高雄市明誠中學 高三數學平時測驗 日期：94.11.22					
範圍	Book5 chap2 不等式	班級	普三 班	姓名	
		座號			

一、選擇題(每題 10 分)

1. 若二次不等式$ax^2+bx+1>0$的解爲 $-1<x<\frac{1}{3}$，則ab之值爲

(A) -6 (B)6 (C) -5 (D)5

【解答】(B)

【詳解】

$ax^2+bx+1>0$ 之解爲 $-1<x<\frac{1}{3}$

$-1<x<\frac{1}{3} \Leftrightarrow (x+1)(x-\frac{1}{3})<0 \Leftrightarrow x^2+\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}<0 \Leftrightarrow -3x^2-2x+1>0$

$\therefore\ ax^2+bx+1>0 \Leftrightarrow -3x^2-2x+1>0$

比較係數得$a=-3$，$b=-2$，故$ab=(-3)(-2)=6$，應選(B)

2. 已知 x，y 均爲正數，且$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$，則 $4x+y$ 的最小值爲(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9

【解答】(D)

【詳解】

利用柯西不等式

$(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})(4x+y)=[(\frac{1}{\sqrt{x}})^2+(\frac{1}{\sqrt{y}})^2][(\sqrt{4x})^2+(\sqrt{y})^2]\ge(\sqrt{4}+1)^2=9$

$\therefore\ 4x+y\ge 9$，即 $4x+y$的最小值爲 9

二、填充題(每題 10 分)

1. 設對任意實數x，二次式$ax^2+4x+(a+3)$恆正，則a的範圍爲__________。

【解答】$a>1$

【詳解】

$ax^2+4x+(a+3)$恆正的充要條件爲$a>0$ 且 $4^2-4a(a+3)<0$

即$a>0$ 且$a(a+3)-4>0$，亦即$a>0$ 且$a^2+3a-4=(a+4)(a-1)>0$

即$a>0$ 且$(a>1$ 或$a<-4)$，所以$a>1$ 時，$ax^2+4x+(a+3)$恆正

2. 不等式 $3^{\log x}<\frac{1}{9}$的解爲__________。

【解答】$0<x<\frac{1}{100}$

【詳解】

$3^{\log x}<\frac{1}{9}=3^{-2} \Rightarrow \log x<-2 \Rightarrow 0<x<10^{-2} \Rightarrow 0<x<\frac{1}{100}$

3. 不等式 $4^x+2^x-6<0$ 的解爲__________。

【解答】$x<1$

【詳解】

$4^x+2^x-6<0 \Rightarrow 2^{2x}+2^x-2\times 3<0 \Rightarrow (2^x-2)(2^x+3)<0$

$\because \quad 2^x > 0 \quad \therefore \quad 2^x + 3 > 0$

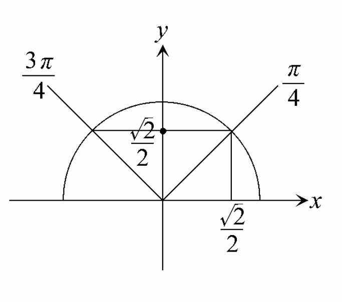
故 $2^x - 2 < 0 \quad \Rightarrow \quad 0 < 2^x < 2 \quad \Rightarrow \quad x < 1$

4. $0 \le x \le \pi$時，$\cos x > \sin x$的解爲__________。

【解答】$0 \le x < \dfrac{\pi}{4}$

【詳解】

如下圖



所以$\begin{cases} 0 \le x \le \pi \\ \cos x > \sin x \end{cases}$的解爲 $0 \le x < \dfrac{\pi}{4}$

5. 不等式$\dfrac{x-2}{x^2-x+1} < \dfrac{2}{x-1}$的解爲__________。

【解答】$-1 < x < 0$ 或 $x > 1$

【詳解】

解$\dfrac{x-2}{x^2-x+1} < \dfrac{2}{x-1}$，由上式可得$\dfrac{x-2}{x^2-x+1} - \dfrac{2}{x-1} < 0$

即$\dfrac{(x-1)(x-2)-2(x^2-x+1)}{(x^2-x+1)(x-1)} < 0$，亦即$\dfrac{-(x^2+x)}{(x^2-x+1)(x-1)} < 0$

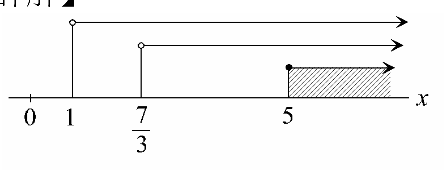
故$-(x^2+x)(x^2-x+1)(x-1) < 0$ 且$x^2-x+1 = (x-\dfrac{1}{2})^2 + \dfrac{3}{4} > 0$

因此$(x^2-x)(x-1) > 0$，即$x(x+1)(x-1) > 0$，所以$x > 1$ 或 $-1 < x < 0$

6. 不等式$\sqrt{3x-7} > \sqrt{x-5}$之解爲__________。

【解答】$x \ge 5$

【詳解】



$\sqrt{3x-7} > \sqrt{x-5} \quad \Rightarrow \quad 3x-7 > 0$，$x-5 \ge 0$，且 $3x-7 > x-5$

$\Rightarrow \quad x > \dfrac{7}{3}$，$x \ge 5$ 且 $x > 1$

$\therefore \quad x \ge 5$ 爲所求

7. 不等式 $0.1^{x^2-3x} > 0.0001$ 的解爲__________。

【解答】$-1 < x < 4$

【詳解】

$0.1^{x^2-3x} > 0.0001 = (0.1)^4 \quad \Rightarrow \quad x^2-3x < 4 \quad \Rightarrow \quad x^2-3x-4 < 0$

$\Rightarrow \quad (x+1)(x-4) < 0 \quad \Rightarrow \quad -1 < x < 4$

8. 不等式$\dfrac{(x-2)^2(x-3)^3}{x+1} \le 0$的解爲__________。

【解答】$-1 < x \le 3$

【詳解】

$\dfrac{(x-2)^2(x-3)^3}{x+1} \le 0$，因$(x-2)^2 \ge 0$，$(x-3)^2 \ge 0$

故$\dfrac{x-3}{x+1} \le 0$ 且$x = 2$ 爲其解　$\Rightarrow$　$(x-3)(x+1) \le 0$

$x \ne 1$　$\Rightarrow$　$-1 < x \le 3$

9. 不等式$-2 \le \log_3 \log_{\frac{1}{3}} x < 1$ 的解爲__________。

【解答】$3^{-\frac{1}{9}} \ge x > 3^{-3}$

【詳解】

$-2 \le \log_3 \log_{\frac{1}{3}} x < 1$　$\Rightarrow$　$\log_3 3^{-2} \le \log_3(\log_{\frac{1}{3}} x) < \log_3 3$

$\therefore$　$3^{-2} \le \log_{\frac{1}{3}} x < 3$　$\Rightarrow$　$\log_{\frac{1}{3}}(\frac{1}{3})^{\frac{1}{9}} \le \log_{\frac{1}{3}} x < \log_{\frac{1}{3}}(\frac{1}{3})^3$

$\Rightarrow$　$(\frac{1}{3})^{\frac{1}{9}} \ge x > (\frac{1}{3})^3$　$\Rightarrow$　$3^{-\frac{1}{9}} \ge x > 3^{-3}$

10.$2\sin^2\theta - \sin\theta - 3 \le 0$ 在 $-2\pi \le \theta \le 0$ 的有限範圍內的解爲__________。

【解答】$-2\pi \le \theta \le 0$

【詳解】

$2\sin^2\theta - \sin\theta - 3 \le 0$ 時，$(2\sin\theta - 3)(\sin\theta + 1) \le 0$

即 $-1 \le \sin\theta \le \dfrac{3}{2}$ ，此條件對任何角θ 都成立

所以在 $-2\pi \le \theta \le 0$ 的範圍內，其解爲 $-2\pi \le \theta \le 0$

11.不等式 $2^{x-1} - 3 \times 2^{2x-1} + 1 < 0$ 的解爲__________。

【解答】$x > 0$

【詳解】

$2^{x-1} - 3 \times 2^{2x-1} + 1 < 0$　$\Rightarrow$　$2^{-1} \cdot 2^x - 3 \cdot 2^{-1} \cdot 2^{2x} + 1 < 0$

令$t = 2^x > 0$，則原式化爲$\dfrac{1}{2}t - \dfrac{3}{2}t^2 + 1 < 0$

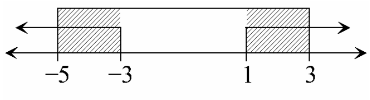
即 $3t^2 - t - 2 > 0$　$\Rightarrow$　$(t-1)(3t+2) > 0$　$\Rightarrow$　$t > 1$ 或$t < -\dfrac{2}{3}$（但$t > 0$）　$\therefore$　$t > 1$，即

$2^x > 1 = 2^0$　$\Rightarrow$　$x > 0$

12.不等式 $0 \le x^2 + 2x - 3 \le 12$ 的解爲__________。

【解答】 $-5 \le x \le -3$ 或 $1 \le x \le 3$

【詳解】



$0 \le x^2 + 2x - 3 \le 12$ 的解與方程組$\begin{cases} x^2 + 2x - 3 \ge 0 \\ x^2 + 2x - 3 \le 12 \end{cases}$ 同義

即$\begin{cases}(x-1)(x+3)\ge 0 \cdots\cdots ① \\ (x+5)(x-3)\le 0 \cdots\cdots ②\end{cases}$

由①得$x\ge 1$ 或$x\le -3$，由②得 $-5\le x\le 3$

因此，利用數線可得 $-5\le x\le -3$ 或 $1\le x\le 3$

13.不等式$\left|x^2-1\right|\ge 3$ 的解爲＿＿＿＿＿。

【解答】$x\ge 2$ 或 $x\le -2$

【詳解】

$\left|x^2-1\right|\ge 3$ 的解爲$\begin{cases}x^2-1\ge 0\\ x^2-1\ge 3\end{cases}$或$\begin{cases}x^2-1\le 0\\ x^2-1\le -3\end{cases}$的解

①當$\begin{cases}x^2-1\ge 0\\ x^2-1\ge 3\end{cases}$時，$\begin{cases}x\ge 1 或\ x\le -1\\ x\ge 2 或\ x\le -2\end{cases}$，即 $x\ge 2$ 或 $x\le -2$

②當$\begin{cases}x^2-1\le 0\\ x^2-1\le -3\end{cases}$時，$\begin{cases}-1\le x\le 1\\ x^2\le -2\end{cases}$，此時無解

所以此不等式之解爲 $x\ge 2$ 或 $x\le -2$

14.不等式 $3^{2x}+1<3^{x+2}+3^{x-2}$的解爲＿＿＿＿＿。

【解答】 $-2<x<2$

【詳解】

$3^{2x}+1<3^{x+2}+3^{x-2}$時，$(3^x)^2+1<9\cdot 3^x+\frac{1}{9}\cdot 3^x$

即$(3^x)^2-\frac{82}{9}\cdot 3^x+1<0$，可知 $9(3^x)^2-82\cdot 3^x+9<0$

此時$(9\cdot 3^x-1)(3^x-9)<0$，所以$\frac{1}{9}<3^x<9$，因此 $-2<x<2$

15.設 $0\le x<2\pi$，不等式$\sin x+\sin 2x>0$ 的解爲＿＿＿＿＿。

【解答】$0<x<\frac{2\pi}{3}$ 或$\pi<x<\frac{4\pi}{3}$

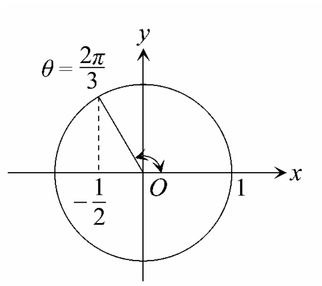
【詳解】

$\sin x+\sin 2x>0 \quad\Rightarrow\quad \sin x+2\sin x\cos x>0 \quad\Rightarrow\quad \sin x(1+2\cos x)>0$

(1) $\sin x>0$ 且 $1+2\cos x>0 \quad\Rightarrow\quad \sin x>0$ 且 $\cos x>\frac{-1}{2}$

$0\le x<2\pi$，$\sin x>0 \quad\Rightarrow\quad 0<x<\pi$

又 $\cos x>\frac{-1}{2}$，故 $0<x<\frac{2\pi}{3}\cdots\cdots①$

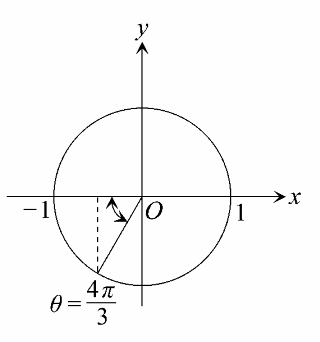


(2) $\sin x<0$ 且 $1+2\cos x<0 \quad\Rightarrow\quad \sin x<0$ 且 $\cos x<\frac{-1}{2}$

$0 \le x < 2\pi$，$\sin x < 0 \quad \Rightarrow \quad \pi < x < 2\pi$

又 $\cos x < \dfrac{-1}{2}$，故 $\pi < x < \dfrac{4\pi}{3}$ ……②

①，②聯集得 $0 < x < \dfrac{2\pi}{3}$ 或 $\pi < x < \dfrac{4\pi}{3}$



16.$|ax+1| \le b$ 之解 x 的範圍為 $-3 \le x \le 6$，則數對 $(a，b) =$__________。

【解答】$(\dfrac{-2}{3}，3)$

【詳解】

$-3 \le x \le 6 \quad \Leftrightarrow \quad -\dfrac{9}{2} \le x - \dfrac{3}{2} \le \dfrac{9}{2} \quad \Leftrightarrow \quad -\dfrac{9}{2} \cdot \dfrac{-2}{3} \ge \dfrac{-2}{3}x + 1 \ge \dfrac{9}{2} \cdot \dfrac{-2}{3}$

$\Leftrightarrow \quad 3 \ge \dfrac{-2}{3}x + 1 \ge -3 \quad \Leftrightarrow \quad |\dfrac{-2}{3}x + 1| \le 3$

$\therefore$ 數對 $(a，b) = (\dfrac{-2}{3}，3)$

17.不等式 $x^4 - x^3 + 3x - 2x + 2 > 0$ 之解 x 的範圍為__________。

【解答】R（全體實數）

【詳解】

$x^4 - x^3 + 3x^2 - 2x + 2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x^2 - x + 1)(x^2 + 2) > 0$

$\because$ $x^2 - x + 1$ 恆正且 $x^2 + 2$ 恆正 $\therefore$ 解 x 的範圍為 R

18.不等式 $\sqrt{(x-5)^2 + y^2} + \sqrt{(x+5)^2 + y^2} \le 10$ 之解 $(x，y)$，實數 x 的範圍為__________，實數 y 的範圍為__________。

【解答】$-5 \le x \le 5$，$y = 0$

【詳解】

在平面上點 $F(5，0)$ 與 $F'(-5，0)$

任一點 $P(x，y)$ 滿足 $\overline{PF} + \overline{PF'} \le 10$ 時，點 P 必落在線段 $\overline{FF'}$ 上

$\therefore$ $-5 \le x \le 5$ 且 $y = 0$

（因點 P 不在 $\overline{FF'}$ 上時，$\overline{PF} + \overline{PF'} > \overline{FF'}$，使 $\overline{PF} + \overline{PF'} > 10$，不合已知條件）

19.設 $0 \le x \le \pi$，不等式 $\dfrac{\sqrt{3}\sin x}{\sqrt{2} + \cos x} < 1$ 的解為__________。

【解答】$0 \le x < \dfrac{5\pi}{12}$ 或 $\dfrac{11\pi}{12} < x \le \pi$

【詳解】

$0 \le x \le \pi \quad \Rightarrow \quad 0 \le \sin x \le 1$，$-1 \le \cos x \le 1 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2} + \cos x > 0$

$$\frac{\sqrt{3}\sin x}{\sqrt{2}+\cos x}<1 \quad\Rightarrow\quad \sqrt{3}\sin x<\sqrt{2}+\cos x \quad\Rightarrow\quad \sqrt{3}\sin x-\cos x<\sqrt{2}$$

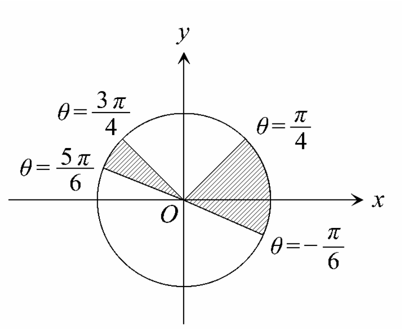
$$\Rightarrow\quad \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x<\frac{\sqrt{2}}{2} \quad\Rightarrow\quad \cos\frac{\pi}{6}\sin x-\sin\frac{\pi}{6}\cos x<\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow\quad \sin(x-\frac{\pi}{6})<\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$0\le x\le\pi \quad\Rightarrow\quad -\frac{\pi}{6}\le x-\frac{\pi}{6}\le\frac{5\pi}{6}$

又 $\frac{\sqrt{2}}{2}=\sin\frac{\pi}{4}=\sin\frac{3\pi}{4}$　$\therefore$　不等式的解爲圖形中的斜線部分

即 $-\frac{\pi}{6}\le x-\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{3\pi}{4}<x-\frac{\pi}{6}\le\frac{5\pi}{6}$，故 $0\le x<\frac{5\pi}{12}$ 或 $\frac{11\pi}{12}<x\le\pi$



20.不等式 $\sqrt{10-x^2}>x+2$ 的解爲＿＿＿＿＿。

【解答】$-\sqrt{10}\le x<1$

【詳解】

$\sqrt{10-x^2}>x+2$ 之解必須滿足下列條件

①$10-x^2\ge 0$，即 $-\sqrt{10}<x\le\sqrt{10}$

②當 x 滿足①的條件時

(i)$x+2\le 0$ 時，原不等式成立，此時 $x\le -2$，即 $-\sqrt{10}\le x\le -2$ 時，不等式成立

(ii) $x+2\ge 0$ 時，必須滿足 $10-x^2>(x+2)^2$

此時，$2x^2+4x-6<0$，即 $x^2+2x-3<0$，亦即 $-3<x<1$

因此 $x\ge -2$ 且 $-3<x<1$ 且 $-\sqrt{10}\le x\le\sqrt{10}$ 時，原不等式成立，此時 $-2\le x<1$

所以，原不等式之解爲(i)或(ii)的解，即 $-\sqrt{10}\le x<1$

21.設 $0\le\theta\le 2\pi$，聯立不等式 $\begin{cases}2\sin\theta-\sqrt{2}\ge 0\\ \sqrt{3}\tan\theta-1<0\end{cases}$ 的解爲＿＿＿＿＿。

【解答】$\frac{\pi}{2}<\theta\le\frac{3\pi}{4}$

【詳解】

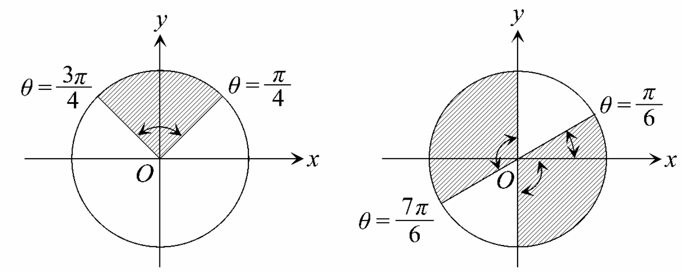
$2\sin\theta-\sqrt{2}\ \ge 0 \quad\Rightarrow\quad \sin\theta\ge\frac{\sqrt{2}}{2}$

又 $0\le\theta\le 2\pi$　$\therefore$　$\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{3\pi}{4}$ ……①

$\sqrt{3}\tan\theta-1<0 \quad\Rightarrow\quad \tan\theta<\frac{1}{\sqrt{3}}$

又 $0\le\theta\le 2\pi$　∴　$0\le\theta<\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{\pi}{2}<0<\frac{7\pi}{6}$ 或 $\frac{3\pi}{2}<\theta\le 2\pi$……②

①，②的共同解爲 $\frac{\pi}{2}<\theta\le\frac{3\pi}{4}$



22.設 $0<x<\pi$，不等式 $-\frac{\sqrt{3}}{2}<\cos x<\frac{1}{2}$ 的解爲__________。

【解答】$\frac{\pi}{3}<x<\frac{5\pi}{6}$

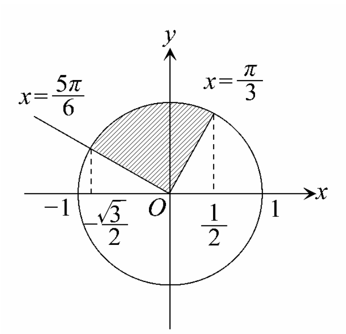
【詳解】

$0<x<\pi$，$\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$　$\Rightarrow$　$x=\frac{5\pi}{6}$，$\cos x=\frac{1}{2}$　$\Rightarrow$　$x=\frac{\pi}{3}$

當 $0<x\le\frac{\pi}{2}$ 時，$0\le\cos x<\frac{1}{2}$　$\Rightarrow$　$\frac{\pi}{3}<x\le\frac{\pi}{2}$

當 $\frac{\pi}{2}<x<\pi$ 時，$-\frac{\sqrt{3}}{2}<\cos x<0$　$\Rightarrow$　$\frac{\pi}{2}<x<\frac{5\pi}{6}$

故 $0<x<\pi$ 時，$-\frac{\sqrt{3}}{2}<\cos x<\frac{1}{2}$ 之解爲 $\frac{\pi}{3}<x<\frac{5\pi}{6}$



23.若 $\sqrt{x(4-x)}>mx$ 的解爲 $0<x\le 4$，則 m 値的範圍爲__________。

【解答】$m<0$

【詳解】

$\sqrt{x(4-x)}>mx$

(1)$x(4-x)\ge 0$　$\Rightarrow$　$x(x-4)\le 0$　$\Rightarrow$　$0\le x\le 4$，已知 $x=0$ 非其解，故 $0<x\le 4$

(2)當 $m<0$ 時，$mx<0$，則不等式在 $0<x\le 4$ 時恆成立

當 $m=0$ 時，$\sqrt{x(4-x)}>0$ 之解爲 $0<x<4$，與已知解爲 $0<x\le 4$ 不合

故不等式之解爲 $0<x\le 4$ 時，必 $m<0$

24.$f(x)$爲一個二次函數，若 $f(x)>0$ 之解 x 的範圍爲 $-2<x<4$，則 $f(2x)<0$ 之解 x 的範圍爲__。

【解答】$x>2$ 或 $x<-1$

【詳解】

令 $f(x)=a(x+2)(x-4)$，其中 $a<0$

$f(2x)=a(2x+2)(2x-4)$

$f(2x)<0 \quad \Leftrightarrow \quad (2x+2)(2x-4)>0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)(x-2)>0$

$\therefore \quad f(2x)<0$ 的解 x 之範圍是 $x>2$ 或 $x<-1$