+1}-nb) = 1$，則數對$(a，b) =$____________。

【解答】$(2\sqrt{2}，4)$

【詳解】

$1 = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^2(2n^2+n+1)-n^2b^2}{a\sqrt{2n^2+n+1}+nb} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2a^2-b^2)n^2+a^2(n+1)}{a\sqrt{2n^2+n+1}+nb}$

得 $2a^2-b^2=0$ 及 $1 = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^2(n+1)}{a\sqrt{2n^2+n+1}+nb} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^2(1+\frac{1}{n})}{b+a\sqrt{2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}} = \dfrac{a^2}{b+\sqrt{2}a}$

$\therefore\ \ 2a^2-b^2=0$ 及$a^2=\sqrt{2}\,a+b$，得$a=2\sqrt{2}$，$b=4$，$(a，b)=(2\sqrt{2}，4)$

10.對任一$n\in N$使$\dfrac{1}{n^3}[1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2] < A < \dfrac{1}{n^3}[1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2+n^2]$恆成立，則$A$ $=$____________。

【解答】$\dfrac{1}{3}$

【詳解】

由 $1^2+2^2+\cdots+n^2=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$，$1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2=\dfrac{1}{6}n(n-1)(2n-1)$

$\dfrac{1}{n^3}[1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2] < A < \dfrac{1}{n^3}(1^2+2^2+\cdots+n^2)$

$\Leftrightarrow\ \ \dfrac{1}{n^3}\cdot\dfrac{1}{6}n(n-1)(2n-1) < A < \dfrac{1}{n^3}\cdot\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

$\Leftrightarrow\ \ \dfrac{1}{6}(1-\dfrac{1}{n})(2-\dfrac{1}{n}) < A < \dfrac{1}{6}(1+\dfrac{1}{n})(2+\dfrac{1}{n})$

$\because\ \ \lim\limits_{n\to\infty}(1-\dfrac{1}{n})(2-\dfrac{1}{n}) = 2 = \lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})(2+\dfrac{1}{n})\quad \therefore\ \ A=\dfrac{1}{6}\cdot 2=\dfrac{1}{3}$

11.$\lim\limits_{n\to\infty}(n\sqrt{\dfrac{n-1}{n+2}}-n) =$____________。

【解答】$-\dfrac{3}{2}$

【詳解】$\lim\limits_{n\to\infty}(n\sqrt{\dfrac{n-1}{n+2}}-n) = \lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt{\dfrac{n-1}{n+2}}-1) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(\sqrt{n-1}-\sqrt{n+2})}{\sqrt{n+2}}$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(\sqrt{n-1}-\sqrt{n+2})(\sqrt{n-1}+\sqrt{n+2})}{\sqrt{n+2}(\sqrt{n-1}+\sqrt{n+2})} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-3n}{\sqrt{n+2}(\sqrt{n-1}+\sqrt{n+2})}$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-3}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}(\sqrt{1-\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}})} = \dfrac{-3}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{2}{n}}(\sqrt{1-\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}})} = -\dfrac{3}{2}$

12. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+4^n}{3^{n+1}+4^{n+1}}=$ ________。

【解答】$\dfrac{1}{4}$

【詳解】$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+4^n}{3^{n+1}+4^{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\frac{3}{4})^n+1}{3(\frac{3}{4})^n+4}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}\left[(\frac{3}{4})^n+1\right]}{\lim\limits_{n\to\infty}\left[3(\frac{3}{4})^n+4\right]}=\dfrac{0+1}{0+4}=\dfrac{1}{4}$

13. $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{3}{n}+\dfrac{3}{2^n}+3)=$ ________。

【解答】3

【詳解】$\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{3}{n}+\dfrac{3}{2^n}+3)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{2^n}+\lim\limits_{n\to\infty}3=0+0+3=3$

14. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+4}-\sqrt{n-4}}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}=$ ________。

【解答】2

【詳解】

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+4}-\sqrt{n-4}}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+4}-\sqrt{n-4})(\sqrt{n+4}+\sqrt{n-4})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2})}{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2})(\sqrt{n+4}+\sqrt{n-4})}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{[(n+4)-(n-4)](\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2})}{[(n+2)-(n-2)](\sqrt{n+4}+\sqrt{n-4})}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{8(\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2})}{\sqrt{n}}}{\dfrac{4(\sqrt{n+4}+\sqrt{n-4})}{\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1-\frac{2}{n}})}{\sqrt{1+\frac{4}{n}}+\sqrt{1-\frac{4}{n}}}=2\cdot\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1-\frac{2}{n}}}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{4}{n}}+\sqrt{1-\frac{4}{n}}}=2(\frac{1+1}{1+1})=2$$

15. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2})=$ ________。

【解答】2

【詳解】$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2})=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2})}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}[(n+2)-(n-2)]}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1-\frac{2}{n}}}=\frac{4}{1+1}=2$$

16. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{(0.1)^n}{1-(0.1)^n}+\dfrac{2^n}{1-2^n}+\dfrac{1-(0.9)^n}{1+(0.9)^n}\right]=$ ________。

【解答】0

【詳解】$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{(0.1)^n}{1-(0.1)^n}+\dfrac{2^n}{1-2^n}+\dfrac{1-(0.9)^n}{1+(0.9)^n}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(0.1)^n}{1-(0.1)^n}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{1-2^n}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-(0.9)^n}{1+(0.9)^n}$

$=\frac{0}{1}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{2^n}-1}+\frac{1}{1}=0+\frac{1}{-1}+1=0$

17.設無窮數列$< a_n >$滿足 $3n+2 < na_n < 3n+5$，則$\lim_{n\to\infty} a_n =$ ＿＿＿＿＿＿ 。

【解答】3

【詳解】$3n+2 < na_n < 3n+5$，$3+\frac{2}{n} < a_n < 3+\frac{5}{n}$，且$\lim_{n\to\infty}(3+\frac{2}{n})=\lim_{n\to\infty}(3+\frac{5}{n})=3$

由夾擠定理，可得$\lim_{n\to\infty} a_n = 3$

18.若數列$< a_n >$中，$a_n=\frac{3+6+9+\cdots+3n}{1+3+5+\cdots+(2n-1)}$，則$\lim_{n\to\infty} a_n =$ ＿＿＿＿＿＿ 。

【解答】$\frac{3}{2}$

【詳解】$a_n=\frac{3+6+9+\cdots+3n}{1+3+5+\cdots+(2n-1)}=\frac{3\frac{n(n+1)}{2}}{n^2}=\frac{3}{2}(1+\frac{1}{n})$，故$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{2}(1+\frac{1}{n})=\frac{3}{2}$

19.設$b_n=\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{9}\cdot\cdots\cdot\frac{n^2-1}{n^2}$，$n\geq 2$，且$< b_n >$的極限爲$s$，則$s=$＿＿＿＿＿＿，使$|b_n-s|<\frac{1}{100}$的最小自然數$n=$＿＿＿＿＿＿ 。

【解答】$\frac{1}{2}$，51

【詳解】

$b_n=(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2})(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3})(\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4})\cdot\cdots\cdot(\frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{n}{n-1})(\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n})$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}=\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}(1+\frac{1}{n})$

$\therefore\ s=\lim_{n\to\infty} b_n=\frac{1}{2}$

同時$|b_n-s|<\frac{1}{100}\ \Leftrightarrow\ \frac{1}{2n}<\frac{1}{100}\ \Leftrightarrow\ n=51$，52，53，⋯。取最小$n$值爲 51

20.設$<\frac{2^{n-3}}{(x+2)^{n-1}}>$是收斂數列，則$x$範圍是 ＿＿＿＿＿＿ 。

【解答】$x<-4$ 或 $x\geq 0$

【詳解】$<\frac{2^{n-3}}{(x+2)^{n-1}}>$是收斂數列 $\Leftrightarrow$ $|\frac{2}{x+2}|<1$ 或 $\frac{2}{x+2}=1$

(1)$|\frac{2}{x+2}|<1\ \Leftrightarrow\ |x+2|>2\ \Leftrightarrow\ x+2>2$ 或 $x+2<-2\ \Leftrightarrow\ x>0$ 或 $x<-4$

(2)$\frac{2}{x+2}=1\ \Leftrightarrow\ x+2=2\ \Leftrightarrow\ x=0$

由(1)及(2)可知：$x<-4$ 或 $x\geq 0$

21.若$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n^2+n+1}{n-1}-an-b)=0$，則$a=$ ＿＿＿＿＿＿，$b=$ ＿＿＿＿＿＿。

【解答】1，2

【詳解】$\frac{n^2+n+1}{n-1}-an-b=\frac{n^2+n+1-(n-1)(an+b)}{n-1}$

$=\frac{(1-a)n^2+(a-b+1)n+(b+1)}{n-1}=\frac{(1-a)n+(a-b+1)+\frac{b+1}{n}}{1-\frac{1}{n}}$

且$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n^2+n+1}{n-1}-an-b)=0$，得 $1-a=0$ 且 $a-b+1=0$，聯立解之，得 $a=1$，$b=2$

22.求下列各極限值：(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty}[\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}]$

【解答】(1) $\frac{1}{3}$ (2) 1

【詳解】

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{n^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3}=\frac{1}{3}$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}[\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}]=\lim\limits_{n\to\infty}[(\frac{1}{1}-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})]$

$=\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+1})=1$

23.試求$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{7}+\frac{4}{7^2}+\frac{7}{7^3}+\cdots+\frac{3n-2}{7^n})$之值。

【解答】$\frac{1}{4}$

【詳解】

令 $S_n=\frac{1}{7}+\frac{4}{7^2}+\frac{7}{7^3}+\cdots+\frac{3n-2}{7^n}$

$-)\ \frac{1}{7}S_n=\quad+\frac{1}{7^2}+\frac{4}{7^3}+\cdots+\frac{3n-5}{7^n}+\frac{3n-2}{7^{n+1}}$

$\frac{6}{7}S_n=\frac{1}{7}+\frac{3}{7^2}+\frac{3}{7^3}+\cdots+\frac{3}{7^n}-\frac{3n-2}{7^{n+1}}$

$S_n=\frac{7}{6}(\frac{3}{7}+\frac{3}{7^2}+\cdots+\frac{3}{7^n}-\frac{2}{7}-\frac{3n-2}{7^{n+1}})=\frac{7}{6}[\frac{\frac{3}{7}(1-\frac{1}{7^n})}{1-\frac{1}{7}}-\frac{2}{7}-\frac{3n-2}{7^{n+1}}]$

$=\frac{7}{6}[\frac{1}{2}(1-\frac{1}{7^n})-\frac{2}{7}-\frac{3n-2}{7^{n+1}}]$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{7}{6}(\frac{1}{2}-\frac{2}{7})=\frac{1}{4}$（其中$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{7^n}=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n-2}{7^{n+1}}=0$）

24.(1)設對所有自然數n，$\dfrac{n+3}{n(n+1)}=\dfrac{A}{n}+\dfrac{B}{n+1}$ 恆成立，試求A，B之值

(2)若$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k+3}{k(k+1)}(\dfrac{2}{3})^k$，試求$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$之值

【解答】(1) $A=3$，$B=-2$　(2) 2

【詳解】

(1)因為$\dfrac{n+3}{n(n+1)}=\dfrac{A}{n}+\dfrac{B}{n+1}=\dfrac{A(n+1)+Bn}{n(n+1)}$，分子部分$n+3=A(n+1)+Bn=(A+B)n+A$

比較係數$A+B=1$，$A=3$，得$A=3$，$B=-2$

(2)因為$\dfrac{k+3}{k(k+1)}(\dfrac{2}{3})^k=(\dfrac{3}{k}-\dfrac{2}{k+1})(\dfrac{2}{3})^k=\dfrac{2}{k}(\dfrac{2}{3})^{k-1}-\dfrac{2}{k+1}(\dfrac{2}{3})^k$，$k\in N$

$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k+3}{k(k+1)}(\dfrac{2}{3})^k=\sum\limits_{k=1}^{n}\left[\dfrac{2}{k}(\dfrac{2}{3})^{k-1}-\dfrac{2}{k+1}(\dfrac{2}{3})^k\right]=2-\dfrac{2}{n+1}(\dfrac{2}{3})^n$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=2$

25.求下列的極限值：(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+3999}{4n^2+6}$　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+9}{3n+8}$　(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-2n^2+9n+3}{7n^2+8n+1}$

【解答】(1) 0　(2) ∞　(3) $\dfrac{-2}{7}$

【詳解】

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+3999}{4n^2+6}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{3999}{n}}{4n+\frac{6}{n}}=0$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+9}{3n+8}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+\frac{9}{n}}{3+\frac{8}{n}}=\infty$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-2n^2+9n+3}{7n^2+8n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-2+\frac{9}{n}+\frac{3}{n^2}}{7+\frac{8}{n}+\frac{1}{n^2}}=\dfrac{-2}{7}$

26.設 a，b 是常數，且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{an^3+bn^2+7n+2}{5n^2+3n-1}=3$，求 a，b。

【解答】$a=0$，$b=15$

【詳解】

因為分子是 3 次式，分母是 2 次式，且它有極限值，所以 $a=0$

原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{an^3+bn^2+7n+2}{5n^2+3n-1}=3$，得$\dfrac{b}{5}=3$，即 $b=15$，所以 $a=0$，$b=15$

27. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-2x}{|x|}=$ ＿＿＿＿＿＿。

【解答】不存在

【詳解】

令 $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{|x|}$，則

(1)當 $x>0$ 時， $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2-2x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}(x-2) = -2$

(2)當 $x<0$ 時， $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x^2-2x}{-x} = \lim\limits_{x\to 0^-}(-x+2) = 2$

因爲 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$，所以 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在，亦即 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-2x}{|x|}$ 極限不存在

28. $\lim\limits_{x\to -\infty} \log_{\frac{1}{2}} x(x+\sqrt{x^2-4}) =$ ＿＿＿＿＿＿＿。

【解答】-1

【詳解】設 $t=-x>0 \Rightarrow x=-t$

$\lim\limits_{x\to -\infty} \log_{\frac{1}{2}} x(x+\sqrt{x^2-4}) = \lim\limits_{t\to \infty} \log_{\frac{1}{2}} t(t-\sqrt{t^2-4}) = \lim\limits_{t\to \infty} \log_{\frac{1}{2}} \dfrac{t\left[t^2-(t^2-4)\right]}{t+\sqrt{t^2-4}}$

$= \lim\limits_{t\to \infty} \log_{\frac{1}{2}} \dfrac{4t}{t+\sqrt{t^2-4}} = \log_{\frac{1}{2}} \left(\lim\limits_{t\to \infty} \dfrac{4}{1+\sqrt{1-\dfrac{4}{t^2}}}\right) = \log_{\frac{1}{2}} 2 = -1$

29.若 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+ax+b}{x-1} = -4$，則數對$(a，b)=$＿＿＿＿＿＿＿。

【解答】$(-6，5)$

【詳解】$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+ax+b}{x-1}$ 存在，得 $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+ax+b)=0$

$\therefore\ 1+a+b=0$，代入原式：$-4 = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+ax+(-1-a)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x+a+1)}{x-1} = a+2$

$-4=a+2$，$a=-6$，$b=5$

30.若 $f(x)=x^3$，則 $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(1+2t)-f(1)}{t} =$ ＿＿＿＿＿＿＿。

【解答】6

【詳解】$f(x)=x^3$ 時，則 $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(1+2t)-f(1)}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{(1+2t)^3-1}{t}$

$= \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{6t+12t^2+8t^3}{t} = \lim\limits_{t\to 0}(6+12t+8t^2) = 6$

31. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x+1)^{10}-1}{x} =$ ＿＿＿＿＿＿＿。

【解答】10

【詳解】令 $t=x+1$，則 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x+1)^{10}-1}{x} = \lim\limits_{t\to 1} \dfrac{t^{10}-1}{t-1} = \lim\limits_{t\to 1}(t^9+t^8+\cdots+t+1) = 10$

32. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x^2-x-2} - \dfrac{1}{2x^2-5x+2}\right) =$ ＿＿＿＿＿＿＿。

【解答】$\dfrac{1}{9}$

【詳解】

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x^2-x-2}-\frac{1}{2x^2-5x+2}\right)=\lim_{x\to 2}\left[\frac{1}{(x-2)(x+1)}-\frac{1}{(x-2)(2x-1)}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{(2x-1)-(x+1)}{(x-2)(x+1)(2x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(x+1)(2x-1)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x+1)(2x-1)}=\frac{1}{(2+1)(2\cdot 2-1)}=\frac{1}{9}$$

33. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt{x+6}-\sqrt{8}}=$ ＿＿＿＿＿＿ 。

【解答】2

【詳解】 $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt{x+6}-\sqrt{8}}=\dfrac{(\sqrt{x}-\sqrt{2})(\sqrt{x}+\sqrt{2})(\sqrt{x+6}+\sqrt{8})}{(\sqrt{x+6}-\sqrt{8})(\sqrt{x+6}+\sqrt{8})(\sqrt{x}+\sqrt{2})}=\dfrac{\sqrt{x+6}+\sqrt{8}}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}$

$\therefore\quad \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt{x+6}-\sqrt{8}}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+6}+\sqrt{8}}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{8}+\sqrt{8}}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}=2$

34. $\lim\limits_{x\to 0^-}x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}=$ ＿＿＿＿＿＿ 。

【解答】-1

【詳解】令 $t=-x>0$，所以 $\lim\limits_{x\to 0^-}x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}=\lim\limits_{t\to 0^+}\left(-t\sqrt{1+\dfrac{1}{t^2}}\right)=\lim\limits_{t\to 0^+}(-\sqrt{t^2+1})=-1$

35.求下列各小題的極限值：

(1) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{5}{x-3}=$ ＿＿＿＿＿＿　(2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-2x-3}=$ ＿＿＿＿＿＿

(3) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{\sqrt{x+5}-3}=$ ＿＿＿＿＿＿　(4) $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x^2-4}{x^2+3x+2}\right)=$ ＿＿＿＿＿＿

(5) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{25-x^2}-4}{x-3}=$ ＿＿＿＿＿＿　(6) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt[3]{x}-1}=$ ＿＿＿＿＿＿

【解答】(1)不存在　(2) $\dfrac{3}{2}$　(3) 6　(4) 6　(5) $\dfrac{-3}{4}$　(6) $\dfrac{3}{4}$

【詳解】

(1)分母 $x-3$ 趨近於 0，但是分子不爲 0，所以極限不存在

(2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-2x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+3}{x+1}=\dfrac{6}{4}=\dfrac{3}{2}$

(3) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{\sqrt{x+5}-3}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x-4)(\sqrt{x+5}+3)}{(x+5)-9}=\lim\limits_{x\to 4}(\sqrt{x+5}+3)=6$

(4) $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x^2-4}{x^2+3x+2}\right)=\lim\limits_{x\to -2}\left[\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{(x-2)(x+2)}{(x+2)(x+1)}\right]=\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x-2}{x+1}\right)=\dfrac{-2}{-1}+\dfrac{-4}{-1}=6$

(5) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{25-x^2}-4}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(25-x^2)-16}{(x-3)(\sqrt{25-x^2}+4)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{-(3+x)}{\sqrt{25-x^2}+4}=\dfrac{-6}{4+4}=-\dfrac{3}{4}$

(6) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt[3]{x}-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+3-4)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{x+3}+2}=\dfrac{3}{4}$

36. $\lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}-2}-\dfrac{4}{x-4}\right)=$ ＿＿＿＿＿＿。

【解答】$\dfrac{1}{4}$

【詳解】

$$\lim_{x\to 4}\left(\frac{1}{\sqrt{x}-2}-\frac{4}{x-4}\right)=\lim_{x\to 4}\left(\frac{\sqrt{x}+2}{x-4}-\frac{4}{x-4}\right)=\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x}+2)-4}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{x}+2}=\frac{1}{4}$$

37.設a，b是實數，若$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x+a}{x-2}=b$，則數對$(a，b)=$ ＿＿＿＿＿＿。

【解答】$(-6，5)$

【詳解】

因$\lim\limits_{x\to 2}(x-2)=0$ 且$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x+a}{x-2}=b$

故$\lim\limits_{x\to 2}(x^2+x+a)=0$，即$4+2+a=0$，解得$a=-6$

於是$b=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x+a}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x+3)=5$

$a=-6$，$b=5$；亦即 $(a，b)=(-6，5)$

38.函數$f(x)$滿足$f\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)=x$，則$f(x)=$ ＿＿＿＿＿＿，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=$ ＿＿＿＿＿＿。

【解答】$\dfrac{1+x}{1-x}$，2

【詳解】

$y=\dfrac{x-1}{x+1}$ $\Leftrightarrow xy+y=x-1$ $\Leftrightarrow y+1=(1-y)x$ $\Leftrightarrow x=\dfrac{1+y}{1-y}$，$f(y)=\dfrac{1+y}{1-y}$，即$f(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$

由$f(0)=1$，$f(x)-f(0)=\dfrac{1+x}{1-x}-1=\dfrac{2x}{1-x}$，得$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{1-x}=2$

39. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x-4}{x-3}+\dfrac{2}{x^2-4x+3}\right)=$ ＿＿＿＿＿＿。

【解答】$\dfrac{1}{2}$

【詳解】

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{x-4}{x-3}+\frac{2}{x^2-4x+3}\right)=\lim_{x\to 3}\frac{(x-4)(x-1)+2}{(x-1)(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{(x-1)(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x-2}{x-1}=\frac{3-2}{3-1}=\frac{1}{2}$$

40. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}=$ ＿＿＿＿＿＿。

【解答】$\dfrac{-1}{4}$

【詳解】

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{[\sqrt{1+x}+(\sqrt{1-x}-2)][\sqrt{1+x}-(\sqrt{1-x}-2)]}{x^2[\sqrt{1+x}-(\sqrt{1-x}-2)]}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)-(\sqrt{1-x}-2)^2}{x^2[\sqrt{1+x}-(\sqrt{1-x}-2)]}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)-(1-x+4-4\sqrt{1-x})}{x^2[\sqrt{1+x}-(\sqrt{1-x}-2)]}=\lim_{x\to 0}\frac{2x-4+4\sqrt{1-x}}{x^2[\sqrt{1+x}-(\sqrt{1-x}-2)]}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2[(x-2)+2\sqrt{1-x}][(x-2)-2\sqrt{1-x}]}{x^2[\sqrt{1+x}-(\sqrt{1-x}-2)][(x-2)-2\sqrt{1-x}]}=\lim_{x\to 0}\frac{2[(x-2)^2-4(1-x)]}{x^2[\sqrt{1+x}-(\sqrt{1-x}-2)][(x-2)-2\sqrt{1-x}]}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2}{[\sqrt{1+x}-(\sqrt{1-x}-2)][(x-2)-2\sqrt{1-x}]}=\frac{2}{[\sqrt{1+0}-(\sqrt{1-0}-2)][(0-2)-2\sqrt{1-0}]}$$

$$=\frac{2}{(1+1)(-4)}=\frac{-1}{4}$$

41. $\lim_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-4}=$ ＿＿＿＿＿。

【解答】$\dfrac{1}{6}$

【詳解】$\lim_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\dfrac{(x^2+5)-3^2}{(x^2-4)(\sqrt{x^2+5}+3)}=\lim_{x\to 2}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+5}+3}=\dfrac{1}{\sqrt{4+5}+3}=\dfrac{1}{6}$

42. $\lim_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}}{x-2}=$ ＿＿＿＿＿。

【解答】$\dfrac{\sqrt[3]{2}}{6}$

【詳解】由$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$知：$x-2=(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2x}+\sqrt[3]{4})$

$\therefore\ \lim_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}}{x-2}=\lim_{x\to 2}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2x}+\sqrt[3]{4}}=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{4}}=\dfrac{\sqrt[3]{2}}{6}$

43. 若$\lim_{x\to -2}\dfrac{x^3+ax+b}{(x+2)^2}$存在，求定數 a，b 之値，並求其極限値。

【解答】$a=-12$，$b=-16$，-6

【詳解】

分子x^3+ax+b必有$(x+2)^2$的因式，所以$x=-2$ 代入得 $-8-2a+b=0$……①

$b=8+2a$代入分子中

$x^3+ax+b=x^3+ax+8+2a=(x^3+8)+a(x+2)=(x+2)(x^2-2x+4+a)$

原式 $=\lim_{x\to -2}\dfrac{(x+2)(x^2-2x+4+a)}{(x+2)^2}=\lim_{x\to -2}\dfrac{x^2-2x+4+a}{x+2}$

分子$x^2-2x+4+a$仍有$x+2$ 的因式，所以$x=-2$ 代入得 $4+4+4+a=0$，$a=-12$

代入①得$b=8+2a=-16$

原式 $=\lim_{x\to -2}\dfrac{x^2-2x+4+a}{x+2}=\lim_{x\to -2}\dfrac{x^2-2x+4-12}{x+2}=\lim_{x\to -2}\dfrac{(x+2)(x-4)}{x+2}=\lim_{x\to -2}(x-4)=-6$

所以$a=-12$，$b=-16$，極限値爲 -6

44.若 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x-6}{x-2}, & x\neq 2\\ 8, & x=2\end{cases}$，試求 $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ 之値。

【解答】5

【詳解】

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}(x+3)=5$（注意 $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 5\neq f(2)$，故 $f(x)$在 $x=2$ 不連續）

45.已知 $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\sin\theta}{\theta}=1$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ 之値。

【解答】$\dfrac{1}{2}$

【詳解】由 $2\sin^2\theta = 1-\cos 2\theta$ 知 $1-\cos x = 2\sin^2\dfrac{x}{2}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{2}{x^2}\cdot\sin^2\dfrac{x}{2})=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2}(\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}})^2=\dfrac{1}{2}(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}})^2=\dfrac{1}{2}\cdot 1^2=\dfrac{1}{2}$（$\because \lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\sin\theta}{\theta}=1$）