高雄市明誠中學 高三數學平時測驗 日期：95.03.04					
範圍	Book5　3-1 平移	班級	普三　　　班	姓名	
		座號			

一、選擇題(每題 10 分)

1. 以 $O'(4，-2)$ 為新原點，做坐標軸平移得新坐標系，則雙曲線 $x^2-y^2=1$ 對新坐標系之新方程式為(A) $(x'-2)^2-(y'+1)^2=1$　(B) $(x'+2)^2-(y'-1)^2=1$　(C) $(x'-4)^2-(y'+2)^2=1$　(D) $(x'+4)^2-(y'-2)^2=1$　(E) $(x'-4)^2-(y'-2)^2=1$

【解答】(D)

【詳解】

將原點(0，0)平移到新原點 $O'(4，-2)$ 得一新坐標系 S'

若 $P(x，y)_S=P(x'，y')_{S'}$，則由平移公式 $\begin{cases}x=x'+4\\y=y'-2\end{cases}$ 代入 $x^2-y^2=1$

得方程式為 $(x'+4)^2-(y'-2)^2=1$　∴　選(D)

2. 設橢圓 Γ：$9x^2+4y^2+36x-8y+4=0$，若將原坐標系平移 $(h，k)$ 後，Γ 的新方程式為 $\dfrac{x'^2}{4}+\dfrac{y'^2}{9}=1$，則新原點 $O'(h，k)$ 對原坐標系的坐標為

(A)(2，−1)　(B)(−2，1)　(C)(−4，2)　(D)(4，−2)　(E)(0，0)

【解答】(B)

【詳解】

Γ：$9x^2+4y^2+36x-8y+4=0$

將原方程式配分得 $9(x+2)^2+4(y-1)^2=36$　$\Rightarrow$　$\dfrac{(x+2)^2}{4}+\dfrac{(y-1)^2}{9}=1$

這是一個以(−2，1)為中心，長軸平行為 y 軸的橢圓

令 $x+2=x'$，$y-1=y'$，則得 $\dfrac{x'^2}{4}+\dfrac{y'^2}{9}=1$　∴　新原點 $O'(h，k)=(-2，1)$

3.設拋物線 $y^2=x$ 上 P，Q 兩點，將坐標軸平移後，P，Q 之新坐標為 $P(3，4)$，$Q(8，-1)$，則對原坐標系而言，新原點 O' 之坐標為

(A) (−1，2)　(B) (1，−2)　(C) (2，−3)　(D) (3，−2)　(E) (1，−1)

【解答】(B)

【詳解】

設坐標系 S，以 $O'(h，k)$ 為新原點做坐標軸平移，得新坐標系 S'

若 $P(x，y)_S=P(x'，y')_{S'}$，則由平移公式 $\begin{cases}x=x'+h\\y=y'+k\end{cases}$ 代入 $y^2=x$ 得 $(y'+k)^2=(x'+h)$

∵　P，Q 為拋物線上之二點，且平移後之新坐標 $P(3，4)_{S'}$，$Q(8，-1)_{S'}$

∴　$\begin{cases}(4+k)^2=3+h\\(-1+k)^2=8+h\end{cases}$　$\Rightarrow$　$\begin{cases}k^2+8k-h+13=0 & \cdots\cdots ①\\k^2-2k-h-7=0 & \cdots\cdots ②\end{cases}$

①−②得 $10k+20=0$　∴　$k=-2$，$h=1$，故新原點 $O'(1，-2)$　∴　選(B)

4. (複選)曲線Γ：$5x^2-8xy+5y^2+18x-18y+9=0$ 經坐標軸平移至新原點$(h，k)$後得新方程式為 $5x'^2-8x'y'+5y'^2=F$，則下列何者為真？

(A) $(h，k)=(1，-1)$ (B) $(h，k)=(-1，1)$ (C) $F=9$ (D) $F=-9$

(E) $F=-27$

【解答】(B)(C)

【詳解】

將平移公式$\begin{cases}x=x'+h\\ y=y'+k\end{cases}$代入$\Gamma$ 之原方程式 $5x^2-8xy+5y^2+18x-18y+9=0$

得 $5(x'+h)^2-8(x'+h)(y'+k)+5(y'+k)^2+18(x'+h)-18(y'+k)+9=0$

展開整理後得

$5x'^2-8x'y'+5y'^2+(10h-8k+18)x'+(-8h+10k-18)y'+(5h^2-8hk+5k^2+18h-18k+9)$
$=0$

$\because$ 新方程式為 $5x'^2-8x'y'+5y'^2=F$無一次項

$\therefore$ $\begin{cases}10h-8k+18=0\\ -8h+10k-18=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}5h-4k+9=0\\ -4h+5k-9=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}h=-1\\ k=1\end{cases}$

又常數項 $-F=5h^2-8hk+5k^2+18h-18k+9$

$=5(-1)^2-8(-1)\cdot 1+5\cdot 1^2+18(-1)-18\cdot 1+9=-9$

$\therefore$ $F=9$ 得新方程式為 $5x'^2-8x'y'+5y'^2=9$，其中新原點$(h，k)=(-1，1)$，故選(B)(C)

5. (複選)設$g(x，y)=ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$，二次曲線$\Gamma$：$g(x，y)=0$，當$b^2-4ac\neq 0$時，原坐標系作坐標軸平移，以$O'(h，k)$為新原點，可使$\Gamma$ 的方程式消去一次項而化簡成為$a'x'^2+b'x'y'+c'y'^2+f'=0$，則下列敘述何者為真？

(A) $a'=a，b'=b，c'=c$ (B) $f'=f$ (C)$(h，k)$是方程組$\begin{cases}ah+bk+d=0\\ bh+ck+e=0\end{cases}$的解

(D)$(h，k)$是方程組$\begin{cases}2ah+bk+d=0\\ bh+2ck+e=0\end{cases}$的解 (E) $O'(h，k)$是Γ 的對稱中心

【解答】(A)(D)(E)

【詳解】

Γ：$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$，將原坐標系作$(h，k)$平移，即以$O'(h，k)$為新原點

由平移公式$x=x'+h，y=y'+k$代入Γ 的原方程式$g(x，y)=0$ 經展開整理得

$ax'^2+bx'y'+cy'^2+(2ah+bk+d)x'+(bh+2ck+e)y'+ah^2+bhk+ck^2+dh+ek+f=0$

令$\begin{cases}2ah+bk+d=0\\ bh+2ck+e=0\end{cases}$ $\because$ 係數行列式$\begin{vmatrix}2a & b\\ b & 2c\end{vmatrix}=-(b^2-4ac)\neq 0$

$\therefore$ $h，k$之方程組$\begin{cases}2ah+bk+d=0\\ bh+2ck+e=0\end{cases}$恰好有一組解$(h，k)$

即以新原點$O'(h，k)$作坐標軸平移，得Γ 之新方程式為$ax'^2+bx'y'+cy'^2+g(h，k)=0$

知$a'=a，b'=b，c'=c，f'=g(h，k)=ah^2+bhk+ck^2+dh+ek+f$，又$\Gamma$ 之新方程式$ax'^2+bx'y'+cy'^2+f'=0$

以$(-x'，-y')$代替$(x'，y')$得方程式不變 $\therefore$ Γ 之圖形對稱於原點$O'(h，k)$

二、填充題(每題 10 分)

1. 坐標軸作$(h，k)$的平移後，方程式$x^2-4y^2+8x+24y-20=0$可去除常數項，而方程式$x^2+y^2-4x-2y+1=0$的x'項係數爲 -12，則$(h，k)=$ ＿＿＿＿＿。

【解答】$(-4，3)$

【詳解】

作$(h，k)$平移後$x^2-4y^2+8x+24y-20=0$之常數項爲$h^2-4k^2+8h+24k-20$

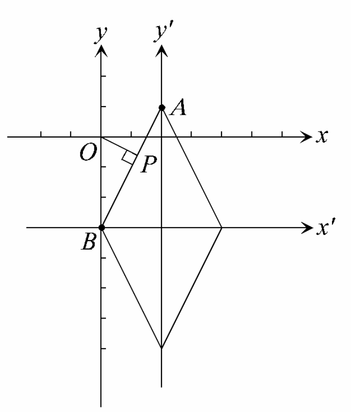
而$x^2+y^2-4x-2y+1=0$之x'項係數爲 $2h-4$

$$\therefore\quad \begin{cases} h^2-4k^2+8h+24k-20=0 \\ 2h-4=-12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h=-4 \\ k=3 \end{cases} \quad \therefore\quad (h，k)=(-4，3)$$

2. 設Γ：$2|x-2|+|y+3|=4$，原點$O(0，0)$，Γ 上任一點$P(a，b)$，則Γ 的對稱中心爲＿＿，a^2+b^2的最小値爲＿＿＿＿＿。

【解答】$(2，-3)$，$\dfrac{9}{5}$

【詳解】



令$h=2$，$k=-3$，將原坐標系S平移$(2，-3)$得到新坐標S'

$(x，y)_S=(x'，y')_{S'}=$ $\Leftrightarrow$ $x=x'+2$，$y=y'-3$，$\therefore$ Γ 之新方程式爲 $2|x'|+|y'|=4$

(1)Γ 之中心$(0，0)_{S'}=(2，-3)_S$

(2)$\overline{OP}^2=a^2+b^2$

由上圖知$\overline{OP}\perp\overline{AB}$於$P$時，使$a^2+b^2$有最小值

$O=(-2，3)_{S'}$，$\overleftrightarrow{AB}$：$-2x'+y'=4$

O至$\overleftrightarrow{AB}$之距離 $=\dfrac{|4+3-4|}{\sqrt{5}}=\dfrac{3}{\sqrt{5}}$，$\therefore$ $a^2+b^2=(\dfrac{3}{\sqrt{5}})^2=\dfrac{9}{5}$

3. 取$O'(h，k)$爲新原點，平移坐標軸，若L_1：$3x-4y=2$與L_2：$x+2y=4$對新坐標系的方程式都缺常數項，則$(h，k)=$ ＿＿＿＿＿。

【解答】$(2，1)$

【詳解】

以$O'(h，k)$爲新原點，由平移公式$\begin{cases} x=x'+h \\ y=y'+k \end{cases}$代入$L_1$，$L_2$的原方程式得

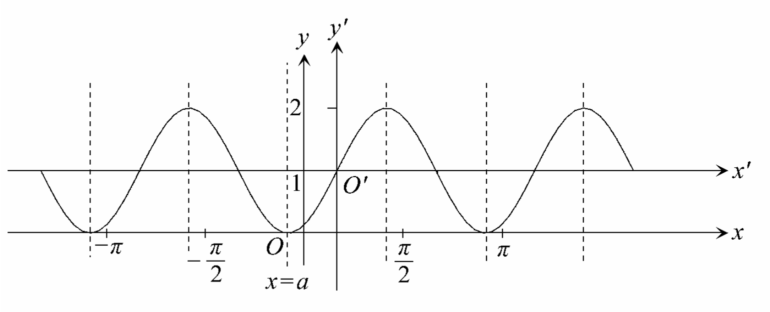
$$\begin{cases} 3(x'+h)-4(y'+k)=2 \\ (x'+h)+2(y'+k)=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x'-4y'+(3h-4k-2)=0 \\ x'+2y'+(h+2k-4)=0 \end{cases}$$

令常數項爲 0，則$\begin{cases}3h-4k-2=0\\h+2k-4=0\end{cases}$ $\Rightarrow$ $h=2$，$k=1$ $\therefore$ $(h，k)=(2，1)$

4. 設Γ：$y=\sin(2x-\dfrac{\pi}{3})+1$，$0<h\le\dfrac{2\pi}{3}$，將原坐標系平移$(h，k)$得$\Gamma$ 的新方程式爲$y'=\sin(2x')$，則可取$(h，k)=$__________，又Γ 的一對稱軸爲$x=a$，$-\dfrac{\pi}{2}<a<0$ 時，$a=$_____。

【解答】$(\dfrac{\pi}{6}，1)$，$-\dfrac{\pi}{12}$

【詳解】



$y=\sin(2x-\dfrac{\pi}{3})+1$ $\Leftrightarrow$ $y-1=\sin[2(x-\dfrac{\pi}{6})]$ $\Leftrightarrow$ $y'=\sin 2x'$

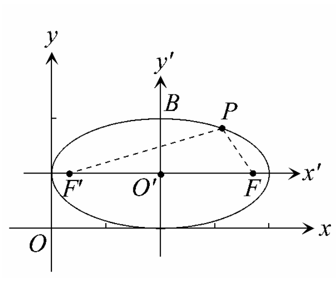
其中 $x'=x-\dfrac{\pi}{6}$，$y'=y-1$，$x=x'+\dfrac{\pi}{6}$，$y=y'+1$，$O'(h，k)$，$\therefore$ $(h，k)=(\dfrac{\pi}{6}，1)$

在新坐標系中，$y'=\sin 2x'$的對稱軸 $x'=\pm\dfrac{\pi}{4}$，$\pm\dfrac{3\pi}{4}$，…，其中$-\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{\pi}{12}$使 $a=-\dfrac{\pi}{12}$，如上圖

5. 設$F(2+\sqrt{3}，1)$及$F'(2-\sqrt{3}，1)$，滿足$\overline{PF}+\overline{PF'}=4$的所有點$P$形成曲線$\Gamma$，則$\Gamma$ 之位於第一象限內的短軸之端點坐標爲__________，Γ 的方程式爲__________。（請化爲二元二次式）

【解答】$(2，2)$，$x^2+4y^2-4x-8y+4=0$

【詳解】



將原坐標系S平移$(2，1)$得到新坐標系S'

$F=(2+\sqrt{3}，1)_S=(-\sqrt{3}，0)_{S}$及$F'=(2-\sqrt{3}，1)_S=(-\sqrt{3}，0)_S$

由$\overline{PF}+\overline{PF'}=4$得$\Gamma$ 之新方程式$x'^2+4y'^2=4$又$(x，y)_S=(x'，y')_{S'}\Leftrightarrow x=x'+2$，$y=y'+1$

(1)Γ 在第一象限內的短軸端點$B=(0，1)_{S'}=(2，2)_S$

(2)Γ：$(x-2)^2+4(y-1)^2=4$，Γ 之中心$O'(2，1)$

$\therefore$ Γ 之原方程式爲$x^2+4y^2-4x-8y+4=0$，如上圖

6. 平移坐標軸到新原點$O'(h，k)$後，二次曲線Γ：$x^2-6xy+y^2-8x+8y=12$ 之新方程式消去兩個一次項，而化簡Γ 的新方程式為$x'^2-6x'y'+y'^2=f$，則$(h，k)=$＿＿＿＿＿＿，$f=$＿。

【解答】$(1，-1)$，20

【詳解】

Γ：$x^2-6xy+y^2-8x+8y-12=0$

新原點$(h，k)$滿足$\begin{cases}2h-6k-8=0\\-6h+2k+8=0\end{cases}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases}h-3k-4=0\\-3h+k+4=0\end{cases}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases}h=1\\k=-1\end{cases}$

∴　新原點$(h，k)=(1，-1)$

Γ 之新方程式為$x'^2-6x'y'+y'^2-f=0$

∴　$-f=1^2-6\cdot 1(-1)+(-1)^2-8\cdot 1+8\cdot(-1)-12=1+6+1-8-8-12=-20$

∴　$f=20$

7. 平移坐標軸，以$O'(-2，3)$為新原點時，直線L：$3x+2y=6$ 對新坐標系之新方程式為＿。

【解答】$3x'+2y'=6$

【詳解】

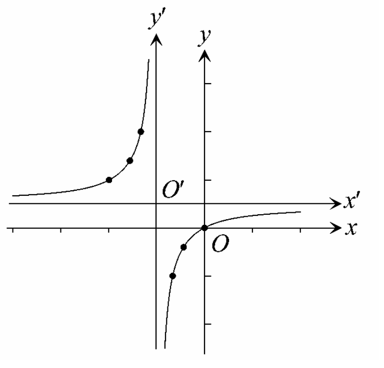
由平移公式$\begin{cases}x=x'+(-2)\\y=y'+3\end{cases}$代入原方程式 $3x+2y=6$

得 $3(x'-2)+2(y'+3)=6$ $\Rightarrow$ $3x'+2y'=6$ 為新方程式

8. 設Γ：$xy-x+2y=0$，將原坐標系平移$(h，k)$得Γ 的新方程式為$x'\cdot y'=-2$，則新原點$(h，k)=$＿＿＿＿＿＿。

【解答】$(-2，1)$

【詳解】



由 $xy-x+2y=0$ $\Leftrightarrow$ $xy-x+2y-2=-2$ $\Leftrightarrow$ $(x+2)(y-1)=-2$

知 $x=x'-2$，$y=y'+1$　∴　$(h，k)=(-2，1)$，如上圖

9. 平移坐標軸後，點$P(2，4)$的新坐標為$(-2，-2)$，則新原點對原來的坐標系的坐標為＿＿。

【解答】$(4，6)$

【詳解】設坐標軸作平移$(h，k)$建立新坐標系

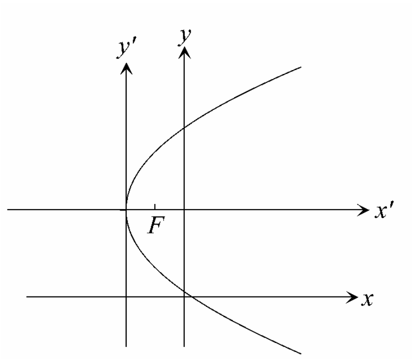
$\because$ P 的原坐標爲$(2，4)$，新坐標爲$(-2，-2)$

$\therefore$ $\begin{cases} 2=-2+h \\ 4=-2+k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h=4 \\ k=6 \end{cases}$ $\therefore$ $(h，k)=(4，6)$

10.設拋物線Γ∶$y^2-4x-6y+1=0$，將原坐標系平移$(-2，3)$得Γ 的新方程式爲＿＿＿＿＿，Γ 在原坐標系的焦點爲＿＿＿＿＿。

【解答】$y'^2=4x'$，$(-1，3)$

【詳解】



令$x=x'-2$，$y=y'+3$ 代入Γ 的原方程式$y^2-4x-6y+1=0$ 中

$(y'+3)^2-4(x'-2)-6(y'+3)+1=0 \Leftrightarrow y'^2=4x'$，$\therefore$ Γ 的新方程式爲$y'^2=4x'$

在新坐標中Γ 的焦點$(1，0)$，$x'=1$，$y'=0$，得$x=-1$，$y=3$

故Γ 的焦點爲$(-1，3)$，如上圖

11.設將坐標系 S 平移$(4，3)$而得坐標系 S'，若 $A(-2，1)$，$B(3，-5)$，求 A，B 對於 S'的新坐標。＿＿＿＿＿＿＿；＿＿＿＿＿＿＿＿

【解答】$A(-6，-2)_{S'}$，$B(-1，-8)_{S'}$

【詳解】由$\begin{cases} x'=x-4 \\ y'=y-3 \end{cases}$知 A：$\begin{cases} x'=-2-4=-6 \\ y'=1-3=-2 \end{cases}$，$B$：$\begin{cases} x'=3-4=-1 \\ y'=-5-3=-8 \end{cases}$

12.平移坐標軸至新原點$O'(h，k)$，使曲線Γ：$3x^2+4xy+2y^2+8x+4y+6=0$ 之新方程式沒有一次項，試求：

(1)新原點O'的坐標$(h，k)$＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

(2)曲線Γ 的新方程式＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

【解答】(1) $O'(h，k)=O'(-2，1)$ (2)$3x'^2+4x'y'+2y'^2=0$

【詳解】

(1)將平移公式$\begin{cases} x=x'+h \\ y=y'+k \end{cases}$代入曲線$\Gamma$ 的原方程式得

$3(x'+h)^2+4(x'+h)(y'+k)+2(y'+k)^2+8(x'+h)+4(y'+k)+6=0$ 展開整理後得

$3x'^2+4x'y'+2y'^2+(6h+4k+8)x'+(4h+4k+4)y'+(3h^2+4hk+2k^2+8h+4k+6)=0\cdots$(A)

兩個一次項係數爲 0，則$\begin{cases} 6h+4k+8=0 \\ 4h+4k+4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3h+2k+4=0 \\ h+k+1=0 \end{cases}$，解得$h=-2$，$k=1$

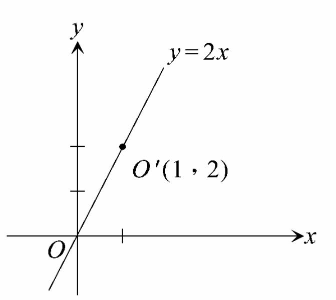
$\therefore$ 新原點$O'(h，k)=O'(-2，1)$

(2)將$h=-2$，$k=1$ 代回(A)式得Γ 的新方程式爲 $3x'^2+4x'y'+2y'^2=0$

13.將坐標系的原點沿著直線$y=2x$的右上方平行移動$\sqrt{5}$單位時，曲線Γ的新方程式爲 $3x'^2+4y'^2=12$ 形式，試求Γ 的原方程式＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

【解答】$3x^2+4y^2-6x-16y+7=0$

【解 1】



取直線$y=2x$上二點$O(0，0)$與$O'(1，2)$，則$\overline{OO'}=\sqrt{5}$ ，所求即作(1，2)平移

以新原點(1，2)作平移，將$x=x'+1$，$y=y'+2\Rightarrow x'=x-1,\ y'=y-2$

代入Γ 新方程式 $3x'^2+4y'^2-12=0$　故Γ 的原方程式爲 $3x^2+4y^2-6x-16y+7=0$

14.將坐標系 S 平移至 O' (3，− 1)得到坐標系 S'，

(1)若直線 L 的原方程式爲 $2x-5y+6=0$，求 L 對 S'的方程式＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

(2)若直線 L 的原方程式爲 $3x'+4y'-6=0$，求 L 對 S 的方程式＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

【解答】(1) $2x'-5y'+17=0$　(2) $3x+4y-11=0$

【詳解】

(1)$x=x'+3$，$y=y'-1$ 代入 $2x-5y+6=0$，$2(x'+3)-(5y'-1)+6=0$，$2x'-5y'+17=0$

(2)$x'=x-3$，$y'=y+1$ 代入 $3x'+4y'-6=0$，$3(x-3)+4(y+1)-6=0$，$3x+4y-11=0$