<table>
<tr><td colspan="6">高雄市明誠中學 高三數學平時測驗　　日期：95.03.13</td></tr>
<tr><td rowspan="2">範圍</td><td rowspan="2">Book5　ch4 矩陣(1)</td><td>班級</td><td>普三　　班</td><td rowspan="2">姓名</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>座號</td><td></td></tr>
</table>

一、是非選擇題(每題 5 分)

1. 若$AX=B$，$\det A\neq 0$，則$X=BA^{-1}$。

【解答】╳

【詳解】$\det A\neq 0 \;\Rightarrow\; A^{-1}$存在

$AX=B \;\Rightarrow\; A^{-1}(AX)=A^{-1}B \;\Rightarrow (A^{-1}A)X=A^{-1}B \;\Rightarrow IX=A^{-1}B \;\Rightarrow X=A^{-1}B\neq BA^{-1}$

2. 若$A=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{bmatrix}$，則$A^2=\begin{bmatrix}\cos 2\theta & \sin 2\theta\\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta\end{bmatrix}$。

【解答】╳

【詳解】$A=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{bmatrix} \;\Rightarrow\; A^2=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=I$

3. 設 A，B，C 表示矩陣，O 表示零矩陣，I 表示單位矩陣。下列何者正確？

(A)設 A 為三階方陣，且 $A\neq O$，則 A 必有反方陣。

(B)若$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}B$，且 A，B 為二階方陣，則 $A=B$。

(C)設 AC，BC 都有意義，則 $AC+BC=(A+B)C=C(A+B)$。

(D)矩陣$\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 6\end{bmatrix}$沒有乘法反矩陣。

(D)矩陣$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$沒有乘法反矩陣。

【解答】(A)╳　(B)╳　(C)╳　(D)○　(E)╳

【詳解】

(1)當 $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$時，$A\neq O$，且 A 沒有反方陣

(2) $A=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$時，$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$，但 $A\neq B$

(3) $AC+BC=(A+B)C$，但不一定會等於 $C(A+B)$

(4) $\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 6\end{vmatrix}=0$ 時，$\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 6\end{bmatrix}$沒有乘法反矩陣

(5) $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{vmatrix}=6+0+0-0-8-0=-2\neq 0$，$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$有乘法反矩陣

4. 矩陣$(AB)^{-1}=A^{-1}B^{-1}$，A^{-1}表A之反方陣。

【解答】╳

【詳解】$(AB)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$

$(AB)(B^{-1}A^{-1})=A(BB^{-1})A^{-1}=(AI)A^{-1}=AA^{-1}=I$

5. 矩陣$(AB)^{t}=A^{t}B^{t}$，A^{t}表A之轉置矩陣。

【解答】╳

【詳解】$(AB)^{t}=B^{t}\cdot A^{t}$ ，注意它的順序。

6. 矩陣 $BA=CA$，$A\neq O$，則 $B=C$。

【解答】╳

【詳解】例如$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$，但$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}3 & 4\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

應爲$BA=CA$，$\det A\neq 0 \quad\Rightarrow\quad (BA)A^{-1}=(CA)A^{-1} \quad\Rightarrow\quad B=C$

7. 矩陣$(A+B)(A-B)=A^2-B^2$。

【解答】╳

【詳解】矩陣乘法沒有交換律，即$AB\neq BA$，$(A+B)(A-B)=A^2-AB+BA-B^2$

8. 下列所指的矩陣A，B，M皆爲二階方陣，O爲零方陣，I爲單位方陣。下列何者正確？

(A)任何不是O的方陣M都有乘法反元素M^{-1}。

(B) $AB=BA$恆成立。

(C)若$AB=I$，則A，B都有乘法反元素。

(D)$(A+B)(A-B)=A^2-B^2$恆成立。

(E)若$A^2=I$，則$A=I$或$A=-I$。

【解答】(A)╳ (B)╳ (C)○ (D)╳ (E)╳

【詳解】

(1)方陣M，當$|M|=0$時，M沒有反方陣

(2) $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$時，$AB=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}$，$BA=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}\neq AB$

(3)$|AB|=|I|$ ，即$|A|\,|B|=1$，所以$|A|$ ，$|B|$均不爲 0，A，B都有反方陣

(4)如第(2)題中的A，B時，$(A+B)(A-B)\neq A^2-B^2$

(5)當$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$時，$A^2=I$

9. 在坐標平面上，以原點爲中心，點 $P(x，y)$經過伸縮 k 倍的變換（$k>0$）後，新的點的坐標$(x'，y')$，以矩陣表示如右：$\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & k\\ k & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$。

【解答】╳

【詳解】點 $P(x，y)$伸縮 k 倍後到 $P'(x'，y')$，則$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} kx \\ ky \end{bmatrix}$

10.若一平面變換的矩陣表示爲$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$，則此平面變換爲以 x 軸爲對稱軸的對稱變換。

【解答】○

【詳解】點 $P(x，y)$經變換$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$的結果到 $Q(x'，y')$，則$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$

此結果爲以 x 軸爲對稱軸的對稱變換

11.下列各方陣所定義的平面變換，何者爲旋轉？

(A) $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ (B) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ (D) $\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ (E) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

【解答】(C)

【詳解】

轉角θ 所對應之方陣爲$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$；或 $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

(A) $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ -\sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{bmatrix}$ $\Rightarrow$ 不表旋轉

(B) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos 30^\circ & \sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & -\cos 30^\circ \end{bmatrix}$ $\Rightarrow$ 表鏡射而不表旋轉

(C) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos 90^\circ & \sin 90^\circ \\ -\sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{bmatrix}$ $\Rightarrow$ 表旋轉 -90°

(D) $\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}$ $\Rightarrow$ 不表旋轉也不表鏡射

(E) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$表平面上的一般變換 $\Rightarrow$ 不表旋轉

12. 設有二矩陣 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$，若矩陣 $X=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$滿足 $4A+2X=3B$，則 $c=$

(A) 4 (B) -3 (C) $\frac{1}{2}$ (D) 3 (E) -4

【解答】(B)

【詳解】$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

由 $4A+2X=3B \Rightarrow X=\frac{1}{2}(3B-4A)=\frac{1}{2}(3\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}-4\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix})$

$$=\frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}12 & 9\\ 6 & 3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4 & 8\\ 12 & 16\end{bmatrix}\right)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}8 & 1\\ -6 & -13\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & \frac{1}{2}\\ -3 & -\frac{13}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}，\therefore\quad c=-3$$

13.設有矩陣$A=(a_{ij})_{4\times 4}$，A^t表A之轉置矩陣，若$A+A^t=O_{4\times 4}$，則下列何者不一定成立？

(A) $a_{33}=0$ (B) $a_{23}=a_{32}$ (C) $a_{23}+a_{32}=0$ (D) $a_{12}=-a_{21}$ (E) A之所有元之總和為 0

【解答】(B)

【詳解】

$A^t+A=O \Rightarrow A^t=-A \Rightarrow A$為反對稱矩陣，此$A$滿足$a_{ii}=0$ 且$a_{ij}=-a_{ji}$，$\forall i\neq j$

14.設方陣$A=\begin{bmatrix}3x & -1\\ 1 & 3\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}x & -2\\ 2 & 1\end{bmatrix}$，$I_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，且 $4A+3B-2(A+2B)=\lambda I_2$，其中$x$，$\lambda$為兩實數，則$x=$(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 3 (E) 5

【解答】(C)

【詳解】 當 $4A+3B-2(A+2B)=\lambda I_2$時

$4A+3B-2A-4B=\lambda I_2$，即 $2A-B=\lambda I_2$

又 $2A-B=\begin{bmatrix}6x & -2\\ 2 & 6\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}x & -2\\ 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5x & 0\\ 0 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}$時，$5x=\lambda=5$，所以$x=1$，$\lambda=5$

15.設矩陣$\begin{bmatrix}x+\frac{1}{x} & x^4+\frac{1}{x^4}\\ x^6+\frac{1}{x^6} & |x|\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & a\\ b & c\end{bmatrix}$，則下列敘述何者正確？

(A) $a=1$ (B) $b=2$ (C) $c=1$ (D) $a+c=0$ (E) $a+b+c=2$

【解答】(B)(C)(D)(E)

【詳解】 $x+\frac{1}{x}=1 \Rightarrow x^2-x+1=0 \Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}=\cos 60°\pm i\sin 60°$

$a=x^4+\frac{1}{x^4}=(\cos 240°\pm i\sin 240°)+(\cos 240°\mp i\sin 240°)=2\cos 240°=2\cdot(-\frac{1}{2})=-1$

$b=x^6+\frac{1}{x^6}=(\cos 360°\pm i\sin 360°)+(\cos 360°\mp i\sin 360°)=2\cos 360°=2\cdot 1=2$

$c=|x|=\sqrt{\cos^2 60°+\sin^2 60°}=1$

16.設 $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & -2\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}a & 1\\ 1 & b\end{bmatrix}$，$a$，$b\in R$，若 $AB=BA$，則 $a-b=$

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

【解答】(D)

【詳解】$A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & -2\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}a & 1\\ 1 & b\end{bmatrix}$，$AB=BA \Rightarrow \begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & 1\\ 1 & b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & 1\\ 1 & b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & -2\end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix}2a+1 & 2+b\\ a-2 & 1-2b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2a+1 & a-2\\ b+2 & 1-2b\end{bmatrix} \Rightarrow 2+b=a-2 \Rightarrow a-b=4$

17.設A，B均爲 2 階方陣，I爲 2 階單位方陣，下列敘述何者正確？

(A)若$A^2=O$，則$A=O$ (B)若$A^2=I$，則$A=I$或$A=-I$(C)若$A^2=A$，則$A=O$或$A=I$ (D)若$AB=O$，則$BA=O$ (E)若$AB=O$，$\det A\neq 0$，則$B=O$

【解答】(E)

【詳解】

(A) $A=\begin{bmatrix}2&1\\-4&-2\end{bmatrix}\neq O \Rightarrow A^2=\begin{bmatrix}2&1\\-4&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\-4&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}=O$

(B) $A=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\neq I$或$-I \Rightarrow A^2=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=I$

(C) $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\neq O$或$I \Rightarrow A^2=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}=A$

(D) $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$

$\Rightarrow AB=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}=O$，$BA=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\neq O$

(E) $AB=O$，$\det A\neq 0 \Rightarrow A^{-1}$存在 $\Rightarrow A^{-1}(AB)=A^{-1}\cdot O \Rightarrow IB=O \Rightarrow B=O$

18.如果將每天天氣的狀態略分爲晴、陰、雨等三種情況，根據統計資料知道，某地天氣變化的機率如下表所示：

		某日天氣		
次日天氣		晴	陰	雨
	晴	0.5	0.4	0.3
	陰	0.4	0.4	0.5
	雨	0.1	0.2	0.2

如果今天是晴天，則下列哪些是正確的？

(A)明天是雨天的機率爲 0.5

(B)明天晴天或陰天的機率爲 0.9

(C)後天（即兩天後）是晴天的機率爲 0.4

(D)後天是陰天的機率超過 0.4

(E)明天與後天，雨天的機率都不超過 0.4

【解答】(B)(D)(E)

【詳解】令矩陣$A=\begin{bmatrix}0.5&0.4&0.3\\0.4&0.4&0.5\\0.1&0.2&0.2\end{bmatrix}$，$X_0=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$表今日晴天、陰天、雨天的機率爲 1，0，0

則明天的天氣晴天、陰天、雨天的機率爲$A\,X_0$

後天的天氣晴天、陰天、雨天的機率爲$A(A\,X_0)$

$A\,X_0=\begin{bmatrix}0.5\\0.4\\0.1\end{bmatrix}$，$A(A\,X_0)=\begin{bmatrix}0.5&0.4&0.3\\0.4&0.4&0.5\\0.1&0.2&0.2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.5\\0.4\\0.1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.44\\0.41\\0.15\end{bmatrix}$

19.設$A=\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}\cos\phi&\sin\phi\\\sin\phi&-\cos\phi\end{bmatrix}$，則下列敘述何者正確？

(A) $A^2=\begin{bmatrix}\cos 2\theta&-\sin 2\theta\\\sin 2\theta&\cos 2\theta\end{bmatrix}$ (B) $B^2=\begin{bmatrix}\cos 2\phi&\sin 2\phi\\\sin 2\phi&-\cos 2\phi\end{bmatrix}$ (C) $A^{-1}=\begin{bmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}$

(D) $AB=\begin{bmatrix}\cos(\theta+\phi) & \sin(\theta+\phi)\\ \sin(\theta+\phi) & -\cos(\theta+\phi)\end{bmatrix}$ (E) $BA=\begin{bmatrix}\cos(\phi-\theta) & \sin(\phi-\theta)\\ -\sin(\phi-\theta) & \cos(\phi-\theta)\end{bmatrix}$

【解答】(A)(C)(D)

【詳解】

(A) $A=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$表作轉角$\theta$之旋轉變換 $\Rightarrow$ $A^2=\begin{bmatrix}\cos 2\theta & -\sin 2\theta\\ \sin 2\theta & \cos 2\theta\end{bmatrix}$

(B) $B^2=\begin{bmatrix}\cos\phi & \sin\phi\\ \sin\phi & -\cos\phi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\phi & \sin\phi\\ \sin\phi & -\cos\phi\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ $\Rightarrow$ $B^2=I$

(C) $A^{-1}=\begin{bmatrix}\cos(-\theta) & -\sin(-\theta)\\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$

(D) $AB=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\phi & \sin\phi\\ \sin\phi & -\cos\phi\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}\cos\theta\cos\phi-\sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi+\sin\theta\cos\phi\\ \sin\theta\cos\phi+\cos\theta\sin\phi & \sin\theta\sin\phi-\cos\theta\cos\phi\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos(\theta+\phi) & \sin(\theta+\phi)\\ \sin(\theta+\phi) & -\cos(\theta+\phi)\end{bmatrix}$$

(E) $BA=\begin{bmatrix}\cos\phi & \sin\phi\\ \sin\phi & -\cos\phi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}\cos\phi\cos\theta+\sin\phi\sin\theta & -\cos\phi\sin\theta+\sin\phi\cos\theta\\ \sin\phi\cos\theta-\cos\phi\sin\theta & -\sin\phi\sin\theta-\cos\phi\cos\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos(\phi-\theta) & \sin(\phi-\theta)\\ \sin(\phi-\theta) & -\cos(\phi-\theta)\end{bmatrix}$$

20.設$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ 4 & -3 & 4\\ 3 & -3 & 4\end{bmatrix}$，$A^{-1}=\begin{bmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{bmatrix}$，下列各敘述何者正確？

(A) $\det A=1$ (B) $\det A=-1$ (C) $A^2=I$ (D) $b_2+c_3=0$ (E) $a_3+b_3=0$

【解答】(B)(C)(E)

【詳解】$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ 4 & -3 & 4\\ 3 & -3 & 4\end{bmatrix}$ $\Rightarrow$ $\det A=0+12+12-9-16-0=-1$

$$\Rightarrow\ A^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ -4 & 3 & -4\\ -3 & 3 & -4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ 4 & -3 & 4\\ 3 & -3 & 4\end{bmatrix}=A$$，即$A^2=A\cdot A^{-1}=I$

21.設$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，圓$C$：$x^2+y^2=4$經過$A$之變換後為圖形$C'$，則下列何者正確？

(A) C'方程式：$x'^2-4x'y'+5y'^2=8$

(B) C'為一橢圓

(C) C'之長軸長 $4(\sqrt{2}+1)$

(D) C'之短軸長 $4(\sqrt{2}-1)$

【解答】(B)(C)(D)

【詳解】由$\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$

$\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' - 2y' \\ y = y' \end{cases}$ 代入 $x^2 + y^2 = 4$，

$(x' - 2y')^2 + y'^2 = 4$，$x'^2 - 4x'y' + 5y'^2 = 4 \cdots\cdots(*)$

$\begin{cases} A' + C' = 6 \\ A' - C' = -\sqrt{16+16} = -4\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow A' = 3 - 2\sqrt{2}$，$C' = 3 + 2\sqrt{2}$

$\Rightarrow (3 - 2\sqrt{2})x'^2 + (3 + 2\sqrt{2})y'^2 = 4$

$\dfrac{x'^2}{[2(\sqrt{2}+1)]^2} + \dfrac{y'^2}{[2(\sqrt{2}-1)]^2} = 1$，爲一橢圓，長軸長 $= 4(\sqrt{2}+1)$，短軸長 $= 4(\sqrt{2}-1)$