高雄市明誠中學 高三數學平時測驗 日期：95.03.13					
範圍	Book5 ch4 矩陣(2)	班級	普三 班	姓名	
		座號			

二、填充題(每題 10 分)

1. 設有二矩陣$A=\begin{bmatrix}1&2&1\\3&1&2\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}2&1&-1\\1&3&2\end{bmatrix}$，則$(4B-3A)^t=$__________。

【解答】$\begin{bmatrix}5&-5\\-2&9\\-7&2\end{bmatrix}$

【詳解】$A=\begin{bmatrix}1&2&1\\3&1&2\end{bmatrix}\Rightarrow 3A=\begin{bmatrix}3&6&3\\9&3&6\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}2&1&-1\\1&3&2\end{bmatrix}\Rightarrow 4B=\begin{bmatrix}8&4&-4\\4&12&8\end{bmatrix}$

$\Rightarrow 4B-3A=\begin{bmatrix}5&-2&-7\\-5&9&2\end{bmatrix}$ $\therefore$ $(4B-3A)^t=\begin{bmatrix}5&-5\\-2&9\\-7&2\end{bmatrix}$

2. 設矩陣$A=(a_{ij})_{3\times3}$，$a_{ij}\in\{-1，0，1，2，3\}$，$\forall i，j=1，2，3$，
(1)若A滿足$A^t=A$，則此種A共有__________個。
(2)若A滿足$A^t=-A$，則此種A共有__________個。

【解答】(1) 15625 (2) 27

【詳解】

(1) $A^t=A$ $\Rightarrow$ 此A為對稱矩陣 $\Rightarrow$ 其形狀為$A=\begin{bmatrix}a&b&c\\b&d&e\\c&e&f\end{bmatrix}$，

而$a，b，c，d，e，f$可為 $-1，0，1，2，3$，共有 5 種選擇 $\Rightarrow$此A共有 $5^6=15625$ 個

(2) $A^t=-A$ $\Rightarrow$ 此A為反對稱矩陣 $\Rightarrow$ 其形狀為$A=\begin{bmatrix}0&a&b\\-a&0&c\\-b&-c&0\end{bmatrix}$，

而$a，b，c$僅可以為 $-1，0，1$，共有 3 種選擇 $\Rightarrow$ 此A共有 $3^3=27$ 個

3. 設矩陣$A=(a_{ij})_{5\times5}$，其中$a_{ij}=i^2-ij+j^2$，$\forall i，j=1，2，\cdots，5$，則A中所有元的總和$S=$__。

【解答】$S=325$

【詳解】

$$S=\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5}(i^2-ij+j^2)=\sum_{i=1}^{5}(\sum_{j=1}^{5}i^2-\sum_{j=1}^{5}ij+\sum_{j=1}^{5}j^2)=\sum_{i=1}^{5}(5i^2-15i+55)=5\times55-15\times15+55\times5$$
$$=275-225+275=325$$

4. 設有二矩陣$A_{3\times3}$，$B_{3\times3}$且$A^t=A$，$B^t=-B$，若$A+B=\begin{bmatrix}2&-4&4\\6&1&2\\-8&2&4\end{bmatrix}$，則$A=$__________，

$B=$__________。

【解答】$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & -2\\ 1 & 1 & 2\\ -2 & 2 & 4\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}0 & -5 & 6\\ 5 & 0 & 0\\ -6 & 0 & 0\end{bmatrix}$

【詳解】

$A^t=A \quad\Rightarrow\quad$ 可令$A=\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ a_2 & b_2 & b_3\\ a_3 & b_3 & c_3\end{bmatrix}$，$B^t=-B \quad\Rightarrow\quad$ 可令$B=\begin{bmatrix}0 & x & y\\ -x & 0 & z\\ -y & -z & 0\end{bmatrix}$

由$A+B=\begin{bmatrix}a_1 & a_2+x & a_3+y\\ a_2-x & b_2 & b_3+z\\ a_3-y & b_3-z & c_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -4 & 4\\ 6 & 1 & 2\\ -8 & 2 & 4\end{bmatrix} \quad\Rightarrow\quad a_1=2$，$b_2=1$，$c_3=4$

$\begin{cases}a_2+x=-4\\ a_2-x=6\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}a_2=1\\ x=-5\end{cases}$，$\begin{cases}a_3+y=4\\ a_3-y=-8\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}a_3=-2\\ y=6\end{cases}$，$\begin{cases}b_3+z=2\\ b_3-z=2\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}b_3=2\\ z=0\end{cases}$

$\Rightarrow\quad A=\begin{bmatrix}2 & 1 & -2\\ 1 & 1 & 2\\ -2 & 2 & 4\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}0 & -5 & 6\\ 5 & 0 & 0\\ -6 & 0 & 0\end{bmatrix}$

6.兩矩陣$A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\\ 4 & 4\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\\ 2 & 2\end{bmatrix}$，若矩陣$X$滿足 $2X+3(A-2B)=4X+2(2A-3X)$，則$X=$ ＿＿＿＿＿＿。

【解答】$\begin{bmatrix}2 & \frac{13}{4}\\ \frac{-5}{4} & \frac{7}{4}\\ 4 & 4\end{bmatrix}$

【詳解】

當 $2X+3(A-2B)=4X+2(2A-3X)$時，$2X+3A-6B=4X+4A-6X$

可得 $4X=A+6B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\\ 4 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}6 & 12\\ -6 & 6\\ 12 & 12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & 13\\ -5 & 7\\ 16 & 16\end{bmatrix}$，所以 $X=\begin{bmatrix}2 & \frac{13}{4}\\ \frac{-5}{4} & \frac{7}{4}\\ 4 & 4\end{bmatrix}$

7. 若$\begin{bmatrix}a-b & b+c\\ 3d+c & 2a-4d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & 1\\ 7 & 6\end{bmatrix}$，則數對$(a，b，c，d)=$＿＿＿＿＿＿。

【解答】$(5，-3，4，1)$

【詳解】由 $a-b=8$，$b+c=1$，$c+3d=7$，$2a-4d=6$

$\therefore\quad (a-b)+(b+c)-(c+3d)=8+1-7=2$，$a-3d=2$

$d=1$，$a=5$，$b=-3$，$c=4$，即$(a，b，c，d)=(5，-3，4，1)$

8. 設二矩陣$A=(a_{ij})_{3\times 3}$滿足$a_{ij}=\begin{cases}1，i=j\\ 2，i\neq j\end{cases}$，$B=(b_{ij})_{3\times 3}$，若$a_{ij}=i+j-b_{ij}$，則$B=$＿＿＿＿＿＿。

【解答】$B=\begin{bmatrix}1&1&2\\1&3&3\\2&3&5\end{bmatrix}$

【詳解】$A=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}$，由$a_{ij}=i+j-b_{ij}\quad\Rightarrow\quad b_{ij}=i+j-a_{ij}\quad\therefore\quad B=\begin{bmatrix}1&1&2\\1&3&3\\2&3&5\end{bmatrix}$

9. 設$A=\begin{bmatrix}1&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}3&2&1\\4&5&6\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$，若矩陣$X$滿足 $3A+4B=2X+5C$，則$X=$ ＿＿＿＿＿＿。

【解答】$\begin{bmatrix}5&\frac{11}{2}&\frac{5}{2}\\11&\frac{21}{2}&\frac{27}{2}\end{bmatrix}$

【詳解】$3A+4B=2X+5C\quad\Rightarrow\quad X=\frac{1}{2}(3A+4B-5C)$

$A=\begin{bmatrix}1&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}3&2&1\\4&5&6\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$

$\Rightarrow\quad X=\frac{1}{2}(3\begin{bmatrix}1&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}+4\begin{bmatrix}3&2&1\\4&5&6\end{bmatrix}-5\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix})=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}10&11&5\\22&21&27\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&\frac{11}{2}&\frac{5}{2}\\11&\frac{21}{2}&\frac{27}{2}\end{bmatrix}$

10.設$A=\begin{bmatrix}1&3&5\\7&9&11\\13&15&17\end{bmatrix}$，則$A-A^t=$ ＿＿＿＿＿＿。

【解答】$\begin{bmatrix}0&-4&-8\\4&0&-4\\8&4&0\end{bmatrix}$

【詳解】$A=\begin{bmatrix}1&3&5\\7&9&11\\13&15&17\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad A^t=\begin{bmatrix}1&7&13\\3&9&15\\5&11&17\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad A-A^t=\begin{bmatrix}0&-4&-8\\4&0&-4\\8&4&0\end{bmatrix}$

11.設$\begin{bmatrix}x+3&x+2y\\x-y&2x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y+2&x^2+4\\y-x^2&2y-x\end{bmatrix}$，$x$，$y\in R$，則$x=$ ＿＿＿＿＿＿，$y=$ ＿＿＿＿＿＿。

【解答】$x=2$，$y=3$

【詳解】$\begin{bmatrix}x+3&x+2y\\x-y&2x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y+2&x^2+4\\y-x^2&2y-x\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}x+3=y+2&\cdots\cdots①\\x+2y=x^2+4&\cdots\cdots②\\x-y=y-x^2&\cdots\cdots③\\2x=2y-x&\cdots\cdots④\end{cases}$

由①④$\begin{cases}x-y=-1\\3x-2y=0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad x=2$，$y=3$ 代入②③均合 $\quad\therefore\quad x=2$，$y=3$

12.若A，B，C爲三矩陣，$A=\begin{bmatrix}2&3&4\\1&3&1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}0&2&7\\-1&3&-5\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}12&21&3\\-9&6&0\end{bmatrix}$，則

(1) $-A+2B+\frac{1}{3}C=$ ______________，

(2)若X爲矩陣，且 $2(X+A)+3(X+B)=4(B+2C)$，則$X=$ ______________。

【解答】$\begin{bmatrix}2&8&11\\-6&5&-11\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}\frac{92}{5}&\frac{164}{5}&\frac{23}{5}\\-15&9&\frac{-7}{5}\end{bmatrix}$

【詳解】$A=\begin{bmatrix}2&3&4\\1&3&1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}0&2&7\\-1&3&-5\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}12&21&3\\-9&6&0\end{bmatrix}$

則$-A+2B+\frac{1}{3}C=\begin{bmatrix}-2&-3&-4\\-1&-3&-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&4&14\\-2&6&-10\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4&7&1\\-3&2&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&8&11\\-6&5&-11\end{bmatrix}$

當 $2(X+A)+3(X+B)=4(B+2C)$時，$2X+2A+3X+3B=4B+8C$

$5X=4B+8C-2A-3B=-2A+B+8C$

$5X=\begin{bmatrix}-4&-6&-8\\-2&-6&-2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&2&7\\-1&3&-5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}96&168&24\\-72&48&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}92&164&23\\-75&45&-7\end{bmatrix}$

$X=\begin{bmatrix}\frac{92}{5}&\frac{164}{5}&\frac{23}{5}\\-15&9&\frac{-7}{5}\end{bmatrix}$

13.n階方陣$A_n=(a_{ij})$滿足：$i\neq j$時$a_{ij}=0$，$i=j$時$a_{ij}=1$，則$A_3=$__________。

【解答】$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

【詳解】A_n之第i列，第i行的元素爲 1，而元素所在行與列不同時均爲 0，此即n階方陣A_n之主對角線上之各元素均爲 1，而不在主對角線上之各元素均爲 0，如

$A_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$，$A_4=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$ $\therefore$ $A_3=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

14.若二階方陣$\begin{bmatrix}x+y&y-2x\\2x+a&4y+b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&2\\3&4\end{bmatrix}$，則數對$(x，y)=$__________，而方陣$\begin{bmatrix}x&y\\a+b&a-b\end{bmatrix}=$__________。

【解答】(1，4)，$\begin{bmatrix}1&4\\-11&13\end{bmatrix}$

【詳解】

當$\begin{bmatrix}x+y&y-2x\\2x+a&4y+b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&2\\3&4\end{bmatrix}$時，$\begin{cases}x+y=5\\y-2x=2\end{cases}$，可得 $x=1$，$y=4$，所以$(x，y)=(1，4)$

又$\begin{cases}2x+a=3\\4y+b=4\end{cases}$，因此$\begin{cases}a=1\\b=-12\end{cases}$，所以$\begin{bmatrix}x&y\\a+b&a-b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&4\\-11&13\end{bmatrix}$

15.$A=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\sqrt{3} & 1\\ -1 & \sqrt{3}\end{bmatrix}$，則$A^{15}=$__________。

【解答】$\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$

【詳解】$A=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$時，$A^2=\begin{bmatrix}\cos 2\theta & \sin 2\theta\\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta\end{bmatrix}$，$A^3=\begin{bmatrix}\cos 3\theta & \sin 3\theta\\ -\sin 3\theta & \cos 3\theta\end{bmatrix}$，…

此時$\theta=\frac{\pi}{6}$，$A^{15}=\begin{bmatrix}\cos 15\theta & \sin 15\theta\\ -\sin 15\theta & \cos 15\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\frac{\pi}{2} & \sin\frac{\pi}{2}\\ -\sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$

16.設$A=\begin{bmatrix}2 & -3 & 1\\ a & 1 & 5\\ 1 & 2a & 8\end{bmatrix}$，$a\in R$，若$A$沒有反矩陣，則$a=$__________。

【解答】0，-2

【詳解】A^{-1}不存在 $\Rightarrow \det A=0$

$$\begin{vmatrix}2 & -3 & 1\\ a & 1 & 5\\ 1 & 2a & 8\end{vmatrix}=16+2a^2-15-1+24a-20a=0 \quad\Rightarrow\quad 2a^2+4a=0 \quad\therefore\quad a=0，-2$$

17.設$A=\begin{bmatrix}1 & a & b\\ 0 & 1 & c\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$，$n\in N$，則$A^n=$__________。

【解答】$\begin{bmatrix}1 & na & nb+\frac{n(n-1)}{2}ac\\ 0 & 1 & nc\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

【詳解】

(1) 設$B=\begin{bmatrix}0 & a & b\\ 0 & 0 & c\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ $\Rightarrow$ $B^2=\begin{bmatrix}0 & a & b\\ 0 & 0 & c\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & a & b\\ 0 & 0 & c\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & ac\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

$$\Rightarrow\quad B^3=\begin{bmatrix}0 & 0 & ac\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & a & b\\ 0 & 0 & c\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=O$$

同理，$B^4=B^5=\cdots=O$

(2) $A=\begin{bmatrix}1 & a & b\\ 0 & 1 & c\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=I+B$

$$\Rightarrow\quad A^n=(I+B)^n=I+C_1^nB+C_2^nB^2+\cdots=I+nB+\frac{n(n-1)}{2}B^2$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&na&nb\\0&0&nc\\0&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&\frac{n(n-1)}{2}ac\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&na&nb+\frac{n(n-1)}{2}ac\\0&1&nc\\0&0&1\end{bmatrix}$$

18.設$A=\begin{bmatrix}2&3\\4&5\end{bmatrix}$，

(1) $A^2-7A=$__________。(2) $A^4-4A^3-18A^2-41A-11I=$__________。（$I=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$）

【解答】(1)$\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}=2I$　(2)$\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}=-I$

【詳解】

(1) $A=\begin{bmatrix}2&3\\4&5\end{bmatrix}\ \Rightarrow\ A^2=\begin{bmatrix}2&3\\4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&3\\4&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}16&21\\28&37\end{bmatrix}$

$$\Rightarrow\ A^2-7A=\begin{bmatrix}16&21\\28&37\end{bmatrix}-7\begin{bmatrix}2&3\\4&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}=2I$$

(2)由$A^2-7A=2I\ \Rightarrow\ A^2-7A-2I=0$

設A為x，本題可視為$x^2-7x-2=0$，求$x^4-4x^3-18x^2-41x-11$之值利用除法：

$$\begin{array}{rrrrr|l}
1 & -4 & -18 & -41 & -11 & 1\ -7\ -2 \\ \cline{6-6}
1 & -7 & -2 & & & 1\ +3\ +5 \\ \hline
 & 3 & -16 & -41 & & \\
 & 3 & -21 & -6 & & \\ \cline{2-5}
 & & 5 & -35 & -11 & \\
 & & 5 & -35 & -10 & \\ \cline{3-5}
 & & & & -1 &
\end{array}$$

故所求為 $-I=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}$

19.$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\4&2&0\\-1&0&3\end{bmatrix}$，若$6A^{-1}=B$，則矩陣$B=$__________。

【解答】$\begin{bmatrix}6&0&0\\-12&3&0\\2&0&2\end{bmatrix}$

【詳解】

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\4&2&0&0&1&0\\-1&0&3&0&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&2&0&-4&1&0\\0&0&3&1&0&1\end{array}\right]$$

（第一列$\cdot(-4)$併入第二列，第一列併入第三列）

$$\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&-2&\frac{1}{2}&0\\0&0&1&\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}\end{array}\right]$$（第二列 · $(\frac{1}{2})$，第三列 · $(\frac{1}{3})$），使$[A\,|\,I]\to[I\,|\,A^{-1}]$

$$\therefore\quad A^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}\end{bmatrix}，B=6A^{-1}=\begin{bmatrix}6&0&0\\-12&3&0\\2&0&2\end{bmatrix}$$

20.$A=\begin{bmatrix}0.6&0.1&0.1&0.1\\0.2&0.5&0.1&0.1\\0.1&0.2&0.7&0\\0.1&0.2&0.1&0.8\end{bmatrix}$，$P=\begin{bmatrix}0.3\\0.4\\0.2\\0.1\end{bmatrix}$，若$A^2P=\begin{bmatrix}a\\b\\c\\d\end{bmatrix}$，則$d=$__________。

【解答】0.276

【詳解】

$$AP=\begin{bmatrix}0.6&0.1&0.1&0.1\\0.2&0.5&0.1&0.1\\0.1&0.2&0.7&0\\0.1&0.2&0.1&0.8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.3\\0.4\\0.2\\0.1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.25\\0.29\\0.25\\0.21\end{bmatrix}$$

$$A^2P=A(AP)=\begin{bmatrix}0.6&0.1&0.1&0.1\\0.2&0.5&0.1&0.1\\0.1&0.2&0.7&0\\0.1&0.2&0.1&0.8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.25\\0.29\\0.25\\0.21\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.225\\0.241\\0.258\\0.276\end{bmatrix}$$

$\therefore\quad a=0.225$，$b=0.241$，$c=0.258$，$d=0.276$

21.$I=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$表二階單位方陣，$A=\begin{bmatrix}1&1\\-2&4\end{bmatrix}$，$P=\begin{bmatrix}2&-1\\-1&1\end{bmatrix}$，則

滿足 $|A-\lambda I|=0$ 之$\lambda=$________________，又$PAP^{-1}=$____________。

【解答】2 或 3；$\begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix}$

【詳解】

(1) $A-\lambda I=\begin{bmatrix}1-\lambda&1\\-2&4-\lambda\end{bmatrix}$

$|A-\lambda I|=0 \iff (1-\lambda)(4-\lambda)+2=0 \iff \lambda^2-5\lambda+6=0 \iff \lambda=2$ 或 3

(2) $P=\begin{bmatrix}2&-1\\-1&1\end{bmatrix}$，知$P^{-1}=\begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix}$

$$PAP^{-1}=\begin{bmatrix}2&-1\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\-2&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-1\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&3\\2&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix}$$

$$\therefore\quad PAP^{-1}=\begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix}$$

22.設$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，$a$，$b$，$c$，$d\in\{0，1，2，3，4\}$，若$A^{-1}$存在，則此種$A$共有＿＿＿＿＿個。

【解答】512

【詳解】

$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，$a$，$b$，$c$，$d=0$，1，2，3，4，$A^{-1}$存在 $\Rightarrow$ $\det A=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\neq 0$

考慮$\det A=0$ 之情形

(1)四個 0 $\Rightarrow$ 1 個

(2)三個 0 $\Rightarrow$ $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}$，$x$可爲 1，2，3，4 $\Rightarrow$ 再考慮位置，共有 $4\times 4=16$ 個

(3)二個 0 $\Rightarrow$ $\begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & x \end{bmatrix}$，$x$可爲 1，2，3，4 $\Rightarrow$ 再考慮位置，共有 $16\times 4=64$ 個

(4)沒有 0

①四同 $\Rightarrow$ 共有 4 個

②二同二同 $\Rightarrow\begin{bmatrix} a & a \\ b & b \end{bmatrix}$，$a$，$b=1$，2，3，4，再考慮位置，共有$C_2^4\times 4=24$ 個

③二同二異 $\Rightarrow\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$，共有 4 個

$\therefore$ $\det A=0$ 的共有 113 個 $\Rightarrow$ $\det A\neq 0$ 的共有 $5^4-113=625-113=512$ 個

23.$I_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$，滿足$A^2+\alpha A+I_2=O$之實數$\alpha=$＿＿＿＿＿。（$O$表二階零矩陣）

【解答】-2

【詳解】

$A^2=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

使$A^2=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}=2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=2A-I_2$

$\therefore$ $A^2+(-2)A+I_2=O$，$\alpha=-2$

24.$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，若$A+A^2+A^3+\cdots+A^{20}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，則實數$b=$＿＿＿＿＿。

【解答】-210

【詳解】找規則

$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，$A^2=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，$A^3=\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，$A^4=\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，$\cdots$

$\therefore$ $b=-(1+2+3+\cdots+20)=-210$

25.$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$，則$(A+B)(A-B)-(A^2-B^2)=$＿＿＿＿＿。

【解答】$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

【詳解】

$AB=\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -2\\2 & 4\end{bmatrix}$

$BA=\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 3\end{bmatrix}$

則$(A+B)(A-B)-(A^2-B^2)=(A^2+BA-AB-B^2)-A^2+B^2$

$=BA-AB=\begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & -2\\2 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\-1 & -1\end{bmatrix}$

$\therefore\quad (A+B)(A-B)-(A^2-B^2)=\begin{bmatrix}1 & 1\\-1 & -1\end{bmatrix}$

26.設$A=\begin{bmatrix}\sin 75^\circ & \cos 75^\circ\\-\cos 75^\circ & \sin 75^\circ\end{bmatrix}$，$n\in N$，若$A^n=I=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$，則$n$之最小值= ＿＿＿＿＿。

【解答】24

【詳解】整理成旋轉矩陣

$A=\begin{bmatrix}\sin 75^\circ & \cos 75^\circ\\-\cos 75^\circ & \sin 75^\circ\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos 15^\circ & \sin 15^\circ\\-\sin 15^\circ & \cos 15^\circ\end{bmatrix}\Rightarrow\quad A^2=\begin{bmatrix}\cos 30^\circ & \sin 30^\circ\\-\sin 30^\circ & \cos 30^\circ\end{bmatrix}$

……………………………………，得$A^n=\begin{bmatrix}\cos(15^\circ\times n) & \sin(15^\circ\times n)\\-\sin(15^\circ\times n) & \cos(15^\circ\times n)\end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ 欲$A^n=I\quad\Rightarrow\quad 15^\circ\times n=360^\circ\times k$，$k\in N\Rightarrow\quad n=24k$，$k\in N\quad\therefore\quad n$之最小值 $=24$

27.$A=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{bmatrix}$，$A+A^2+A^3+A^4=\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}$，則$b-d=$＿＿＿＿＿。

【解答】$2+\sqrt{2}$

$A=\begin{bmatrix}\cos\dfrac{\pi}{4} & \sin\dfrac{\pi}{4}\\-\sin\dfrac{\pi}{4} & \cos\dfrac{\pi}{4}\end{bmatrix}$時，$A^2=\begin{bmatrix}\cos\dfrac{2\pi}{4} & \sin\dfrac{2\pi}{4}\\-\sin\dfrac{2\pi}{4} & \cos\dfrac{2\pi}{4}\end{bmatrix}$

$A^3=\begin{bmatrix}\cos\dfrac{3\pi}{4} & \sin\dfrac{3\pi}{4}\\-\sin\dfrac{3\pi}{4} & \cos\dfrac{3\pi}{4}\end{bmatrix}$，$A^4=\begin{bmatrix}\cos\pi & \sin\pi\\-\sin\pi & \cos\pi\end{bmatrix}$

此時$\theta=45^\circ$，$b=\sin\dfrac{\pi}{4}+\sin\dfrac{2\pi}{4}+\sin\dfrac{3\pi}{4}+\sin\pi$ 及

$d=\cos\dfrac{\pi}{4}+\cos\dfrac{2\pi}{4}+\cos\dfrac{3\pi}{4}+\cos\pi$

$\therefore\ b=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}+0=\sqrt{2}+1$，$d=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+0-\dfrac{\sqrt{2}}{2}-1=-1$，故$b-d=2+\sqrt{2}$

28.$M_t=\begin{bmatrix}t & 1\\3-t & t+1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\t+3 & 3t+1\end{bmatrix}$，$M_t$有反方陣的條件爲＿＿＿＿＿＿，又當$M_t\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$，其中$t=0$，$a=0$，$b=-1$時，數對$(x，y)=$＿＿＿＿＿＿。

【解答】$t\neq-3$，1，5，$(\dfrac{1}{15}，\dfrac{-1}{15})$

【詳解】

(1) $|AB|=|A||B|$

M_t有反方陣時，$\begin{vmatrix} t & 1 \\ 3-t & t+1 \end{vmatrix} \neq 0$ 且 $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ t+3 & 3t+1 \end{vmatrix} \neq 0$

得$t^2+2t-3\neq 0$ 且$t-5\neq 0$ $\therefore$ $t\neq -3$，1，5

(2) $M_0=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$，知$M_0^{-1}=\dfrac{1}{15}\begin{bmatrix} 7 & -1 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$

$M_0\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=M_0^{-1}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}=\dfrac{1}{15}\begin{bmatrix} 7 & -1 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}=\dfrac{1}{15}\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$

$\therefore$ $x=\dfrac{1}{15}$，$y=\dfrac{-1}{5}$，$(x，y)=(\dfrac{1}{15}，\dfrac{-1}{5})$

29.設方陣$B=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{bmatrix}$，則$B^2=$ ________，$B^{-1}=$ ________，若

$BX=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$，則$X=$ ________。

【解答】$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} -1 \\ 10 \\ 9 \end{bmatrix}$

【詳解】

$B^2=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，所以$B^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{bmatrix}$

$BX=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$時，$X=B^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 \\ 10 \\ 9 \end{bmatrix}$

30.設$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$，$I_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，則$A^2=$ ________，$A^3=$ ________，

$(I_2+A)^3=$ ________。

【解答】$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} 14 & -13 \\ -13 & 14 \end{bmatrix}$

【詳解】

$A^2=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$，

$A^3=A^2A=2\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}=2\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$

因爲$I_2A=AI_2=A$

$(I_2+A)^3=I_2^3+3I_2^2A+3I_2A^2+A^3$

$=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}+3\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}+3\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & -3\\-3 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}6 & -6\\-6 & 6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4 & -4\\-4 & 4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1+3+6+4 & 0-3-6-4\\0-3-6-4 & 1+3+6+4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14 & -13\\-13 & 14\end{bmatrix}$$

31.設$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\3 & 1 & -2\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1 & -1 & 3\\0 & 2 & 4\\3 & 1 & 1\end{bmatrix}$，則(1) $AB=$ ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。 (2) $BA^t=$ ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

【解答】(1) $\begin{bmatrix}7 & 5 & 13\\-3 & -3 & 11\end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix}5 & -4\\12 & -6\\7 & 8\end{bmatrix}$

【詳解】

$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\3 & 1 & -2\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1 & -1 & 3\\0 & 2 & 4\\3 & 1 & 1\end{bmatrix}$

(1) $AB=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\3 & 1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1 & 3\\0 & 2 & 4\\3 & 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 5 & 13\\-3 & -3 & 11\end{bmatrix}$

(2) $BA^t=\begin{bmatrix}1 & -1 & 3\\0 & 2 & 4\\3 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3\\2 & 1\\2 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & -4\\12 & -6\\7 & 8\end{bmatrix}$

32.設$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}k & 2\\3 & 9\end{bmatrix}$，若$AB=BA$，則$k=$ ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

【解答】6

【詳解】

$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}k & 2\\3 & 9\end{bmatrix}$，由 $AB=BA$，$\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k & 2\\3 & 9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k & 2\\3 & 9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix}k+6 & 20\\3k+12 & 42\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k+6 & 2k+8\\30 & 42\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}2k+8=20\\3k+12=30\end{cases} \Rightarrow k=6$

34.若$\begin{bmatrix}1 & x\\y & 1\end{bmatrix}^4=\begin{bmatrix}-7 & -4\\8 & -7\end{bmatrix}$，則$(x，y)=$ ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

【解答】$(1，-2)$

【詳解】

設$A=\begin{bmatrix}1 & x\\y & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & x\\y & 0\end{bmatrix}=I+B$，其中$B=\begin{bmatrix}0 & x\\y & 0\end{bmatrix}$

此時，$B^2=\begin{bmatrix}0 & x\\y & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & x\\y & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}xy & 0\\0 & xy\end{bmatrix}=xyI$

$A^2=(I+B)^2=I+2B+B^2=(1+xy)I+2B$

$A^4=(1+xy)^2I+4(1+xy)B+4xyI=(1+6xy+x^2y^2)I+4(1+xy)B=\begin{bmatrix}-7 & -4\\8 & -7\end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1+6xy+x^2y^2=-7 \\ 4x(1+xy)=-4 \\ 4y(1+xy)=8 \end{cases} \Rightarrow (x，y)=(1，-2)$$

35.若$A=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$且$A^6=\mathrm{I}$，且 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，則$\theta=$__________。

【解答】$\dfrac{\pi}{3}$

【詳解】

$A=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$時，$A^6=\begin{bmatrix} \cos 6\theta & -\sin 6\theta \\ \sin 6\theta & \cos 6\theta \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

因此$\begin{cases} \cos 6\theta=1 \\ \sin 6\theta=0 \end{cases}$且 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，此時 $6\theta=2\pi$，即$\theta=\dfrac{\pi}{3}$

36.旋轉矩陣$R=\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$，$0<\theta<2\pi$，$M=\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，若$R^3=I_2$，則$\theta$的最小值=______，

此時$(RMR^{-1})^3=$__________。

【解答】$\dfrac{2\pi}{3}$，$\begin{bmatrix} \dfrac{67}{4} & \dfrac{63\sqrt{3}}{4} \\ \dfrac{63\sqrt{3}}{4} & \dfrac{193}{4} \end{bmatrix}$

【詳解】

$$R^3=\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^3=\begin{bmatrix} \cos 3\theta & \sin 3\theta \\ -\sin 3\theta & \cos 3\theta \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\begin{cases} \cos 3\theta=1 \\ \sin 3\theta=0 \end{cases}$，$0<\theta<2\pi \Rightarrow 0<3\theta<6\pi$，$3\theta=2\pi, 4\pi$，則$\theta$的最小角$\dfrac{2\pi}{3}$

$$\begin{aligned}(RMR^{-1})^3&=(RMR^{-1})(RMR^{-1})(RMR^{-1}) \\ &=RMR^{-1}RMR^{-1}RMR^{-1} \\ &=RMMMR^{-1}=RM^3R^{-1}，（M^3=\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^3=\begin{bmatrix} 64 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}）\end{aligned}$$

$$=\begin{bmatrix} \cos\dfrac{2\pi}{3} & \sin\dfrac{2\pi}{3} \\ -\sin\dfrac{2\pi}{3} & \cos\dfrac{2\pi}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 64 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\dfrac{2\pi}{3} & \sin\dfrac{2\pi}{3} \\ -\sin\dfrac{2\pi}{3} & \cos\dfrac{2\pi}{3} \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} \dfrac{-1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{-\sqrt{3}}{2} & \dfrac{-1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 64 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dfrac{-1}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{-1}{2} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \dfrac{-1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{-\sqrt{3}}{2} & \dfrac{-1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -32 & -32\sqrt{3} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{-1}{2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{67}{4} & \dfrac{63\sqrt{3}}{4} \\ \dfrac{63\sqrt{3}}{4} & \dfrac{193}{4} \end{bmatrix}$$

37.$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$，

(1)若$A^3=\alpha A$，則$\alpha=$______________________，

(2)又I表四階單位方陣，而$(I+\frac{1}{2}A)^6=\beta I+\gamma A$時，數對$(\beta，\gamma)=$__________。

【解答】4，(32，16)

【詳解】

(1) $A=\begin{bmatrix}1&1&1&-1\\1&1&-1&1\\1&-1&1&1\\-1&1&1&1\end{bmatrix}$，單位方陣$I=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$

$A^2=4I$

$A^3=A^2A=4IA=4A$，$A^4=A^2A^2=16I$

$A^5=A^4A=16A$，$A^6=A^3A^3=4A\cdot4A=16A^2=64I$

$\therefore\ \ A^3=\alpha A$時，$\alpha=4$

(2) $(I+\frac{1}{2}A)^6$

$=I+6(\frac{1}{2}A)+15(\frac{1}{2}A)^2+20(\frac{1}{2}A)^3+15(\frac{1}{2}A)^4+6(\frac{1}{2}A)^5+(\frac{1}{2}A)^6$

$=I+3A+\frac{15}{4}\cdot4I+\frac{5}{2}\cdot4A+\frac{15}{16}\cdot16I+\frac{3}{16}\cdot16A+\frac{1}{64}\cdot64I$

$=(1+15+15+1)I+(3+10+3)A=32I+16A$

$\therefore\ \ (\beta，\gamma)=(32，16)$

38.$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$，若$A^{79}=(a_{ij})$，則$a_{13}=$__________。

【解答】3160

【詳解】

$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$，知$A^2=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}$，$A^3=\begin{bmatrix}1&3&6\\0&1&3\\0&0&1\end{bmatrix}$，$A^4=\begin{bmatrix}1&4&10\\0&1&4\\0&0&1\end{bmatrix}$，$\cdots$

其中$n=2，3，4，\cdots$時，A^n之$a_{13}=3，6，10，\cdots$

而 $3=1+2，6=1+2+3，10=1+2+3+4，\cdots$

故當$n=79$時，$a_{13}=1+2+3+\ \cdots\ +79=\frac{1}{2}\cdot79\cdot80=3160$

39.$A=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{4}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$，則$A^3=$__________，又$A^n=\begin{bmatrix}x&0\\y&z\end{bmatrix}$時，實數$y=$__________（以$n$表示）。

【解答】$\begin{bmatrix}\frac{1}{8}&0\\\frac{3}{16}&\frac{1}{8}\end{bmatrix}$，$\frac{n}{2^{n+1}}$

【詳解】

$A=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$，$A^2=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & 0\\ \frac{2}{8} & \frac{1}{4}\end{bmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & 0\\ \frac{2}{8} & \frac{1}{4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{8} & 0\\ \frac{3}{16} & \frac{1}{8}\end{bmatrix}$

$A^4=A^3A=\begin{bmatrix}\frac{1}{8} & 0\\ \frac{3}{16} & \frac{1}{8}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{16} & 0\\ \frac{4}{32} & \frac{1}{16}\end{bmatrix}$，同理$A^5=\begin{bmatrix}\frac{1}{32} & 0\\ \frac{5}{64} & \frac{1}{32}\end{bmatrix}$，…

$A^n=\begin{bmatrix}\frac{1}{2^n} & 0\\ \frac{n}{2^{n+1}} & \frac{1}{2^n}\end{bmatrix}$ $\therefore\ y=\frac{n}{2^{n+1}}$

40.Γ：$|x|+2|y|=2$，Γ 上任一點$(a，b)$使$(2a-b+1，a+b+2)$形成圖形Γ'，則Γ'所圍面積爲__________。

【解答】12

【詳解】

Γ 上任一點$(a，b)$移到Γ'上之點$(a'，b')$滿足 $a'=2a-b+1$ 及 $b'=a+b+2$

此即$\begin{bmatrix}a'-1\\ b'-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}$

將Γ 的四頂點$(a，b)\Rightarrow A(2，0)，A'(-2，0)，B(0，1)，B'(0，-1)$

移至Γ'的四頂點$(a'，b')\Rightarrow P(5，4)，P'(-3，0)，Q(0，3)$與 $Q'(2，1)$

□$ABA'B'$的面積爲 4，$\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=3$，□$PQP'Q'$的面積爲 $4\cdot 3=12$

（其中$\overrightarrow{PQ}=(-5，-1)$，$\overrightarrow{PQ'}=(-3，-3)$，□$PQP'Q'$的面積爲$\begin{vmatrix}-5 & -1\\ -3 & -3\end{vmatrix}=12$）

41.設$O(0，0)$，$A(4，2)$爲平面上兩點

(1)若△AOB爲正三角形且B在第一象限內，則B的坐標爲____________。

(2)若$OABC$爲矩形，點C在第二象限內，且$\overline{OC}=2\overline{OA}$，則頂點$C$的坐標爲____________。

【解答】(1) $(2-\sqrt{3}，2\sqrt{3}+1)$ (2) $(-4，8)$

【詳解】

(1)$\angle AOB=60°$，點 B 爲 A 經過 60°旋轉變換後的位置，設 $B(x'，y')$，則

$$\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos 60° & -\sin 60°\\ \sin 60° & \cos 60°\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2-\sqrt{3}\\ 2\sqrt{3}+1\end{bmatrix}$$

$\therefore\ B(2-\sqrt{3}，2\sqrt{3}+1)$

(2)點 A 經過 90°旋轉後的位置爲 $A'(x，y)$時

$$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos 90° & -\sin 90°\\ \sin 90° & \cos 90°\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\ 4\end{bmatrix}$$

A'再經伸縮 2 倍的位置爲 C，則 C 的坐標爲$(-4，8)$

42.設直線L在方陣$\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}$的推移變換下，得一新直線$L'$，若$L$之方程式爲 $4x+3y-5=0$，則 L'之方程式爲＿＿＿＿＿＿。

【解答】$4x-5y-5=0$

【詳解】

$\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x+2y\\y\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x'=x+2y\\y'=y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=x'-2y'\\y=y'\end{cases}$代入 $4x+3y-5=0$

$\Rightarrow\ 4(x'-2y')+3y'-5=0\ \Rightarrow\ 4x'-5y'-5=0$，即 L'之方程式爲 $4x-5y-5=0$

43.平面上有一定點P，作下列各種變換後得另一點$P'(5，2)$，試分別求變換前，此定點P的坐標。

(1)平移向量$\vec{v}=(2，1)$：＿＿＿＿＿＿。

(2)以原點爲中心，旋轉$\tan^{-1}\dfrac{3}{2}$：＿＿＿＿＿＿。

(3)對直線 $4x-3y=0$ 作鏡射：＿＿＿＿＿＿。

(4)以原點爲中心，縮短爲$\dfrac{2}{3}$倍：＿＿＿＿＿＿。

(5)沿y軸方向推移x坐標的 2 倍：＿＿＿＿＿＿。

【解答】(1) $(3，1)$　(2) $\left(\dfrac{16}{\sqrt{13}}，\dfrac{-11}{\sqrt{13}}\right)$　(3) $\left(\dfrac{13}{25}，\dfrac{134}{25}\right)$　(4) $\left(\dfrac{15}{2}，3\right)$　(5) $(5，-8)$

【詳解】

(1)$\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x'-2\\y'-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5-2\\2-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$，即$P(3，1)$

(2) $\theta=\tan^{-1}\dfrac{3}{2}\ \Rightarrow\ \cos\theta=\dfrac{2}{\sqrt{13}}$，$\sin\theta=\dfrac{3}{\sqrt{13}}$

$\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{-3}{\sqrt{13}}\\\frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}}\\\frac{-3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{16}{\sqrt{13}}\\\frac{-11}{\sqrt{13}}\end{bmatrix}$，即$P\left(\dfrac{16}{\sqrt{13}}，\dfrac{-11}{\sqrt{13}}\right)$

(3)直線 $4x-3y=0$ 之方向角(斜角)$\theta\ \Rightarrow\ \tan\theta=\dfrac{4}{3}$，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$

$\Rightarrow\ \cos\theta=\dfrac{3}{5}$，$\sin\theta=\dfrac{4}{5}\ \Rightarrow\cos2\theta=\dfrac{-7}{25}$，$\sin2\theta=\dfrac{24}{25}$

$\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos2\theta & \sin2\theta\\\sin2\theta & -\cos2\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{-7}{25} & \frac{24}{25}\\\frac{24}{25} & \frac{7}{25}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{13}{25}\\\frac{134}{25}\end{bmatrix}$，即$P\left(\dfrac{13}{25}，\dfrac{134}{25}\right)$

(4)$\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & 0\\0 & \frac{2}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{2} & 0\\0 & \frac{3}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{15}{2}\\3\end{bmatrix}$，即$P\left(\dfrac{15}{2}，3\right)$

(5)$\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\-2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\-8\end{bmatrix}$，即$P(5，-8)$

44.平面上有一橢圓Γ：$4x^2+y^2=4$，將Γ 作下列各變換後，得一新曲線Γ'，試分別求Γ'之方程式。

(1)平移向量$\bar{v}=(1，1)$：＿＿＿＿＿。

(2)以原點為中心，旋轉 45°：＿＿＿＿＿。

(3)對直線$x+y=0$ 作鏡射：＿＿＿＿＿。

(4)以原點為中心，x坐標伸長為 2 倍，y坐標伸長為 3 倍：＿＿＿＿＿。

(5)沿x軸方向推移y坐標的 2 倍，沿y軸方向推移x坐標的 3 倍：＿＿＿＿＿。

【解答】(1) $4(x-1)^2+(y-1)^2=4$　(2) $5x^2+6xy+5y^2=8$　(3) $x^2+4y^2=4$

(4) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{36}=1$　(5) $13x^2-22xy+17y^2=100$

【詳解】

(1)設Γ'上之動點$P'(x'，y')$ ⇒ $\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ ⇒ $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x'-1\\y'-1\end{bmatrix}$

以$x=x'-1$，$y=y'-1$ 代入Γ：$4x^2+y^2=4$ ⇒ $4(x'-1)^2+(y'-1)^2=4$

即Γ'之方程式為 $4(x'-1)^2+(y'-1)^2=4$

(2)$\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos 45^\circ & -\sin 45^\circ\\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ ⇒ $\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\\ \frac{-x'+y'}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$代入$\Gamma$

⇒ $4(\dfrac{x'+y'}{\sqrt{2}})^2+(\dfrac{-x'+y'}{\sqrt{2}})^2=4$ ⇒ $4(x'+y')^2+(-x'+y')^2=8$

⇒ $5x'^2+6x'y'+5y'^2=8$，即Γ'之方程式為 $5x^2+6xy+5y^2=8$

(3)直線$x+y=0$ 之斜角$\theta=135^\circ$ ⇒ $\cos2\theta=0$，$\sin2\theta=-1$

⇒ $\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1\\-1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ ⇒ $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1\\-1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-y'\\-x'\end{bmatrix}$

代入Γ ⇒ $4(-y')^2+(-x')^2=4$ ⇒ $x'^2+4y'^2=4$，即Γ'之方程式為$x^2+4y^2=4$

(4)$\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ ⇒ $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\0 & \frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}x'\\ \frac{1}{3}y'\end{bmatrix}$代入$\Gamma$

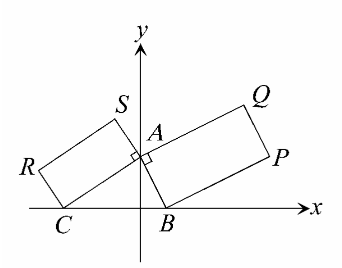
⇒ $4(\dfrac{1}{2}x')^2+(\dfrac{1}{3}y')^2=4$ ⇒$x'^2+\dfrac{y'^2}{9}=4$ ⇒$\dfrac{x'^2}{4}+\dfrac{y'^2}{36}=1$，即$\Gamma'$之方程式為$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{36}=1$

(5)$\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ ⇒ $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\dfrac{1}{-5}\begin{bmatrix}1 & -2\\-3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{-x'+2y'}{5}\\ \frac{3x'-y'}{5}\end{bmatrix}$代入$\Gamma$

⇒ $4(\dfrac{-x'+2y'}{5})^2+(\dfrac{3x'-y'}{5})^2=4$ ⇒ $4(-x'+2y')^2+(3x'-y')^2=100$

⇒ $13x'^2-22x'y'+17y'^2=100$，即Γ'之方程式為 $13x^2-22xy+17y^2=100$

45.三點$A(0，2)$，$B(1，0)$，$C(-3，0)$，□$ABPQ$與□$ACRS$均為矩形且$\overline{AQ}=2\overline{AB}$，$\overline{AC}=2\overline{AS}$，則$Q$的坐標為＿＿＿＿＿，$S$的坐標為＿＿＿＿＿，又$\overrightarrow{CQ}\cdot\overrightarrow{BS}=$＿＿＿＿＿。（如下圖）



【解答】$(4，4)$，$(-1，\frac{7}{2})$，0

【詳解】

旋轉矩陣 $T(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$，$T(90°)=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$

$\overrightarrow{AB}=(1，-2)$，$\overrightarrow{AC}=(-3，-2)$

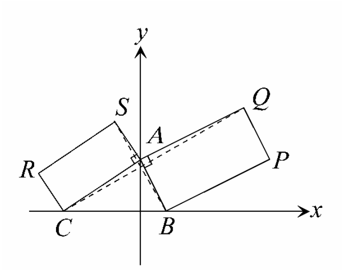
將 $\overrightarrow{AB}$ 經 $T(90°)$變換，再伸縮 2 倍成爲 $\overrightarrow{AQ}$

而將 $\overrightarrow{AC}$ 經 $T(-90°)$變換，再伸縮 $\frac{1}{2}$ 倍成爲 $\overrightarrow{AS}$

(1) $\begin{bmatrix}x\\ y-2\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -2\end{bmatrix}$ $\Leftrightarrow$ $x=4$，$y=4$ $\therefore$ $Q=(4，4)$

(2) $\begin{bmatrix}x\\ y-2\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3\\ -2\end{bmatrix}$ $\Leftrightarrow$ $x=-1$，$y=\frac{7}{2}$ $\therefore$ $S=(-1，\frac{7}{2})$

(3) $\overrightarrow{CQ}=(7，4)$，$\overrightarrow{BS}=(-2，\frac{7}{2})$，$\overrightarrow{CQ}\cdot\overrightarrow{BS}=7(-2)+4\cdot\frac{7}{2}=0$，此時 $\overline{CQ}\perp\overline{BS}$



46.在坐標平面上，$A(x，y)$沿著x軸推移y坐標之 3 倍後，再以原點爲中心旋轉 60°得點$A'(x'，y')$，若Γ 上每一點經上述變換方式後得圖形Γ'：$y^2=4x$，求得Γ 之方程式$(\sqrt{3}x+3\sqrt{3}y+y)^2=ax+by$，則 $3a-b=$____________。

【解答】$8\sqrt{3}$

【詳解】

$$\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos 60° & -\sin 60°\\ \sin 60° & \cos 60°\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{x+(3-\sqrt{3})y}{2}\\ \frac{\sqrt{3}x+(3\sqrt{3}+1)y}{2}\end{bmatrix}$$

Γ'：$y^2=4x$，Γ'之每一點$(x'，y')$滿足$y'^2=4x'$

$\Rightarrow\quad [\dfrac{\sqrt{3}x+(3\sqrt{3}+1)y}{2}]^2 = 4\cdot\dfrac{1}{2}[x+(3-\sqrt{3})y]$

$\Rightarrow\quad \Gamma:(\sqrt{3}x+3\sqrt{3}y+y)^2 = 8x+8(3-\sqrt{3})y$

$3a-b = 3\times 8-8(3-\sqrt{3}) = 8\sqrt{3}$

47.Γ：$|x|+2|y|=2$，先將Γ 右移 1 單位和上移 1 單位後，再經矩陣A作一平面變換變成Γ'，其中$A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$，若$\Gamma$ 的中心爲P點，P經平面變換後變成Γ'的中心點P'，則P'的坐標爲＿＿＿＿＿，Γ'的表示式爲＿＿＿＿＿。

【解答】$(1，2)$，$|x+y-3|+2|x-2y+3|=6$

【詳解】

Γ 上任一點$(a，b)$移到Γ'上之點$(a'，b')$滿足

$$\begin{bmatrix}a'\\ b'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a+1\\ b+1\end{bmatrix}$$

使$\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}a'\\ b'\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}=\dfrac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a'\\ b'\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$

$\therefore\quad a=\dfrac{1}{3}(a'+b'-3)$，$b=\dfrac{1}{3}(-a'+2b'-3)$

而由 $|a|+2|b|=2$，知 $|a'+b'-3|+2|-a'+2b'-3|=6$

即Γ'：$|x+y-3|+2|-x+2y-3|=6$

Γ 的中心$(0，0)$，由$\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0+1\\ 0+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}$得$\Gamma'$的中心$(1，2)$

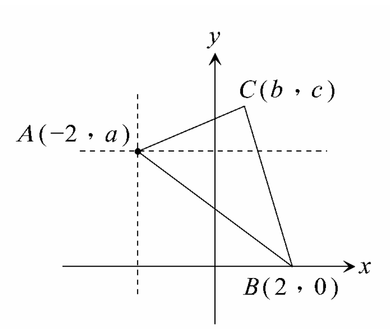
而二直線 $x+y-3=0$ 與 $-x+2y-3=0$ 的交點爲Γ'的中心$(1，2)$

48.設平面上有三點$A(-2，a)$，$B(2，0)$，$C(b，c)$，$a，b，c>0$，若$\overline{AB}=5$，$\overline{AC}=2$，$\angle BAC=60°$，則$a+b+c=$＿＿＿＿＿。

【解答】$\dfrac{21+7\sqrt{3}}{5}$

【詳解】

如圖



$\overline{AB}=5$，$a>0\quad\Rightarrow\quad a=3$，即$A(-2，3)$平移至以 A 爲新原點，以 A 爲中心，將 B 點旋轉 60°再縮短爲$\overline{AB}$ 的$\dfrac{2}{5}$倍而得 C 點，設 $C(b，c)$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} b+2 \\ c-3 \end{bmatrix} = \frac{2}{5}\begin{bmatrix} \cos 60° & -\sin 60° \\ \sin 60° & \cos 60° \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix} = \frac{2}{5}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4+3\sqrt{3}}{5} \\ \frac{4\sqrt{3}-3}{5} \end{bmatrix}$$

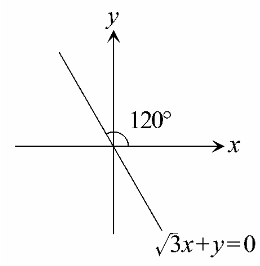
$$\Rightarrow (b，c) = (\frac{-6+3\sqrt{3}}{5}，\frac{4\sqrt{3}+12}{5})$$

$$\therefore \ a+b+c = 3 + \frac{-6+3\sqrt{3}}{5} + \frac{4\sqrt{3}+12}{5} = \frac{21+7\sqrt{3}}{5}$$

49.對直線L：$\sqrt{3}x+y=0$ 鏡射，點$P(5，4)$經過變換後的點的坐標爲____________。

【解答】$(\frac{-5-4\sqrt{3}}{2}，\frac{-5\sqrt{3}+4}{2})$

【詳解】



直線 L：$\sqrt{3}x+y=0$ 是有向角 120°的終邊所在的直線，令$\frac{\theta}{2}=120°$，則 $\theta=240°$

$P(5，4)$ 以 L 爲鏡射軸，變換後的位置爲 $Q(x'，y')$

則$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 240° & \sin 240° \\ \sin 240° & -\cos 240° \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-5-4\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-5\sqrt{3}+4}{2} \end{bmatrix}$

50.橢圓$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$ 對直線$y=x$鏡射所得的圖形的方程式爲____________。

【解答】$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

【詳解】

設$P(a，b)$以直線$y=x$爲鏡射軸後的鏡射點$Q(x_0，y_0)$

則$x_0=b$且$y_0=a$，因此，當點P在橢圓$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$ 時，$\frac{a^2}{16}+\frac{b^2}{25}=1$，可得$\frac{{y_0}^2}{16}+\frac{{x_0}^2}{25}=1$，

即鏡射所得的圖形爲$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

51.在平面上，若點$P(1，2)$平移$\vec{d}=(3，2)$後得點Q，Q再經過以原點爲中心的旋轉 30°後得R，則Q的坐標爲____________，R的坐標爲________________。

【解答】$(4，4)$，$(2\sqrt{3}-2，2+2\sqrt{3})$

【詳解】

點 $P(1，2)$經過平移$\vec{d}=(3，2)$的變換得 Q，Q 的坐標爲$(1+3，2+2)=(4，4)$

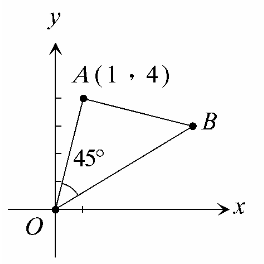
Q 經過 30°旋轉後的位置爲 R，R 的坐標爲$(x''，y'')$

則$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2\sqrt{3}-2 \\ 2+2\sqrt{3} \end{bmatrix}$

52.設$O(0，0)$，$A(1，4)$，且$\triangle OAB$爲等腰三角形，其中$\angle AOB=45^\circ$，且$\angle A=90^\circ$，而B在第一象限內，則B的坐標爲________________，又$\triangle AOB$對y軸鏡射得$\triangle A'OB'$，而A'爲A的鏡射點，B'爲B的鏡射點，則A'的坐標爲______________。

【解答】$(5，3)$，$(-1，4)$

【詳解】



如上圖，$\angle AOB=45^\circ$，$\angle A=90^\circ$，所以點 B 爲 A 旋轉 -45°後再伸縮$\sqrt{2}$倍

因此 B 的坐標$(x，y)$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos(-45^\circ) & -\sin(-45^\circ) \\ \sin(-45^\circ) & \cos(-45^\circ) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{-\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}，B(5，3)$$

以 y 軸爲鏡射軸，A 的鏡射點 A'，A'的坐標爲$(-1，4)$

53.設$A=\begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$，$n\in N$，$k\in R$，$k>0$，若$A^n=kI$，則$n$之最小值 =__________，此時$k=$

。

【解答】12，4096

【詳解】

$$A=\begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}=2\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}=2\begin{bmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{bmatrix}$$

表旋轉 30°後再伸長爲 2 倍

$$I=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos 360^\circ & -\sin 360^\circ \\ \sin 360^\circ & \cos 360^\circ \end{bmatrix} \Rightarrow n\text{之最小值}=12 \Rightarrow A^{12}=2^{12}\cdot I \quad \therefore \quad k=4096$$

54.$\triangle ABC$中，若$A(2，1)$，$B(3，-1)$，

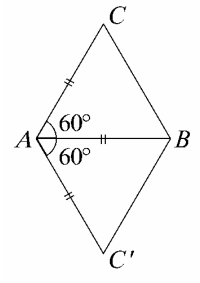
(1)若$\triangle ABC$爲正三角形，則C點之坐標爲__________。（二解）

(2)若$\triangle ABC$爲直角三角形，$\angle A=90^\circ$，$\overline{AB}:\overline{AC}=2:3$，則$C$點之坐標爲__________。（二解）

【解答】(1) $(\frac{5+2\sqrt{3}}{2}，\frac{\sqrt{3}}{2})$或$(\frac{5-2\sqrt{3}}{2}，-\frac{\sqrt{3}}{2})$　(2) $(5，\frac{5}{2})$或$(-1，-\frac{1}{2})$

【詳解】

(1)如下圖：此 C 點有二解



由 $A(2，1)$，$B(3，-1)$，可設 $C(x，y)$

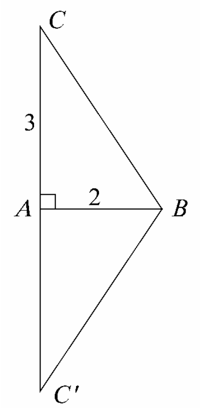
以 A 爲中心，將 B 作 $\pm 60°$之旋轉變換後可得二個 C 點之坐標

①$\begin{bmatrix} x-2 \\ y-1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos 60° & -\sin 60° \\ \sin 60° & \cos 60° \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3-2 \\ -1-1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$　$\Rightarrow$　$(x，y)=(\frac{5+2\sqrt{3}}{2}，\frac{\sqrt{3}}{2})$

②$\begin{bmatrix} x-2 \\ y-1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos(-60°) & -\sin(-60°) \\ \sin(-60°) & \cos(-60°) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3-2 \\ -1-1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$　$(x，y)=(\frac{5-2\sqrt{3}}{2}，-\frac{\sqrt{3}}{2})$

(2)如下圖：此 C 點有二解



$A(2，1)$，$B(3，-1)$，可設 $C(x，y)$

以 A 爲中心，將 B 旋轉 $\pm 90°$後再伸長爲$\frac{3}{2}$倍，可得二個 C 點

①$\begin{bmatrix} x-2 \\ y-1 \end{bmatrix}=\frac{3}{2}\begin{bmatrix} \cos 90° & -\sin 90° \\ \sin 90° & \cos 90° \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3-2 \\ -1-1 \end{bmatrix}=\frac{3}{2}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$

$\therefore$　$(x，y)=(5，\frac{5}{2})$

②$\begin{bmatrix} x-2 \\ y-1 \end{bmatrix}=\frac{3}{2}\begin{bmatrix} \cos(-90°) & -\sin(-90°) \\ \sin(-90°) & \cos(-90°) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3-2 \\ -1-1 \end{bmatrix}=\frac{3}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -3 \\ -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$

$\therefore\quad (x，y)=(-1，-\frac{1}{2})$

55.二階方陣A將二點(2，0)與(1，1)分別變換爲(4，2)與(1，2)，則$A=$__________。

【解答】$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

【詳解】

由 $A\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$與 $A\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$知 $A\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

又$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$A=\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\cdot\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

$\therefore\quad A=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

56.圓$C：x^2+y^2=4$經矩陣A作一平面變換後得橢圓$\Gamma：x^2+4y^2=4$，即C上任一點$(a，b)$經矩陣A移至Γ上之一點$(a'，b')$滿足$\begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix}=A\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$，此時可取$A=$__________。

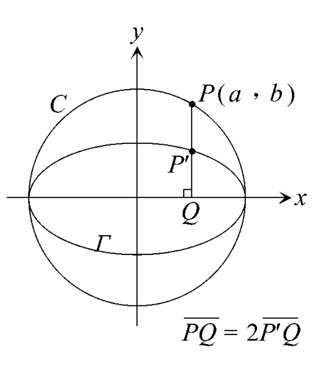
【解答】$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

【詳解】

Γ上任一點$(a'，b')$是由圓C上一點$(a，b)$經A變換而得

而$a^2+b^2=4 \quad\Leftrightarrow\quad a^2+(\frac{b}{2})^2\cdot 4=4 \quad\Leftrightarrow\quad a'=a，b'=\frac{1}{2}b$

$\therefore\quad \begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$，即$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$



57.空間中三階方陣A將三點(0，1，0)，(0，0，1)，(1，1，1)分別變換爲三點(1，－2，2)，(2，－1，－2)，(5，－1，1)，則$A=$__________，又點(1，0，0)經矩陣A變換爲點__________。

【解答】$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$，(2，2，1)

【詳解】

$$A\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&5\\-2&-1&-1\\2&-2&1\end{bmatrix}$$，易知 $\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}-1&1&0\\-1&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}$

得 $A=\begin{bmatrix}1&2&5\\-2&-1&-1\\2&-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&2&5\\-2&-1&-1\\2&-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&1&0\\-1&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1&2\\2&-2&-1\\1&2&-2\end{bmatrix}$

又 $A\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\2\\1\end{bmatrix}$，點(1，0，0)經 A 變換爲(2，2，1)