高雄市明誠中學　高三數學平時測驗　　日期：95.03.04					
範圍	Book5　3-2 轉軸	班級	普三　　班	姓名	
		座號			

一、選擇題(每題 10 分)

1. 將坐標軸旋轉角$\theta=\cos^{-1}\dfrac{3}{5}$，若$Q(r，s)$的新坐標為$(2，-1)$，則$Q$點的原坐標為$(r，s)=$

(A)$(\dfrac{2}{5}，-\dfrac{11}{5})$　(B)$(-\dfrac{2}{5}，\dfrac{11}{5})$　(C)$(2，1)$　(D)$(2，-1)$　(E)$(-2，1)$

【解答】(C)

【詳解】

$\because\ \theta=\cos^{-1}\dfrac{3}{5}\quad\therefore\ \cos\theta=\dfrac{3}{5}\quad\Rightarrow\quad\sin\theta=\dfrac{4}{5}$

$\because$ Q點的原坐標為$(r，s)$　$\therefore\ \begin{cases}r=x'\cos\theta-y'\sin\theta\\ s=x'\sin\theta+y'\cos\theta\end{cases}$

	r	s
2	$\dfrac{3}{5}$	$\dfrac{4}{5}$
-1	$-\dfrac{4}{5}$	$\dfrac{3}{5}$

$\Rightarrow\ \begin{cases}r=2\cdot\dfrac{3}{5}-(-1)\dfrac{4}{5}=2\\ s=2\cdot\dfrac{4}{5}+(-1)\dfrac{3}{5}=1\end{cases}$，故$(r，s)=(2，1)$，選(C)

2. 二次曲線$x^2+2\sqrt{3}xy+3y^2-2(6+\sqrt{3})x+2(1-6\sqrt{3})y+20=0$經坐標軸旋轉角$\dfrac{\pi}{3}$後的新方程式為(A)$x'^2+y'^2-x'-5=0$　(B)$x'^2+y'^2-6x'+5=0$　(C)$x'^2-6x'+y'+5=0$

(D)$y'^2-6y'+x'+5=0$　(E)$x'^2-x'+6y'+5=0$

【解答】(C)

【詳解】

Γ：$x^2+2\sqrt{3}xy+3y^2-2(6+\sqrt{3})x+2(1-6\sqrt{3})y+20=0$

坐標軸旋軸$\theta=\dfrac{\pi}{3}$，由新舊坐標的關係

	x	y
x'	$\cos\theta$	$\sin\theta$
y'	$-\sin\theta$	$\cos\theta$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=x'\cos\dfrac{\pi}{3}-y'\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}x'-\dfrac{\sqrt{3}}{2}y'=\dfrac{1}{2}(x'-\sqrt{3}y')\\ y=x'\sin\dfrac{\pi}{3}+y'\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x'+\dfrac{1}{2}y'=\dfrac{1}{2}(\sqrt{3}x'+y')\end{cases}$$

代入Γ的原方程式得$\dfrac{1}{4}(x'-\sqrt{3}y')^2+2\sqrt{3}\cdot\dfrac{1}{2}(x'-\sqrt{3}y')\cdot\dfrac{1}{2}(\sqrt{3}x'+y')+3\cdot\dfrac{1}{4}(\sqrt{3}x'+y')^2$

$-2(6+\sqrt{3})\dfrac{1}{2}(x'-\sqrt{3}y')+2(1-6\sqrt{3})\cdot\dfrac{1}{2}(\sqrt{3}x'+y')+20=0$

化簡整理得 $4x'^2-24x'+4y'+20=0$，即$x'^2-6x'+y'+5=0$為Γ的新方程式

3. 旋轉坐標軸，使方程式 $4x^2-4xy+y^2-45=0$ 的新方程式不具xy項，則旋轉的正銳角θ 為

(1) $\tan^{-1}\frac{3}{4}$　(2) $\tan^{-1}\frac{4}{3}$　(3) $\tan^{-1}2$　(4) $\tan^{-1}\frac{1}{2}$

【解答】(3)

【詳解】

$\cot 2\theta==\dfrac{A-C}{B}=\dfrac{4-1}{-4}=-\dfrac{3}{4}$，$\cos 2\theta=-\dfrac{3}{5}$，$\cos\theta=\sqrt{\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，得$\tan\theta=2$，$\theta=\tan^{-1}2$

4. 將坐標軸旋轉角$\frac{\pi}{4}$，則點 $P(4，2)$之新坐標為

(A)(2，4)　(B)($\sqrt{2}$，$2\sqrt{2}$)　(C)($2\sqrt{2}$，2)　(D)($\sqrt{2}$，$3\sqrt{2}$)　(E)($3\sqrt{2}$，$-\sqrt{2}$)

【解答】(E)

【詳解】坐標軸旋轉角$\theta=\dfrac{\pi}{4}$

	x	y
x'	$\cos\theta$	$\sin\theta$
y'	$-\sin\theta$	$\cos\theta$

設 $P(4，2)$之新坐標為$(x'，y')$，則

$$\begin{cases} x'=x\cos+y\sin\theta=4\cos\dfrac{\pi}{4}+2\sin\dfrac{\pi}{4}=4\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}+2\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2} \\ y'=-x\sin\theta+y\cos\theta=-4\sin\dfrac{\pi}{4}+2\cos\dfrac{\pi}{4}=-4\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}+2\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2} \end{cases}$$

∴　P 點的新坐標為($3\sqrt{2}$，$-\sqrt{2}$)，故選(E)

二、填充題(每題 10 分)

1. 設二次曲線Γ：$3x^2-3xy-y^2=5$，將坐標旋轉一角$\theta=\tan^{-1}3$，得Γ 對新坐標系的方程式為＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

【解答】$7y'^2-3x'^2=10$

【詳解】

Γ：$3x^2-3xy-y^2=5$

∵　$\theta=\tan^{-1}3$　∴　$\tan\theta=3$　⇒　$\sin\theta=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$，$\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$

∴　旋轉角θ 的旋轉公式

$$\begin{cases} x=x'\cos\theta-y'\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{10}}(x'-3y') \\ y=x'\sin\theta+y'\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{10}}(3x'+y') \end{cases}$$ 代入原方程式

得 $3\cdot\dfrac{1}{10}(x'-3y')^2-3\cdot\dfrac{1}{10}(x'-3y')(3x'+y')-\dfrac{1}{10}(3x'+y')^2=5$

⇒　$3(x'^2-6x'y'+9y'^2)-3(3x'^2-8x'y'-3y'^2)-(9x'^2+6x'y'+y'^2)-50=0$

新方程式為 $-3x'^2+7y'^2=10$

2. $\theta = \cos^{-1}\dfrac{4}{5}$，將原坐標系$S$旋轉$\theta$ 得到新坐標系S'，

(1)$(0，2)_S = (a，b)_{S'}$時，$a =$ ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

(2)$(2，1)_{S'} = (c，d)_S$時，$d =$ ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

【解答】(1)$\dfrac{6}{5}$　(2) 2

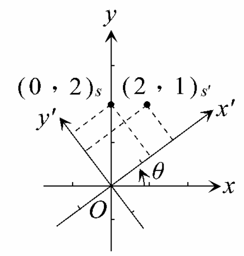
【詳解】

由$(x，y)_S = (x'，y')_{S'}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{5}(4x' - 3y') \\ y = \dfrac{1}{5}(3x' + 4y') \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{1}{5}(4x + 3y) \\ y' = \dfrac{1}{5}(-3x + 4y) \end{cases}$$

(1)$a = \dfrac{1}{5}(4 \cdot 0 + 3 \cdot 2) = \dfrac{6}{5}$，$b = \dfrac{1}{5}(-3 \cdot 0 + 4 \cdot 2) = \dfrac{8}{5}$　　得$(0，2)_S = (\dfrac{6}{5}，\dfrac{8}{5})_{S'}$

(2)$c = \dfrac{1}{5}(4 \cdot 2 - 3 \cdot 1) = 1$，$d = \dfrac{1}{5}(3 \cdot 2 + 4 \cdot 1) = 2$，得$(2，1)_{S'} = (1，2)_S$



3.$\theta = \cos^{-1}\dfrac{3}{\sqrt{10}}$，將原坐標系$S$旋轉$\theta$ 得到新坐標系S'，若Γ 的原方程式爲 $13x^2 - 18xy + 37y^2 = 40$，則$\Gamma$ 的新方程式爲＿＿＿＿＿＿＿＿＿，又在S中Γ 的位於第一象限內的頂點坐標爲＿＿＿＿。

【解答】$x'^2 + 4y'^2 = 4$，$(\dfrac{6}{\sqrt{10}}，\dfrac{2}{\sqrt{10}})$

【詳解】

由$(x，y)_S = (x'，y')_{S'}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{10}}(3x' - y') \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{10}}(x' + 3y') \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{1}{\sqrt{10}}(3x + y) \\ y' = \dfrac{1}{\sqrt{10}}(-x + 3y) \end{cases}$$

$13x^2 - 18xy + 37y^2 = 40 \Leftrightarrow \dfrac{13}{10}(3x' - y')^2 - \dfrac{18}{10}(3x' - y')(x' + 3y') + \dfrac{37}{10}(x' + 3y')^2 = 40$

$\Leftrightarrow (117 - 54 + 37)x'^2 + (-78 - 144 + 222)x'y' + (13 + 54 + 333)y'^2 = 400$

$\Leftrightarrow x'^2 + 4y'^2 = 4$

(2)$(2，0)_{S'} = (a，b)_S$時

$a = \dfrac{1}{\sqrt{10}}(3 \cdot 2 - 0) = \dfrac{6}{\sqrt{10}}$，$b = \dfrac{1}{\sqrt{10}}(2 + 3 \cdot 0) = \dfrac{2}{\sqrt{10}}$

$\therefore$ 在S中Γ 之位於第一象限內的頂點爲$(\dfrac{6}{\sqrt{10}}，\dfrac{2}{\sqrt{10}})$

4. 在原坐標系S中四點$A(3，4)$，$B(-4，3)$，$C(-3，-4)$與$D(4，-3)$爲四邊形Γ 的頂點，將S旋轉θ 得到新坐標系S'，若Γ 對於S'的新方程式爲$|x'|+|y'|=5$，則角度$\theta=$ ________，在S中，Γ 的原方程式爲__________。

【解答】$\cos^{-1}\dfrac{3}{5}$，$|3x+4y|+|-4x+3y|=25$

【詳解】

令$\theta=\cos^{-1}\dfrac{3}{5}$，原坐標系$S$旋轉$\theta$ 得到新坐標S'

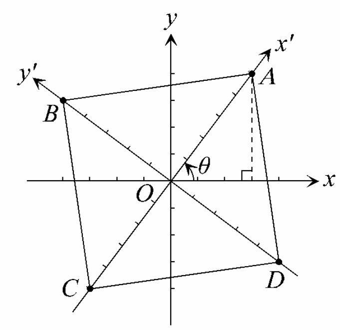
$(x，y)_S=(x'，y')_{S'}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{5}(3x'-4y') \\ y=\dfrac{1}{5}(4x'+3y') \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'=\dfrac{1}{5}(3x+4y) \\ y'=\dfrac{1}{5}(-4x+3y) \end{cases}$$

得$|x'|+|y'|=5 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{1}{5}|3x+4y|+\dfrac{1}{5}|-4x+3y|=5$

$\Leftrightarrow \quad |3x+4y|+|-4x+3y|=25$

$\therefore$ 在S中，Γ：$|3x+4y|+|-4x+3y|=25$，而$\theta=\cos^{-1}\dfrac{3}{5}$



5. 設平面上有三個坐標系S，S'、S''，已知S平移$(3，2)$得到S'，S'旋轉 30°得到S''，則點$P(1，2)$對坐標系S'的坐標爲__________，點P對坐標系S''的坐標爲__________，設點Q對坐標系S''的坐標爲$(x，y)$，則點Q對坐標系S的坐標爲__________。

【解答】$(-2，0)$，$(-\sqrt{3}，1)$，$\left(3+\dfrac{\sqrt{3}x-y}{2}，2+\dfrac{x+\sqrt{3}y}{2}\right)$

【詳解】

(1)點$P(1，2)$對S'坐標系的坐標爲$(1-3，2-2)=(-2，0)$

令$P'(-2，0)$，而$P'(-2，0)$對S''坐標系的坐標$P''(x_0，y_0)$

此時$\begin{cases} -2=x_0\cos 30°-y_0\sin 30° \\ 0=x_0\sin 30°+y_0\cos 30° \end{cases}$，亦即$\begin{cases} \sqrt{3}x_0-y_0=-4 \\ x_0+\sqrt{3}y_0=0 \end{cases}$，$x_0=-\sqrt{3}$，$y_0=1$，

所以P對S''的坐標爲$(-\sqrt{3}，1)$

(2)當Q對S''的坐標$(x，y)$，而對S'的坐標爲$Q'(x'，y')$時

$$\begin{cases} x'=x\cos 30°-y\sin 30°=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x-\dfrac{1}{2}y \\ y'=x\sin 30°+y\cos 30°=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}y \end{cases}$$

而Q'對S的坐標為$(x_0，y_0)$時，$\begin{cases} x_0 = x'+3 = 3+\dfrac{\sqrt{3}}{2}x-\dfrac{1}{2}y \\ y_0 = y'+2 = 2+\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}y \end{cases}$

6. 繞原點轉軸，旋轉一個正銳角θ 後，曲線Γ：$8x^2+4xy+5y^2=36$ 的新方程式為$ax'^2+cy'^2=f$，則(1)$(\cos\theta，\sin\theta)=$ __________ 。 (2)序組$(a，c，f)=$ __________ 。

【解答】(1)$(\dfrac{2}{\sqrt{5}}，\dfrac{1}{\sqrt{5}})$ (2)(9，4，36)

【詳解】

Γ：$8x^2+4xy+5y^2=36$

(1)$\because$ $\cot 2\theta=\dfrac{8-5}{4}=\dfrac{3}{4}$ $\therefore$ $\cos 2\theta=\dfrac{3}{5}$

$\Rightarrow$ $\cos\theta=\sqrt{\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}}=\sqrt{\dfrac{1+\frac{3}{5}}{2}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，$\sin\theta=\sqrt{\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}}=\sqrt{\dfrac{1-\frac{3}{5}}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

(2)旋轉公式

	x	y
x'	$\cos\theta$	$\sin\theta$
y'	$-\sin\theta$	$\cos\theta$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta = \dfrac{2}{\sqrt{5}}x' - \dfrac{1}{\sqrt{5}}y' = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(2x'-y') \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}x' + \dfrac{2}{\sqrt{5}}y' = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(x'+2y') \end{cases}$$

代入Γ 原方程式得

$$8\,[\dfrac{1}{\sqrt{5}}(2x'-y')]^2+4\cdot\dfrac{1}{\sqrt{5}}(2x'-y')\cdot\dfrac{1}{\sqrt{5}}(x'+2y')+5\,[\dfrac{1}{\sqrt{5}}(x'+2y')]^2=36$$

$$\Rightarrow \dfrac{8}{5}(4x'^2-4x'y'+y'^2)+\dfrac{4}{5}(2x'^2+3x'y'-2y'^2)+(x'^2+4x'y'+4y'^2)=36$$

整理得 $9x'^2+4y'^2=36$，新方程式為$ax'^2+cy'^2=f$ $\therefore$ $a=9$，$c=4$，$f=36$

7. 將坐標軸旋轉一角$\theta=\cos^{-1}\dfrac{3}{5}$ ，則點$Q(-13，26)$對於新坐標系的坐標為__________ 。

【解答】$(-\dfrac{143}{5}，\dfrac{26}{5})$

【詳解】

$\because$ $\theta=\cos^{-1}\dfrac{3}{5}$ $\therefore$ $\cos\theta=\dfrac{3}{5}$ $\Rightarrow$ $\sin\theta=\dfrac{4}{5}$

設$Q(-13，26)$之新坐標為$(x，y)$

則

	x	y
-13	$\dfrac{3}{5}$	$\dfrac{4}{5}$
26	$-\dfrac{4}{5}$	$\dfrac{3}{5}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=(-13)\times\dfrac{3}{5}+26\times(-\dfrac{4}{5})=-\dfrac{143}{5} \\ y=(-13)\times\dfrac{4}{5}+26\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{26}{5} \end{cases}$$

$\therefore$　Q點之新坐標爲$(-\dfrac{143}{5}，\dfrac{26}{5})$

8. 欲使方程式 $2x^2+\sqrt{3}xy+y^2+3x-4y-2=0$ 經坐標軸旋轉一銳角θ 後，可使方程式消去xy項，則$\theta=$ ＿＿＿＿＿。

【解答】$\dfrac{\pi}{6}$

【詳解】

$\because$　$\cot 2\theta=\dfrac{A-C}{B}=\dfrac{2-1}{\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$　$\therefore$　$2\theta=\dfrac{\pi}{3}$　$\Rightarrow$　$\theta=\dfrac{\pi}{6}$

9. 設Γ 爲以原點$O(0，0)$爲頂點，$F(1，2)$爲焦點之拋物線，將原坐標系S旋轉$\cos^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{5}}$得到新坐標系$S'$，則$F$對新坐標系$S'$的坐標爲＿＿＿＿＿，$\Gamma$ 對新坐標系S'的新方程式爲＿＿，Γ 爲原坐標系S的方程式爲＿＿＿＿＿＿＿＿。

【解答】$(\sqrt{5}，0)$，$y'^2=4\sqrt{5}x'$，$4x^2-4xy+y^2-20x-40y=0$

【詳解】

$\theta=\cos^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，原坐標系$S$旋轉$\theta$ 得到新坐標系S'

$$(x，y)_S=(x'，y')_{S'}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}x=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(x'-2y')\\ y=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(2x'+y')\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}x'=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(x+2y)\\ y'=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(-2x+y)\end{cases}$$

由$\overline{OF}=\sqrt{5}$知$F=(\sqrt{5}，0)_S$　$\therefore$　在S'坐標系中，$\Gamma：y'^2=4\sqrt{5}x'$

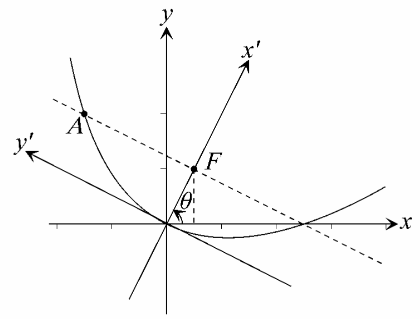
又$y'^2=4\sqrt{5}x'$　$\Leftrightarrow$　$\dfrac{1}{5}(-2x+y)^2=4\sqrt{5}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{5}}(x+2y)$　$\Leftrightarrow$　$4x^2-4xy+y^2=20x+40y$

$\therefore$　在S中，$\Gamma：4x^2-4xy+y^2-20x-40y=0$

驗算：$A(\sqrt{5}，2\sqrt{5})_{S'}=(-3，4)_S$代入$S$中之$\Gamma$：

$4\cdot 9-4(-3)\cdot 4+16-20\cdot(-3)-40\cdot 4=36+48+16+60-160=0$

$\therefore$　A在Γ 上



10. 二次曲線 $5x^2-6xy+5y^2=32$ 之兩焦點坐標爲＿＿＿＿＿，＿＿＿＿＿。

【解答】$(\sqrt{6}，\sqrt{6})$與$(-\sqrt{6}，-\sqrt{6})$

【詳解】

化二次曲線 $5x^2-6xy+5y^2=32$ 爲標準式，消去xy項

若轉軸θ 角使$\cot 2\theta=\dfrac{5-5}{-6}=0$，取$\theta=\dfrac{\pi}{4}$

則旋轉公式為$\begin{cases} x=x'\cos\dfrac{\pi}{4}-y'\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(x'-y') \\ y=x'\sin\dfrac{\pi}{4}+y'\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(x'+y') \end{cases}$代入原方程式得

$5\cdot\dfrac{1}{2}(x'-y')^2-6\cdot\dfrac{1}{2}(x'-y')(x'+y')+5\cdot\dfrac{1}{2}(x'+y')^2=32$

展開後整理得 $2x'^2+8y'^2=32 \Rightarrow x'^2+4y'^2=16$，即$\dfrac{x'^2}{16}+\dfrac{y'^2}{4}=1$ 表橢圓

二焦點之新坐標為$(2\sqrt{3}，0)$與$(-2\sqrt{3}，0)$

設$(x'，y')$原坐標為$(x，y)$，則由$\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(x'-y') \\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(x'+y') \end{cases}$

$(x'，y')=(2\sqrt{3}，0)$，則$\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot 2\sqrt{3}=\sqrt{6} \\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot 2\sqrt{3}=\sqrt{6} \end{cases}$，$\therefore$ $(2\sqrt{3}，0)$之原坐標為$(\sqrt{6}，\sqrt{6})$

$(x'，y')=(-2\sqrt{3}，0)$，則$\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot(-2\sqrt{3})=-\sqrt{6} \\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot(-2\sqrt{3})=-\sqrt{6} \end{cases}$，$\therefore$ $(-2\sqrt{3}，0)$之原坐標為$(-\sqrt{6}，-\sqrt{6})$

11.若將坐標系x - y旋轉 135°，建立新坐標系x'- y'，則方程式$xy+2=0$ 的新方程式為______，由此可知原方程式的圖形為________________。（寫出名稱即可）

【解答】$x'^2-y'^2=4$，雙曲線

【詳解】

旋轉 135°後新坐標$(x'，y')$與原坐標$(x，y)$的關係為

$$\begin{cases} x=x'\cos 135^\circ-y'\sin 135^\circ=\dfrac{-1}{\sqrt{2}}(x'+y') \\ y=x'\sin 135^\circ+y'\cos 135^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(x'-y') \end{cases}$$

原式變換為$\dfrac{-1}{\sqrt{2}}(x'+y')(\dfrac{1}{\sqrt{2}})(x'-y')+2=0$ 即$x'^2-y'^2=4$，此方程式的圖形為一雙曲線

12.設坐標軸作θ 旋轉後，點$P(3，4)$的新坐標系的坐標為$(\dfrac{7}{\sqrt{2}}，\dfrac{1}{\sqrt{2}})$，且 $0<\theta<\pi$，則$\theta=$______。

【解答】$\dfrac{\pi}{4}$

【詳解】

由坐標變換的關係得$\begin{cases}3=\dfrac{7}{\sqrt{2}}\cos\theta-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta & \cdots\cdots① \\ 4=\dfrac{7}{\sqrt{2}}\sin\theta+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta & \cdots\cdots②\end{cases}$

① − ② × 7 得 $3-28=(\dfrac{-1}{\sqrt{2}}+\dfrac{-49}{\sqrt{2}})\cos\theta$

即得 $\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 代入①得 $3=\dfrac{7}{2}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta$，所以 $\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ，$\theta=45°=\dfrac{\pi}{4}$

13.設$\theta=\dfrac{\pi}{6}$ ，$\overrightarrow{e_1}=(\cos\theta，\sin\theta)$，$\overrightarrow{e_2}=(-\sin\theta，\cos\theta)$，$\overrightarrow{OP}=x'\overrightarrow{e_1}+y'\overrightarrow{e_2}$ ，O表原點，則

(1)$P=(0，2)$時，$(x'，y')=$ __________。

(2)$x'=2$，$y'=1$ 時，P的坐標為 __________。

【解答】(1)$(1，\sqrt{3})$　(2)$(\sqrt{3}-\dfrac{1}{2}，1+\dfrac{\sqrt{3}}{2})$

【詳解】

$\overrightarrow{e_1}=(\dfrac{\sqrt{3}}{2}，\dfrac{1}{2})$，$\overrightarrow{e_2}=(-\dfrac{1}{2}，\dfrac{\sqrt{3}}{2})$，$P=(x，y)$，$\overrightarrow{OP}=x'\overrightarrow{e_1}+y'\overrightarrow{e_2}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}(\sqrt{3}x'-y') \\ y=\dfrac{1}{2}(x'+\sqrt{3}y')\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x'=\dfrac{1}{2}(\sqrt{3}x+y) \\ y'=\dfrac{1}{2}(-x+\sqrt{3}y)\end{cases}$

(1)$x=0$，$y=2$ 時，$x'=1$，$y'=\sqrt{3}$ ，即$(0，2)=1\cdot\overrightarrow{e_1}+\sqrt{3}\cdot\overrightarrow{e_2}$ ，$(x'，y')=(1，\sqrt{3})$

(2)$x'=2$，$y'=1$ 時，$x=\sqrt{3}-\dfrac{1}{2}$ ，$y=1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ，$(x，y)=(\sqrt{3}-\dfrac{1}{2}，1+\dfrac{\sqrt{3}}{2})$

14.設二次曲線Γ：$4x^2-4xy+y^2+8x+6y+7=0$，我們將坐標系旋轉θ 角，使 $0°<\theta<90°$ 且$\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ ，若點P的新坐標為$(x'，y')$，而原坐標為$(x，y)$，則點P的原坐標$(x，y)$用x'，y'表示時，$\begin{cases}x= \\ y=\text{__________}\end{cases}$ ，若Γ 對新坐標系而言，其方程式可化為 $5y'^2+ax'+by'+c=0$，其中a，b，c為定數，則$a=$ __________，$b=$ __________，$c=$ __________。

【解答】$\begin{cases}x=\dfrac{1}{\sqrt{5}}x'-\dfrac{2}{\sqrt{5}}y' \\ y=\dfrac{2}{\sqrt{5}}x'+\dfrac{1}{\sqrt{5}}y'\end{cases}$，$4\sqrt{5}$ ，$-2\sqrt{5}$ ，7

【詳解】

坐標系旋轉θ 角後，點$P(x，y)$變換為$(x'，y')$，$\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ ，$\sin\theta=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

則$\begin{cases}x=x'\cos\theta-y'\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}x'-\dfrac{2}{\sqrt{5}}y' \\ y=x'\sin\theta+y'\cos\theta=\dfrac{2}{\sqrt{5}}x'+\dfrac{1}{\sqrt{5}}y'\end{cases}$

Γ：$4x^2-4xy+y^2+8x+6y+7=0$ 的新坐標系方程式爲

$4(\frac{1}{\sqrt{5}})^2(x'-2y')^2-4(\frac{1}{\sqrt{5}})(x'-2y')(\frac{1}{\sqrt{5}})(2x'+y')+(\frac{1}{\sqrt{5}})^2(2x'+y')^2+8(\frac{1}{\sqrt{5}})(x'-2y')+$

$6(\frac{1}{\sqrt{5}})(2x'+y')+7=0$

整理可得 $\frac{4}{5}(x'^2-4x'y'+4y'^2)-\frac{4}{5}(2x'^2-3x'y'-2y'^2)+\frac{1}{5}(4x'^2+4x'y'+y'^2)+\frac{8}{\sqrt{5}}(x'-2y')$

$+\frac{6}{\sqrt{5}}(2x'+y')+7=0$

亦即 $5y'^2+4\sqrt{5}x'-2\sqrt{5}y'+7=0$，所以 $a=4\sqrt{5}$，$b=-2\sqrt{5}$，$c=7$

15.設 Γ：$xy=-2$，將原坐標系旋轉 $(-45°)$，則 Γ 的新方程式爲__________，又在原坐標系中，Γ 位於第四象限內的頂點坐標爲__________。

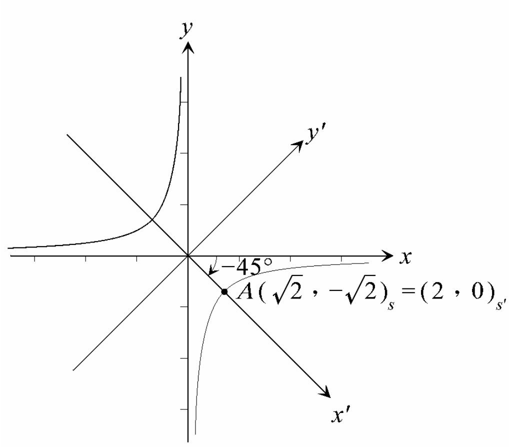
【解答】$x'^2-y'^2=4$，$(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

【詳解】

以 $x=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y')$ 及 $y=\frac{1}{\sqrt{2}}(-x'+y')$ 代入 $xy=-2$ 中 $\frac{-1}{2}(x'^2-y'^2)=-2$

$\therefore$ Γ 的新方程式爲 $x'^2-y'^2=4$

又 $(x', y')=(2, 0)$ 時，$(x, y)=(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ 爲 Γ 的頂點



16.設方程式 $x^2+2xy+y^2+4\sqrt{2}x-4\sqrt{2}y+8=0$ 的圖形爲 G，則將坐標軸旋轉 θ 角，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$，使 G 的新方程式（x' - y' 坐標系）中，不含 $x'y'$ 項時，$\theta=$__________，而新的方程式爲__________。

【解答】$\frac{\pi}{4}$，$x'^2-4y'+4=0$

【詳解】

欲消去新方程式中的交叉項，必須旋轉 θ 角使 $\cot 2\theta=0$

因爲取 $\theta=\frac{\pi}{4}$；此時原坐標 (x, y) 與新坐標 (x', y') 的關係爲

$$\begin{cases} x=x'\cos\frac{\pi}{4}-y'\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'-y') \\ y=x'\sin\frac{\pi}{4}+y'\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y') \end{cases}$$ 代入原方程式得

$[\frac{1}{\sqrt{2}}(x'-y')]^2+2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(x'-y')\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y')+[\frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y')]^2+4\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}})(x'-y')-$

$4\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}})(x'+y')+8=0$

即$\frac{1}{2}(x'^2-2x'y'+y'^2)+(x'^2-y'^2)+\frac{1}{2}(x'^2+2x'y'+y'^2)+4(x'-y')-4(x'+y')+8=0$

亦即 $2x'^2-8y'+8=0$，可得$x'^2-4y'+4=0$

17.將坐標軸繞原點O旋轉θ 角（$-\frac{\pi}{2}<\theta<0$）後，點$P(4，3)$的新坐標爲$(3，4)$，則

$(\cos\theta，\sin\theta)=$__________。

【解答】$(\frac{24}{25}，-\frac{7}{25})$

【詳解】

∵ $P(4，3)$之新坐標爲$(3，4)$，由

	4	3
3	$\cos\theta$	$\sin\theta$
4	$-\sin\theta$	$\cos\theta$

∴ $\begin{cases}4=3\cos\theta-4\sin\theta & \cdots\cdots① \\ 3=3\sin\theta+4\cos\theta & \cdots\cdots②\end{cases}$

① × 3 + ② × 4 得 $25\cos\theta=24$ ∴ $\cos\theta=\frac{24}{25}$ 代入①得 $\sin\theta=-\frac{7}{25}$

18.二次曲線Γ：$x^2+4xy+y^2-2x-10y-11=0$，將坐標系旋轉一銳角θ，使新方程式中不含xy項，則Γ 的新方程式爲__________，其圖形爲__________。

【解答】(1)$3x'^2-y'^2-6\sqrt{2}x'-4\sqrt{2}y'-11=0$ (2)Γ 表一雙曲線

【詳解】

(1)∵ $\cot 2\theta=\frac{1-1}{4}=0$ ∴ $\theta=45°$

此時原坐標$(x，y)$與新坐標$(x'，y')$的關係式爲$\begin{cases}x=\frac{\sqrt{2}}{2}x'-\frac{\sqrt{2}}{2}y' \\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{\sqrt{2}}{2}y'\end{cases}$

代入Γ 之原方程式得

$(\frac{\sqrt{2}}{2}x'-\frac{\sqrt{2}}{2}y')^2+4(\frac{\sqrt{2}}{2}x'-\frac{\sqrt{2}}{2}y')(\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{\sqrt{2}}{2}y')$

$+(\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{\sqrt{2}}{2}y')^2-2(\frac{\sqrt{2}}{2}x'-\frac{\sqrt{2}}{2}y')-10(\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{\sqrt{2}}{2}y')-11=0$

展開整理得 $3x'^2-y'^2-6\sqrt{2}x'-4\sqrt{2}y'-11=0$

(2)配方後成爲 $3(x'-\sqrt{2})^2-(y'+2\sqrt{2})^2=9$

即$\frac{(x'-\sqrt{2})^2}{3}-\frac{(y'+2\sqrt{2})^2}{9}=1$，故$\Gamma$ 表一雙曲線

19.Γ 的方程式爲 $5x^2-6xy+5y^2=32$，欲將Γ 的方程式標準化，可將原坐標系旋轉$\theta=\frac{\pi}{4}$後，建立新坐標系x'-y'，並使新方程式爲$x'^2+cy'^2=f$，其中c，f爲常數，則$c=$__________，

$f=$ ＿＿＿＿＿，由此可知Γ 的圖形爲＿＿＿＿＿（寫出名稱）。

【解答】4，16，橢圓

【詳解】

設坐標系旋轉$\theta=\dfrac{\pi}{4}$後，則點$P(x，y)$的坐標變換成$(x'，y')$

$\begin{cases} x=x'\cos\dfrac{\pi}{4}-y'\sin\dfrac{\pi}{4} \\ y=x'\sin\dfrac{\pi}{4}+y'\cos\dfrac{\pi}{4} \end{cases}$ 代入方程式 $5x^2-6xy+5y^2=32$ 可得

$$5(\frac{\sqrt{2}}{2}x'-\frac{\sqrt{2}}{2}y')^2-6(\frac{\sqrt{2}}{2}x'-\frac{\sqrt{2}}{2}y')(\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{\sqrt{2}}{2}y')+5(\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{\sqrt{2}}{2}y')^2=32$$

亦即$\dfrac{5}{2}(x'^2-2x'y'+y'^2)-3(x'^2-y'^2)+\dfrac{5}{2}(x'^2+2x'y'+y'^2)=32$

所以可化簡爲 $2x'^2+8y'^2=32$，亦即$x'^2+4y'^2=16$，因此$c=4$，$f=16$

Γ 的圖形爲橢圓

20.設將坐標系 S 旋轉 45°得坐標系 S'，若 $A(\sqrt{2}，-3\sqrt{2})$，$B(4，2)$，求 A，B 對 S'的坐標。

【解答】$A(-2，-4)_{S'}$，$B(3\sqrt{2}，-\sqrt{2})_{S'}$

【詳解】

由公式$\begin{cases} x'=x\cos45°+y\sin45° \\ y'=-x\sin45°+y\cos45° \end{cases}$可知$\begin{cases} x'=\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}-3\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=-2 \\ y'=\sqrt{2}\times(-\dfrac{\sqrt{2}}{2})-3\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=-4 \end{cases}$ $\therefore$ $A(-2，-4)_{S'}$

$\begin{cases} x'=4\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}+2\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2} \\ y'=4\times(-\dfrac{\sqrt{2}}{2})+2\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2} \end{cases}$ $\therefore$ $B(3\sqrt{2}，-\sqrt{2})_{S'}$

21.設將坐標系S旋轉 30°得坐標系S'，若$A(2\sqrt{3}，-2)_{S'}$，$B(4，2\sqrt{3})_{S'}$，求A，B對S的原坐標。

【解答】$A(4，0)_S$，$B(\sqrt{3}，5)_S$

【詳解】

由$\begin{cases} x=x'\cos30°-y'\sin30° \\ y=x'\sin30°+y'\cos30° \end{cases}$可知 $\begin{cases} x=2\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}+(-2)\times(-\dfrac{1}{2})=4 \\ y=2\sqrt{3}\times\dfrac{1}{2}+(-2)\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=0 \end{cases}$ $\therefore$ $A(4，0)_S$

$\begin{cases} x=4\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}+2\sqrt{3}\times(-\dfrac{1}{2})=\sqrt{3} \\ y=4\times\dfrac{1}{2}+2\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=5 \end{cases}$ $\therefore$ $B(\sqrt{3}，5)_S$

23.將原坐標系S旋轉 45°，求 $5x^2-6xy+5y^2=8$ 的新方程式。

【解答】$x'^2+4y'^2=4$

【詳解】

由公式$\begin{cases} x = x'\cos 45° - y'\sin 45° \\ y = x'\sin 45° + y'\cos 45° \end{cases}$，將$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x'-y') \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x'+y') \end{cases}$代入原方程式中

$5[\frac{\sqrt{2}}{2}(x'-y')]^2 - 6[\frac{\sqrt{2}}{2}(x'-y')][\frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y')] + 5[\frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y')]^2 = 8$

$\frac{5}{2}(x'^2 - 2x'y' + y'^2) - 3(x'^2 - y'^2) + \frac{5}{2}(x'^2 + 2x'y' + y'^2) = 8$

化簡得$x'^2 + 4y'^2 = 4$，因此曲線 $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 8$ 的圖形爲橢圓

24.設將坐標系S旋轉$\tan^{-1}\frac{4}{3}$得新坐標系S'，

(1)已知$P(10，-5)$，求P點對於S'的坐標。

(2)已知$Q(-2，4)_{S'}$，求Q點對S的坐標。

【解答】(1)$(2，-11)_{S'}$　(2)$(\frac{-22}{5}，\frac{4}{5})_S$

【詳解】

(1)令$\theta = \tan^{-1}\frac{4}{3}$，則$\sin\theta = \frac{4}{5}$，$\cos\theta = \frac{3}{5}$

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' = -x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = 10\times\dfrac{3}{5} + (-5)\times\dfrac{4}{5} = 2 \\ y' = 10\times(\dfrac{-4}{5}) + (-5)\times\dfrac{3}{5} = -11 \end{cases}$$

所以P點對於S'的坐標爲$(2，-11)_{S'}$

(2)$$\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = (-2)\times\dfrac{3}{5} + 4\times(-\dfrac{4}{5}) = \dfrac{-22}{5} \\ y = (-2)\times\dfrac{4}{5} + 4\times\dfrac{3}{5} = \dfrac{4}{5} \end{cases}$$

所以Q點對於S的坐標爲$(\frac{-22}{5}，\frac{4}{5})_S$

25.設將坐標系S旋轉θ 而得坐標系$S'(0 < \theta < \frac{\pi}{2})$，若$P$點對於$S$與$S'$的坐標分別爲$(2，0)_S$與$(\sqrt{3}，-1)_{S'}$，試求$\theta$＝？

【解答】$\frac{\pi}{6}$

【詳解】

由公式$\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{cases}$ 知$\begin{cases} \sqrt{3}\cos\theta + \sin\theta = 2 \\ \cos\theta - \sqrt{3}\sin\theta = 0 \end{cases}$

解之 $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin\theta = \frac{1}{2}$，因 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$，所以$\theta = \frac{\pi}{6}$

26.設坐標系S旋轉銳角θ 得坐標系S'，若P點對於S與S'的坐標分別爲$(4，6)_S$與$(5\sqrt{2}，\sqrt{2})_{S'}$，求$\theta$＝？

【解答】$\dfrac{\pi}{4}$

【詳解】

由$\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{cases}$得$\begin{cases} 5\sqrt{2}\cos\theta - \sqrt{2}\sin\theta = 4 \\ \sqrt{2}\cos\theta + 5\sqrt{2}\sin\theta = 6 \end{cases}$解之 $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\sin\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以$\theta = \dfrac{\pi}{4}$

27.將坐標系 S 平移(2，3)得坐標系 S'，將 S'旋轉 30°得 S''，求 P(6，− 1)對於 S''的坐標。

【解答】$P(2\sqrt{3}-2，-2\sqrt{3}-2)_{S''}$

【詳解】

P點對於S'的坐標爲$\begin{cases} x' = 6-2 = 4 \\ y' = -1-3 = -4 \end{cases}$，即$P(4，-4)_{S'}$

P點對於S''的坐標爲$(4-4i)(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i) = (2\sqrt{3}-2)+(-2\sqrt{3}-2)i$

即$P(2\sqrt{3}-2，-2\sqrt{3}-2)_{S''}$

【註】

若坐標先旋轉 30°，再平移(2，3)，則

$(6-i)(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i) = (3\sqrt{3}-\dfrac{1}{2})+(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-3)i$

點(2，3)也要坐標變換：

$(2+3i)(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i) = (\sqrt{3}+\dfrac{3}{2})+(\dfrac{3\sqrt{3}}{2}-1)i$

故$(2，3) = (\sqrt{3}+\dfrac{3}{2}，\dfrac{3\sqrt{3}}{2}-1)_{S'}$

再平移$\begin{cases} x'' = (3\sqrt{3}-\dfrac{1}{2})-(\sqrt{3}+\dfrac{3}{2}) = 2\sqrt{3}-2 \\ y'' = (-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-3)-(\dfrac{3\sqrt{3}}{3}-1) = -2\sqrt{3}-2 \end{cases}$

所以，先平移後旋轉與先旋轉後平移是相同的

28.點P爲橢圓 $29x^2-24xy+36y^2-360=0$ 上任一點，O表原點，設$\overline{OP}$長的最大值爲M，最小值爲m，求M與m之值。

【解答】$M = 3\sqrt{2}$，$m = 2\sqrt{2}$

【詳解】

$\because\ \ \Gamma：29x^2-24xy+36y^2-360=0$

設將坐標軸旋轉一銳角θ，可去除xy項，$\cot 2\theta = \dfrac{29-36}{-24} = \dfrac{7}{24}\quad\Rightarrow\quad \cos 2\theta = \dfrac{7}{25}$

$\therefore\ \ \cos\theta = \sqrt{\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}} = \sqrt{\dfrac{1+\frac{7}{25}}{2}} = \dfrac{4}{5}$，$\sin\theta = \sqrt{\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}} = \dfrac{3}{5}$

將旋轉公式$\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta = \dfrac{4}{5}x'-\dfrac{3}{5}y' = \dfrac{1}{5}(4x'-3y') \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta = \dfrac{3}{5}x'+\dfrac{4}{5}y' = \dfrac{1}{5}(3x'+4y') \end{cases}$

代入，$29\left[\frac{1}{5}(4x'-3y')\right]^2-24\left[\frac{1}{5}(4x'-3y')\right]\cdot\frac{1}{5}(3x'+4y')]+36\cdot\left[\frac{1}{5}(3x'+4y')\right]^2-360=0$

展開整理得 $20x'^2+45y'^2=360 \quad\Rightarrow\quad \frac{x'^2}{18}+\frac{y'^2}{8}=1$

$\because$ P點$\in\Gamma$ $\therefore$ 令點$P(\sqrt{18}\cos\alpha，\sqrt{8}\sin\alpha)$，則$\overline{OP}=\sqrt{18\cos^2\alpha+8\sin^2\alpha}=\sqrt{8+10\cos^2\alpha}$

$\because$ $0\le\cos^2\alpha\le 1 \quad\Rightarrow\quad \sqrt{8}\le\overline{OP}\le\sqrt{18}$

$\therefore$ $M=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$，$m=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

29.二坐標系S與S'滿足$(x，y)_S=(x'，y')_{S'}$的條件爲$\begin{cases}x=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'-y')+1\\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y')+2\end{cases}$，在坐標系$S$中，$\Gamma$：$5x^2-6xy+5y^2+2x-14y+5=0$，試求在新坐標爲$S'$中$\Gamma$ 的新方程式？又Γ 在S中的短軸方程式爲何？

【解答】$x'^2+4y'^2=4$，$x+y-3=0$

【詳解】

$(x，y)_S=(x'，y')_{S'} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}x=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'-y')+1\\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y')+2\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}x'=\frac{1}{\sqrt{2}}[(x-1)+(y-2)]\\ y'=\frac{1}{\sqrt{2}}[-(x-1)+(y-2)]\end{cases}$

$\begin{cases}x'=\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y-3)\\ y'=\frac{1}{\sqrt{2}}(-x+y-1)\end{cases}$

得 $5x^2-6xy+5y^2+2x-14y+5=0$

$\Leftrightarrow$ $\frac{5}{2}(x'-y'+\sqrt{2})^2-\frac{6}{2}(x'-y'+\sqrt{2})(x'+y'+2\sqrt{2})+\frac{5}{2}(x'+y'+2\sqrt{2})^2+\sqrt{2}(x'-y'$
$+\sqrt{2})-7\sqrt{2}(x'+y'+2\sqrt{2})+5=0$

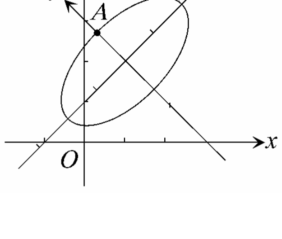
$\Leftrightarrow$ $5(x'-y'+\sqrt{2})^2-6(x'-y'+\sqrt{2})(x'+y'+2\sqrt{2})+5(x'+y'+2\sqrt{2})^2+2\sqrt{2}(x'-y'$
$+\sqrt{2})-14\sqrt{2}(x'+y'+2\sqrt{2})+10=0$

$\Leftrightarrow$ $4x'^2+16y'^2-16=0 \quad\Leftrightarrow\quad x'^2+4y'^2=4$

$\therefore$ 在S'中Γ：$x'^2+4y'^2=4$

又Γ 之短軸方程式爲$x'=0$，即$\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y-3)=0$

$\therefore$ Γ 之短軸方程式爲$x+y-3=0$，如下圖



30.若坐標系旋轉$\cos^{-1}\frac{3}{5}$得坐標系S'，求$P(5，-10)_{S'}$與$Q(3，5)_{S'}$的原坐標。

【解答】$P(11,-2)$，$Q(\frac{-11}{5},\frac{27}{5})$

【詳解】

由公式$\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{cases}$得$\begin{cases} x = 5\times\frac{3}{5}+(-10)\times(-\frac{4}{5})=11 \\ y = 5\times\frac{4}{5}+(-10)\times\frac{3}{5}=-2 \end{cases}$ $\therefore$ $P(11,-2)_S$

$\begin{cases} x = 3\times\frac{3}{5}+5\times(-\frac{4}{5})=\frac{-11}{5} \\ y = 3\times\frac{4}{5}+5\times\frac{3}{5}=\frac{27}{5} \end{cases}$ $\therefore$ $Q(\frac{-11}{5},\frac{27}{5})_S$

31.設將坐標系S旋轉 60°得坐標系S'，

(1)已知$A(2,-4)$，$B(6,0)$，試求A，B對S'的坐標。

(2)已知$C(-2,2)_{S'}$，$D(0,-2)_{S'}$，試求C，D對S的坐標。

【解答】(1)$(1-2\sqrt{3},-2-\sqrt{3})_{S'}$，$(3,-3\sqrt{3})_{S'}$ (2)$(-1-\sqrt{3},1-\sqrt{3})_S$，$(\sqrt{3},-1)_S$

【詳解】

(1)由旋轉公式知$\begin{cases} x' = x\cos 60^\circ + y\sin 60^\circ \\ y' = -x\sin 60^\circ + y\cos 60^\circ \end{cases}$

$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}\times 2+\frac{\sqrt{3}}{2}\times(-4)=1-2\sqrt{3} \\ y' = -\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2+\frac{1}{2}\times(-4)=-2-\sqrt{3} \end{cases}$，故$A$點對$S'$的新坐標爲$(1-2\sqrt{3},-2-\sqrt{3})_{S'}$

$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}\times 6+\frac{\sqrt{3}}{2}\times 0=3 \\ y' = -\frac{\sqrt{3}}{2}\times 6+\frac{1}{2}\times 0=-3\sqrt{3} \end{cases}$，故$B$點對$S'$的新坐標爲$(3,-3\sqrt{3})_{S'}$

(2)由旋轉公式知$\begin{cases} x = x'\cos 60^\circ - y'\sin 60^\circ \\ y = x'\sin 60^\circ + y'\cos 60^\circ \end{cases}$

$\begin{cases} x = \frac{1}{2}\times(-2)+(-\frac{\sqrt{3}}{2})\times 2=-1-\sqrt{3} \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}\times(-2)+\frac{1}{2}\times 2=-1-\sqrt{3} \end{cases}$，所以$C$點的原坐標爲$(-1-\sqrt{3},1-\sqrt{3})_S$

$\begin{cases} x = \frac{1}{2}\times 0+(-\frac{\sqrt{3}}{2})\times(-2)=\sqrt{3} \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}\times 0+\frac{1}{2}\times(-2)=-1 \end{cases}$，$D$點的原坐標爲$(\sqrt{3},-1)_S$

32.設將坐標系S旋轉$\tan^{-1}\frac{5}{12}$得新坐標系S'，

(1)若$A(13,26)$，求A的S'坐標。 (2)若$B(-13,0)_{S'}$，求B的S坐標。

【解答】(1)$A(22,19)_{S'}$ (2)$B(-12,-5)_S$

【詳解】

由公式$\begin{cases} x' = x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' = -x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$及$\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{cases}$得

(1) $\begin{cases} x' = 13 \times \dfrac{12}{13} + 26 \times \dfrac{5}{13} = 22 \\ y' = 13 \times (\dfrac{-5}{13}) + 26 \times \dfrac{12}{13} = 19 \end{cases}$ $\therefore$ $A(22，19)_{S'}$

(2) $\begin{cases} x = (-13) \times \dfrac{12}{13} + 0 \times (\dfrac{-5}{13}) = -12 \\ y = (-13) \times \dfrac{5}{13} + 0 \times \dfrac{12}{13} = -5 \end{cases}$ $\therefore$ $B(-12，-5)_{S}$