高雄市明誠中學 高三數學平時測驗				日期：94.11.22	
範圍	Book5 chap2 不等式	班級	普三 班	姓名	
		座號			

一、選擇題(每題 10 分)

1. 坐標平面上，若兩點 $A(2，-3)$與 $B(k，5)$在直線 $L：3x+4y-7=0$ 的反側，則 k 值的範圍為(A) $k<\frac{13}{3}$ (B) $k<-\frac{13}{3}$ (C) $k>\frac{13}{3}$ (D) $k>-\frac{13}{3}$ (E) $-\frac{13}{3}<k<0$

【解答】(D)

【詳解】

令 $f(x，y)=3x+4y-7$，則 $f(2，-3)\,f(k，5)<0$ 得$(6-12-7)\,(3k+20-7)<0$

即 $-13\,(3k+13)<0 \quad\Rightarrow\quad k>-\frac{13}{3}$，應選(D)

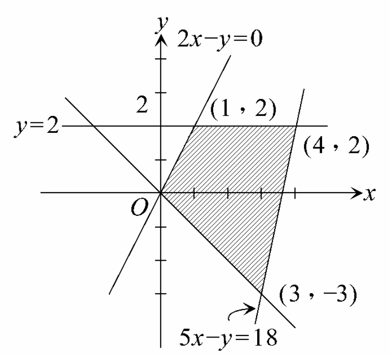
2. 在 $y\le 2$，$2x-y\ge 0$，$x+y\ge 0$ 及 $5x-y\le 18$ 的條件下，函數 $x-2y$ 的最大值為

(A) -3 (B) 0 (C) 3 (D) 6 (E) 9

【解答】(E)

【詳解】

$\begin{cases} y\le 2 \\ 2x-y\ge 0 \\ x+y\ge 0 \\ 5x-y\le 18 \end{cases}$ 的圖形為一四邊形區域



其頂點為(0，0)，(3，-3)，(4，2)，(1，2)

$(x，y)$	(0，0)	(3，-3)	(4，2)	(1，2)
$x-2y$	0	9	0	-3

由表知，$x-2y$ 的最大值為 9，應選(E)

3. 已知 x，y 均為正數，且 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$，則 $4x+y$ 的最小值為(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9

【解答】(D)

【詳解】

利用柯西不等式

$$(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})(4x+y)=[(\frac{1}{\sqrt{x}})^2+(\frac{1}{\sqrt{y}})^2]\,[(\sqrt{4x})^2+(\sqrt{y})^2]\ge(\sqrt{4}+1)^2=9$$

$\therefore\ 4x+y\ge 9$，即 $4x+y$的最小值為 9

二、填充題(每題 10 分)

1. 設$f(x)=x^2-2mx+2m+3$，$m\in R$，

(1)當$m=$__________，$f(x)<0$ 之解為 $-2-\sqrt{5}<x<-2+\sqrt{5}$ 。

(2)若$f(x)<0$ 無實數解，則m之範圍為__________ 。

(3)若$f(x)$在 $0\le x\le 4$ 時永遠取正值，則m之範圍為__________ 。

【解答】(1) -2 (2) $-1\le m\le 3$ (3) $-\dfrac{3}{2}<m<3$

【詳解】

(1) $-2-\sqrt{5}<x<-2+\sqrt{5}$ $\Leftrightarrow$ $(x+2+\sqrt{5})(x+2-\sqrt{5})<0$

$\Rightarrow$ $(x+2)^2-5<0$ $\Rightarrow$ $x^2+4x-1<0$

$\because$ 與$x^2-2mx+2m+3<0$ 同義

$\therefore$ $-2m=4$，$2m+3=-1$ $\Rightarrow$ $m=-2$

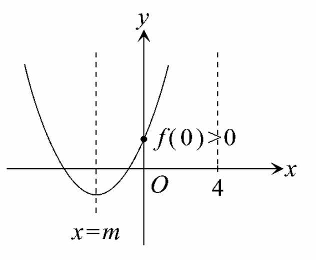
(2)$\because$ $f(x)=x^2-2mx+2m+3<0$ 無實數解

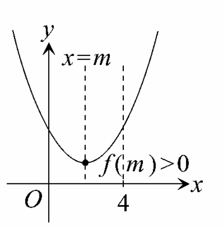
$\therefore$ $f(x)=x^2-2mx+2m+3\ge 0$，$\forall x\in R$恆成立

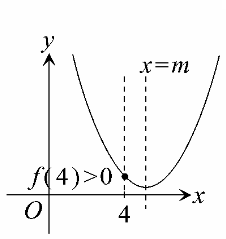
$\Rightarrow$ 判別式$(2m)^2-4(2m+3)\le 0$ $\Rightarrow$ $m^2-2m-3\le 0$ $\Rightarrow$ $(m+1)(m-3)\le 0$ $\therefore$ $-1\le m\le 3$

(3) $f(x)$在 $0\le x\le 4$ 永遠取正值 $\Rightarrow$ $f(x)$在 $0\le x\le 4$ 的最小值為正數

$f(x)=(x-m)^2+(3+2m-m^2)$ $\therefore$ 頂點為$(m，3+2m-m^2)$







①若$m<0$，則最小值$f(0)>0$ $\Rightarrow$ $2m+3>0$ $\Rightarrow$ $m>-\dfrac{3}{2}$

$\therefore$ $-\dfrac{3}{2}<m<0$

②若 $0\le m\le 4$，則最小值$f(m)>0$ $\Rightarrow$ $3+2m-m^2>0$ $\Rightarrow$ $m^2-2m-3<0$

$\Rightarrow$ $(m+1)(m-3)<0$ $\Rightarrow$ $-1<m<3$

$\because$ $0\le m\le 4$ $\therefore$ $0\le m\le 3$

③若$m > 4$，則最小值$f(4) > 0 \Rightarrow 19 - 6m > 0 \quad \therefore \quad m < \frac{19}{6}$不合

由①，②，③知 $-\frac{3}{2} < m < 3$

2. 設$f(x) = 4^x - 2^{x-1} + 1$，則當$x =$__________時，$f(x)$有最小值 =__________。

【解答】$x = -2$，$M = \frac{15}{16}$

【詳解】

$f(x) = 4^x - 2^{x-1} + 1 = 2^{2x} - 2^{-1} \cdot 2^x + 1$

令$t = 2^x$，則$t > 0$，$f(x) = t^2 - \frac{1}{2}t + 1 = (t - \frac{1}{4})^2 + \frac{15}{16}$

當$t = \frac{1}{4}$時，$f(x)$有最小值$\frac{15}{16}$，此時 $2^x = \frac{1}{4} = 2^{-2} \Rightarrow x = -2$

3. 設t為實數，已知方程式$x^2 - (t+12)x + (t^2+45) = 0$有實根，則$t^2 + 3t + 5$之最大值為____。

【解答】59

【詳解】

$x^2 - (t+12)x + (t^2+45) = 0$（$t \in R$）有實根 $\Rightarrow (t+12)^2 - 4(t^2+45) \geq 0$

$\Rightarrow -3t^2 + 24t - 36 \geq 0 \Rightarrow t^2 - 8t + 12 \leq 0 \Rightarrow (t-2)(t-6) \leq 0 \Rightarrow 2 \leq t \leq 6$

$f(t) = t^2 + 3t + 5 = (t + \frac{3}{2})^2 + 5 - \frac{9}{4}$

$\therefore$ 當$t = 6$時，$f(6) = 36 + 18 + 5 = 59$為最大值

4. 設a，b，c為三個正數，且$a + 2b + 3c = 6$，則abc之積的最大值=__________，ab^2c的最大值=__________，ab^2c^3的最大值=__________。

【解答】$\frac{4}{3}$，$\frac{27}{16}$，1

【詳解】

(1)由算幾不等式可知$\frac{a+2b+3c}{3} \geq \sqrt[3]{a(2b)(3c)}$，即 $2 \geq \sqrt[3]{6abc}$

所以 $8 \geq 6abc$，即$abc \leq \frac{4}{3}$，abc的最大值=$\frac{4}{3}$

（當$a = 2b = 3c = 2$時，即可有$abc = \frac{4}{3}$之值）

(2)由算幾不等式知$\frac{a+b+b+3c}{4} \geq \sqrt[4]{a \cdot b \cdot b \cdot (3c)}$，亦即$\frac{3}{2} \geq \sqrt[4]{3ab^2c}$

故$\frac{81}{16} \geq 3ab^2c$，亦即$ab^2c \leq \frac{27}{16}$，$ab^2c$的最大值 $= \frac{27}{16}$，當$a = b = 3c = \frac{3}{2}$時，可產生最大值

(3)由算幾不等式可知$\frac{a+b+b+c+c+c}{6} \geq \sqrt[6]{ab^2c^3}$，因此 $1 \geq \sqrt[6]{ab^2c^3}$

故$ab^2c^3 \leq 1$，ab^2c^3最大值 $= 1$，當$a = b = c = 1$時，$ab^2c^3 = 1$

5. 設$a^2 + b^2 + c^2 = 6$，則$a + \sqrt{2}\,b + \sqrt{3}\,c$的最小值=__________。

【解答】-6

【詳解】

由柯西不等式知$(1^2 + \sqrt{2}^{\,2} + \sqrt{3}^{\,2})(a^2 + b^2 + c^2) \geq (1 \cdot a + \sqrt{2} \cdot b + \sqrt{3} \cdot c)^2$

即 $6\times 6\ge (a+\sqrt{2}\,b+\sqrt{3}\,c)^2$，所以$-6\le a+\sqrt{2}\,b+\sqrt{3}\,c\le 6$

當$a=-1$，$b=-\sqrt{2}$ ，$c=-\sqrt{3}$時，$a+\sqrt{2}\,b+\sqrt{3}\,c=-6$ 最小

6. 設$a>0$，$b>0$，使$(a+\dfrac{1}{b})(\dfrac{1}{2a}+2b)$爲最小時，$a$與$b$的關係是__________ 。

【解答】$ab=\dfrac{1}{2}$

【詳解】

由$[(\sqrt{a}\,)^2+(\sqrt{\dfrac{1}{b}}\,)^2]\,[(\sqrt{\dfrac{1}{2a}}\,)^2+(\sqrt{2b}\,)^2]\ge (\sqrt{a}\cdot\sqrt{\dfrac{1}{2a}}+\sqrt{\dfrac{1}{b}}\cdot\sqrt{2b}\,)$

使$(a+\dfrac{1}{b})(\dfrac{1}{2a}+2b)\ge\dfrac{9}{2}$

故當$\sqrt{a}:\sqrt{\dfrac{1}{2a}}=\sqrt{\dfrac{1}{b}}:\sqrt{2b}$ ，即$ab=\dfrac{1}{2}$時

$(a+\dfrac{1}{b})(\dfrac{1}{2a}+2b)$有最小值$\dfrac{9}{2}$

7. $f(x，y)=x^2+2xy+2y^2-2x-4y+5$，$x$與$y$爲實數，則當$(x，y)=$__________時，使$f(x，y)$之值有最小值__________ 。

【解答】(0，1)，3

【詳解】

$f(x，y)=x^2+2(y-1)x+(2y^2-4y+5)$

$=[x^2+2(y-1)x+(y-1)^2]-(y-1)^2+(2\,y^2-4y+5)$

$=(x+y-1)^2+(y-1)^2+3\ge 3$

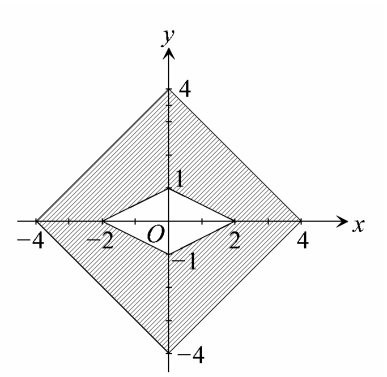
故當$x+y-1=0$ 且$y-1=0$，亦即$(x，y)=(0，1)$時，$f(x，y)$有最小值 3

8. 直角坐標平面上，滿足不等式組$\begin{cases}|x|+|y|\le 4\\|x|+2|y|\ge 2\end{cases}$的圖形的面積爲__________ 。

【解答】28

【詳解】

圖形如下

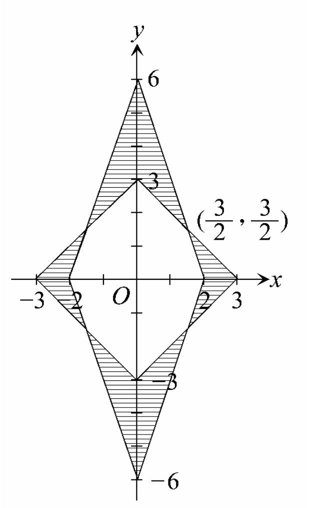


斜線部分面積爲大正方形面積減去小菱形的面積得$\dfrac{1}{2}\times 8\times 8-\dfrac{1}{2}\times 4\times 2=28$

9. 在坐標平面上，不等式 $(|x|+|y|-3)\,(3|x|+|y|-6)\le 0$ 的圖形面積爲__________ 。

【解答】12

【詳解】



$|x|+|y|=3$ 之圖形爲一正方形

x，y 截距爲 ± 3，$3|x|+|y|=6 \quad \Rightarrow \quad |x|+\frac{|y|}{3}=2$ 之圖形爲一菱形

x 截距爲± 2，y 截距爲± 6，不等式$(|x|+|y|-3)(3|x|+|y|-6)\le 0$

(0，0)代入不合，故圖形爲斜線部分，因其圖形對稱於 x 軸與 y 軸

故面積爲第一象限面積的四倍 $=4\times\frac{1}{2}(1\times\frac{3}{2}+3\times\frac{3}{2})=2\times 6=12$

10.在不等式組$\begin{cases} x\ge 0 \\ y\ge 0 \\ 3x+2y-12\le 0 \\ x+y-2\ge 0 \end{cases}$的圖形內，求下列各式的極值，

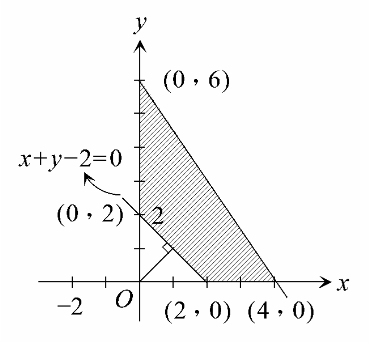
(1) x^2+y^2的最小值爲__________。

(2) $x^2+y^2+2x+4y+5$ 的最大值爲__________。

【解答】(1) 2　(2) 65

【詳解】

$\begin{cases} x\ge 0，y\ge 0 \\ 3x+2y-12\le 0 \text{ 的圖形如下} \\ x+y-2\ge 0 \end{cases}$



頂點(2，0)，(4，0)，(0，6)，(0，2)

(1) x^2+y^2表示點(x，y)與原點(0，0)的距離平方，此距離最小值爲(0，0)到直線$x+y-2=$ 0 的距離，故x^2+y^2之最小值爲$(\frac{-2}{\sqrt{2}})^2=2$

(2) $x^2+y^2+2x+4y+5=(x^2+2x+1)+(y^2+4y+4)=(x+1)^2+(y+2)^2=k$

表示點(x，y)與點(-1，-2)距離平方

(x，y) = (4，0)時，$k = 5^2 + 2^2 = 29$；(x，y) = (0，6)時，$k = 1^2 + 8^2 = 65$

故k的最大值為 65

11.$f(x) = (x-1)^2 + (x-2)^2 + (x-3)^2 + (x-8)^2 + (x-9)^2 + (x-10)^2$，則當$f(x)$在$x =$________時，$f(x)$有最小值__________。

【解答】$\frac{11}{2}$，$\frac{155}{2}$

【詳解】

$f(x) = (x-1)^2 + (x-2)^2 + (x-3)^2 + (x-8)^2 + (x-9)^2 + (x-10)^2$

$f(x) = 6x^2 - 66x + c$，$f(x) = 6(x - \frac{11}{2})^2 + c'$，其中$c' = f(\frac{11}{2}) = \frac{155}{2}$

$\therefore$ 當$x = \frac{11}{2}$時，$f(x)$有最小值$\frac{155}{2}$

12.$y = \frac{4x}{x^2+1}$，$x \in R$時，$x =$__________使y有最小值__________。

【解答】-1，-2

由$y(x^2 + 1) = 4x$有實數解x時，其判別式$16 - 4y^2 \ge 0$

得$-2 \le y \le 2$，又$y = -2$時，$-2x^2 - 4x - 2 = 0$，$x = -1$

$\therefore$ 當$x = -1$時，y有最小值-2

13.設函數$f(x) = 1 - x^2 + \sqrt{9 - x^2}$的最大值$M$，最小值$m$，則($M$，$m$) =__________。

【解答】(4，-8)

【詳解】

$f(x) = 1 - x^2 + \sqrt{9-x^2} = 9 - x^2 + \sqrt{9-x^2} - 8$

令$t = \sqrt{9-x^2}$，則$f(x) = t^2 + t - 8 = (t + \frac{1}{2})^2 - \frac{33}{4}$

又 $0 \le 9 - x^2 \le 9 \Rightarrow 0 \le t \le 3$

$t = 0$ 時，$f(x) = -8$ 為最小值，$t = 3$ 時，$f(x) = 4$ 為最大值

故(M，m) = (4，-8)

14.設 $-3 \le x \le 5$，求$(x+3)(x-5)^2$最小值為__________，此時$x =$__________。

【解答】最小值 $= \frac{2048}{27}$，$x = \frac{-1}{3}$

【詳解】

因$x + 3 > 0$ 且 $5 - x > 0$

所以$(x+3)(x-5)^2 = (x+3)(5-x)^2 \le 4[\frac{(x-3) + \frac{1}{2}(5-x) + \frac{1}{2}(5-x)}{3}]^3$（算幾不等式）

$= 4(\frac{8}{3})^3 = \frac{2048}{27}$

等號成立是在$x + 3 = \frac{1}{2}(5-x)$，即$x = \frac{-1}{3}$

15.函數$f(x) = \frac{3x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1}$的最小值為__________。

【解答】$2 - \sqrt{2}$

【詳解】

令$\dfrac{3x^2-2x+1}{x^2+1}=y$，則$(y-3)x^2+2x+(y-1)=0$

$\because$ x為實數 $\therefore$ $D\geq 0$ $\Rightarrow$ $4-4(y-3)(y-1)\geq 0$

即$1-(y-3)(y-1)\geq 0$ $\Rightarrow$ $y^2-4y+2\leq 0$ $\Rightarrow$ $2-\sqrt{2}\leq y\leq 2+\sqrt{2}$

故$f(x)$的最小值為$2-\sqrt{2}$