

高雄市明誠中學 高三數學平時測驗 日期：94.10.05					
範圍	Book5 1-1,2	班級	普三	班	姓
	條件機率、獨立事件	座號			名

一、選擇題(每題 10 分)

1. 若有兩組資料為 $X: x_1, x_2, \dots, x_n; Y: y_1, y_2, \dots, y_n$ ，其平均數 $\bar{x} = \bar{y}$ （皆大於 0），而變異係數 $CV_S(X) = CV_S(Y)$ ，則此兩組資料 X, Y 的
 (A)中位數相等 (B)標準差相等 (C)四分位差相等 (D)相關係數為 1 (E)全距相等

【解答】(B)

【詳解】

$$\because CV_S(X) = \frac{S_X}{\bar{x}} \times 100\%, CV_S(Y) = \frac{S_Y}{\bar{y}} \times 100\%$$

$$\text{由 } CV_S(X) = CV_S(Y) \Rightarrow \frac{S_X}{\bar{x}} = \frac{S_Y}{\bar{y}}, \because \bar{x} = \bar{y} \therefore S_X = S_Y, \text{ 即標準差相等}$$

2. 一組資料 $X: x_1, x_2, \dots, x_n$ ，其變異係數 CV_S 為 5%，表示此組資料 X 的平均數是標準差的(A) 5 倍 (B) $\frac{1}{5}$ 倍 (C) 20 倍 (D) $\frac{1}{20}$ 倍 (E) 25 倍

【解答】(C)

【詳解】

$$\because CV_S = \frac{S}{\bar{x}} \times 100\% = 5\% \Rightarrow \frac{S}{\bar{x}} \times 100 = 5$$

$$\therefore \bar{x} = 20S, \text{ 即平均數是標準差的 20 倍}$$

3. (複選)下列敘述何者為正確？

- (A)某次考試，甲班學生國文的標準差 5 分，乙班學生國文的標準差為 4.5 分，那麼可知甲班學生的國文程度較乙班學生的國文程度差異性大
 (B)某次數學競試，甲班平均分數為 80 分，標準差 12 分，乙班的平均分數為 70 分，標準差 9 分，由此可知，甲班分數的變異大於乙班分數的變異
 (C)兩組相同筆數的資料全距愈大時，其變異係數也愈大
 (D)兩組相同筆數的資料標準差愈大時，其變異係數也愈大
 (E)某次期中考數學成績偏低，每人成績各加 20 分，則新成績的標準差變異係數比原成績的變異係數小

【解答】(B)(E)

【詳解】

(A)由甲班的標準差 5 分，大於乙班的標準差 4.5 分，還不知道哪一班的差異性大？必須要再給甲、乙兩班的平均分數才能判定

$$(B) \because CV_S(\text{甲}) = \frac{12}{80} \times 100\% = 15\%, CV_S(\text{乙}) = \frac{9}{70} \times 100\% = 12.86\%$$

$$\therefore CV_S(\text{甲}) > CV_S(\text{乙})$$

(C)不一定。例如有兩組資料

x	10	20	30	40	60
y	20	20	50	70	90

$$\therefore CV_R(X) = \frac{60-10}{60+10} \times 100\% \doteq 71.43\%, \quad CV_R(Y) = \frac{90-20}{90+20} \times 100\% \doteq 63.64\%$$

$\therefore R(Y) > R(X)$ ，但 $CV(Y) < CV(X)$

$$(D) \therefore CV_S = \frac{S}{\bar{x}} \times 100\%$$

\therefore 當 S 愈大時，需視 \bar{x} 之值是否改變，才能決定 CV_S 的大小

(E) 將每人成績加 20 分，令原成績 x 分，則新成績為 $x + 20$

$$\text{令 } Y = X + 20, \text{ 則 } \bar{y} = \bar{x} + 20, \quad S_Y = S_{x+20} = S_X$$

$$\therefore CV_S(Y) = \frac{S_Y}{\bar{y}} \times 100\% = \frac{S_X}{\bar{x} + 20} \times 100\% < \frac{S_X}{\bar{x}} \times 100\% = CV_S(X)$$

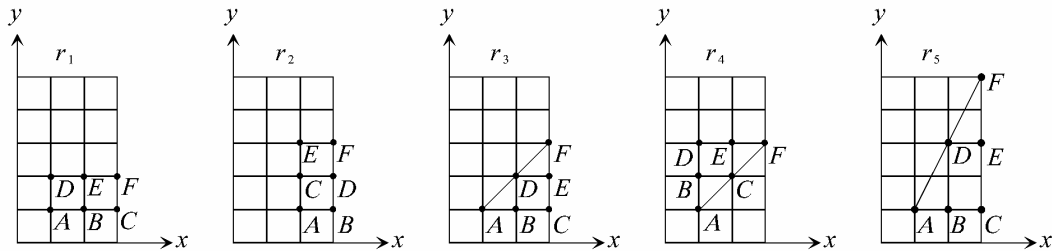
4. 設有 10 筆 (x_i, y_i) 的資料， $S_X = 4$ ， $S_Y = 2$ ，且相關係數 $r = 0.8$ ，則 y 對 x 做迴歸，其迴歸直線的斜率為？(A) 0.4 (B) 0.64 (C) 0.8 (D) 1 (E) 1.6

【解答】(A)

【詳解】 \therefore 迴歸直線方程式為 $y = \bar{y} + r \frac{S_Y}{S_X} (x - \bar{x})$ 且 $S_X = 4$ ， $S_Y = 2$ ， $r = 0.8$

$$\therefore \text{斜率為 } r \times \frac{S_Y}{S_X} = 0.8 \times \frac{2}{4} = 0.4$$

5. 下圖中，有五組數據，每組各有 A, B, C, D, E, F 等六個資料點：



設各組的相關係數由左至右分別為 r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 ，則下列關係式，何者為真？

- (A) $r_1 = r_2$ (B) $r_2 < r_3$ (C) $r_3 < r_4$ (D) $r_3 < r_5$ (E) $r_4 = r_5$

【解答】(A)(B)(E)

【詳解】

$$\text{由 } r(x, y) = \begin{cases} r(ax + b, cy + d), & \text{當 } ac > 0 \\ -r(ax + b, cy + d), & \text{當 } ac < 0 \end{cases}, \text{ 且 } r(x, y) = \frac{\sum x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{(n-1)S_X S_Y}$$

$$(1) r_1(x, y) = r_1(x-1, y-1)$$

$$\text{且 } A(1, 1), B(2, 1), C(3, 1), D(1, 2), E(2, 2), F(3, 2)$$

作 $(x-1, y-1)$ 平移後得

$$A'(0, 0), B'(1, 0), C'(2, 0), D'(0, 1), E'(1, 1), F'(2, 1)$$

$$\text{則 } \bar{u} = 1, \bar{v} = \frac{1}{2}, \sum u_i v_i = 3, \therefore r_1 = \frac{\sum u_i v_i - n \bar{u} \bar{v}}{(n-1)S_U S_V} = \frac{3 - 6 \times 1 \times \frac{1}{2}}{5S_U S_V} = 0$$

$$(2) A(2, 1), B(3, 1), C(2, 2), D(3, 2), E(2, 3), F(3, 3)$$

作 $(2, 1)$ 平移，即 $(x-2, y-1)$ 後得

$A'(0, 0), B'(1, 0), C'(0, 1), D'(1, 1), E'(0, 2), F'(1, 2)$

$$\text{則 } \bar{u} = \frac{1}{2}, \bar{v} = 1, \sum u_i v_i = 3 \therefore r_2 = \frac{3 - 6 \times \frac{1}{2} \times 1}{5S_U S_V} = 0 \Rightarrow r_2(x, y) = r_2(x - 2, y - 1) = 0$$

(3) $A(1, 1), B(2, 1), C(3, 1), D(2, 2), E(3, 2), F(3, 3)$

作(3, 1)平移, 即 $(x - 3, y - 1)$ 後得

$$A'(-2, 0), B'(-1, 0), C'(0, 0), D'(-1, 1), E'(0, 1), F'(0, 2), \text{則 } \bar{u} = -\frac{2}{3}, \bar{v} = \frac{2}{3},$$

$$\sum u_i v_i = -1$$

$$\therefore S_U = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum u_i^2 - \frac{n}{n-1} \bar{u}^2} = \sqrt{\frac{6}{5} - \frac{6}{5} \left(-\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{6}{5} - \frac{8}{15}} = \sqrt{\frac{10}{15}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$S_V = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum v_i^2 - \frac{n}{n-1} \bar{v}^2} = \sqrt{\frac{6}{5} - \frac{6}{5} \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow r_3 = \frac{\sum u_i v_i - n \bar{u} \bar{v}}{(n-1)S_U S_V} = \frac{-1 - 6 \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{2}{3}}{5 \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{2}{3}}} = \frac{-1 + \frac{8}{3}}{\frac{10}{3}} = \frac{1}{2} \Rightarrow r_3(x, y) = r_3(x - 3, y - 1) = \frac{1}{2}$$

(4) $A(1, 1), B(1, 2), C(2, 2), D(1, 3), E(2, 3), F(3, 3)$

作(1, 3)平移, 即 $(x - 1, y - 3)$ 得

$A'(0, -2), B'(0, -1), C'(1, -1), D'(0, 0), E'(1, 0), F'(2, 0)$

$$\text{則 } \bar{u} = \frac{2}{3}, \bar{v} = -\frac{2}{3}, \sum u_i v_i = -1 \text{ 且 } S_U = S_V = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\therefore r_4 = \frac{1}{2} \Rightarrow r_4(x, y) = r_4(x - 1, y - 3) = \frac{1}{2}$$

(5) $A(1, 1), B(2, 1), C(3, 1), D(2, 3), E(3, 3), F(3, 5)$

作 $(x - 3, \frac{y-1}{2})$ 得

$A'(-2, 0), B'(-1, 0), C'(0, 0), D'(-1, 1), E'(0, 1), F'(0, 2)$

與第三組作(3, 1)平移, 即 $(x - 3, y - 1)$ 之結果相同

$$\therefore r_5(x - 3, \frac{y-1}{2}) = r_3(x - 3, y - 1) = r_3(x, y) = \frac{1}{2}$$

由(1)~(5)知 $r_1 = r_2 = 0, r_3 = r_4 = r_5 = \frac{1}{2}$

二、填充題(每題 10 分)

1. 某次測驗成績, 甲, 乙二班的平均數分別是 70, 60, 其標準差分別是 10, 8。已知甲班 40 人, 乙班 60 人, 則二班全部 100 人的平均數 $\bar{x} =$ _____, 標準差 $S =$ _____, 甲與乙哪一班變異較小(均勻) _____。

【解答】64, 10.09, 乙班

【詳解】

令甲、乙班的所有分數的平方和分別是 a, b , 則

$$(1) \bar{x} = \frac{1}{100} (70 \times 40 + 60 \times 60) = 64$$

$$(2) \begin{cases} \frac{1}{39} \left[a - \frac{1}{40} (2800)^2 \right] = 100 \\ \frac{1}{59} \left[b - \frac{1}{60} (3600)^2 \right] = 64 \\ S^2 = \frac{1}{99} \left[(a+b) - \frac{1}{100} (6400)^2 \right] \end{cases}$$

得 $a = 199900$, $b = 219776$, $S^2 = 101.78$, $S = 10.09$

(3) 由 $\frac{10}{70} \times 100\% = 14.28\%$ 及 $\frac{8}{60} \times 100\% = 13.33\%$, 使 $CV_S(\text{甲}) > CV_S(\text{乙})$

\therefore 乙班的變異較小

3. 下表為甲班某科目段考成績分配表：

分數	20~30	30~40	40~50	50~60	60~70	70~80	80~90	90~100
人數	1	2	3	4	10	15	10	5

則 $\bar{x} =$ _____

, 全距 = _____, 中位數 = _____, $Q.D. =$ _____,

$S =$ _____, $CV_S =$ _____。

(小數點以後二位四捨五入)

【解答】 71, 80, 73.33, 20, 16.41, 23.11%

【詳解】

x 表組中點, f 表次數, c 表累積次數, x' 表離均差

組別	c	x	f	x'	$x'f$	x'^2f
20~30	1	25	1	-46	-46	2116
30~40	3	35	2	-36	-72	2592
40~50	6	45	3	-26	-78	2028
50~60	10	55	4	-16	-64	1024
60~70	20	65	10	-6	-60	360
70~80	35	75	15	4	60	240
80~90	45	85	10	14	140	1960
90~100	50	95	5	24	120	2880
合計			50		0	13200

$$(1) \bar{x} = \frac{1}{50} (25 + 70 + 135 + 220 + 650 + 1125 + 850 + 475) = 71$$

$$(2) \text{全距} = 100 - 20 = 80$$

$$(3) Me = 70 + \frac{5}{15} \cdot 10 \div 73.33$$

$$Q_1 = 62.5, Q_3 = 82.5$$

$$Q.D. = Q_3 - Q_1 = 20$$

$$(4) S^2 = \frac{1}{49} \cdot 13200 = 269.39, S = 16.41$$

$$CV_S = \frac{16.41}{71} \times 100\% = 23.11\%$$

70	<i>Me</i>	80
20	25	35
60	<i>Q</i> ₁	70
10	12.5	20
80	<i>Q</i> ₃	90
35	37.5	45

4. 下表為某旅館之住房天數與人數之統計表：

天數	1~3	4~6	7~9	10~12	13~15
人數	10	12	5	2	3

則其標準差為_____，變異係數為_____。

【解答】3.73，64.92%

【詳解】

每一組以組中點表示該組的每一個人的住房天數， x 表組中點， f 表人數

x	2	5	8	11	14
f	10	12	5	2	3

$$\bar{x} = \frac{1}{32} (20 + 60 + 40 + 22 + 42) = \frac{184}{32} = \frac{23}{4} = 5.75$$

$$S^2 = \frac{1}{31} [10\left(\frac{-15}{4}\right)^2 + 12\left(\frac{-3}{4}\right)^2 + 5\left(\frac{9}{4}\right)^2 + 2\left(\frac{21}{4}\right)^2 + 3\left(\frac{33}{4}\right)^2] = \frac{6912}{31 \times 16} = \frac{432}{31} = 13.94$$

得 $S = 3.733$

$$\therefore CV_S = \frac{3.733}{5.75} \times 100\% = 64.92\%$$

5. 設有A，C兩個國家，A國國民所得的算術平均數為30000美元，標準差為6000美元；C國國民所得的算術平均數為5000美元，標準差為2500美元。則：

- (1) A國國民所得的變異係數為_____。
- (2) C國國民所得的變異係數為_____。
- (3) 就A，C兩國而言，哪一個國家貧富不均的情形較嚴重？_____。

【解答】(1) 20% (2) 50% (3) C國

【詳解】

$$(1) A國國民所得的變異係數 $CV_S(A) = \frac{6000}{30000} \times 100\% = \frac{1}{5} \times 100\% = 20\%$$$

$$(2) C國國民所得的變異係數 $CV_S(C) = \frac{2500}{5000} \times 100\% = \frac{1}{2} \times 100\% = 50\%$$$

(3) $\because CV_S(C) > CV_S(A) \therefore C$ 國國民貧富不均較為嚴重

6. 若已知一組資料的平均數是80公分，變異係數為10%，則此組資料的標準差是_____。

【解答】8

【詳解】

$$\text{由 } CV_S = \frac{S}{x} \times 100\% \Rightarrow 10\% = \frac{S}{80} \times 100\% \Rightarrow S = 8$$

7. 設有一組資料的總和與平方和分別為 $\sum_{i=1}^{10} x_i = 200$ ， $\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 4090$ ，則此組資料的變異係數 CV_S = _____。(標準差係數)

【解答】15.81%

【詳解】

$$\because \sum_{i=1}^{10} x_i = 200 \quad \therefore \bar{x} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x_i = \frac{200}{10} = 20$$

$$\therefore S_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10} x_i^2 - 10 \cdot (\bar{x})^2}{9}} = \sqrt{\frac{4090 - 10 \times 20^2}{9}} = \sqrt{10} = 3.1623$$

$$\therefore \text{變異係數 } CV_S = \frac{S_x}{\bar{x}} \times 100\% = \frac{3.16523}{20} \times 100\% = 15.81\%$$

8. 二筆同為 n 個數值資料 X 與 Y 滿足 $Y = X + 5$ ， S_1 與 S_2 分別表 X 與 Y 的標準差， CV_1 與 CV_2 分別表 X 與 Y 的變異係數，則 S_1 與 S_2 之大小關係為 _____， CV_1 與 CV_2 的大小關係為 _____。

【解答】 $S_1 = S_2$ ， $CV_1 > CV_2$

【詳解】

$\because \bar{y} = \bar{x} + 5$ ， Y 由 X 平移 5 而得，使 Y 與 X 具有相同的離均差

$\therefore S_1 = S_2$ ，即平移不改變標準差

由 $CV_1 = \frac{S_1}{\bar{x}} \times 100\%$ 及 $CV_2 = \frac{S_2}{\bar{y}} \times 100\%$ ，知 $CV_1 > CV_2$

9. 設 40 位女生的平均身高為 158.2 公分，標準差為 5.3 公分；平均體重為 46.5 公斤，標準差為 4.5 公斤。試比較身高與體重的差異情形。

【解答】體重的差異比身高的差異為大

【詳解】

$$\text{身高的變異係數為 } CV_1 = \frac{5.3}{158.2} \times 100\% = 3.35\%$$

$$\text{體重的變異係數為 } CV_2 = \frac{4.5}{46.5} \times 100\% = 9.68\%$$

因 $CV_2 > CV_1$ ，故體重的差異比身高的差異為大

10. 在 10 個數值中，若前 6 個數值的平均數為 3，標準差為 3；而後 4 個數值的平均數為 8，標準差為 4，則全體數值之標準差 S 為何？又前 6 個數值與後 4 個數值何者較均勻？

【解答】4.12，後 4 者

【詳解】

令前 6 個數值的平方和為 a ，後 4 個數值的平方和為 b 全體 10 個數值的平均數 \bar{x} ，則

$$\bar{x} = \frac{1}{10} (6 \times 3 + 4 \times 8) = 5$$

$$\text{由} \begin{cases} \frac{1}{5}[a - \frac{1}{6}(18)^2] = 9 \\ \frac{1}{3}[b - \frac{1}{4}(32)^2] = 16 \\ S^2 = \frac{1}{9}[a + b - \frac{1}{10}(50)^2] \end{cases}$$

得 $a = 99$, $b = 304$, $S^2 = 17$, $S = \sqrt{17} = 4.12$

又 $CV_1 = \frac{3}{1} \times 100\% = 100\%$, $CV_2 = \frac{4}{8} \times 100\% = 50\%$, $CV_1 > CV_2$, \therefore 後 4 者較均勻

11. 五筆資料(1, 2), (2, 3), (3, 1), (4, 5), (5, 4)表x與y散布圖上的樣本點, 則x與y的相關係數 $r =$ _____, y對x的最適合直線為_____。

【解答】0.6, $\hat{y} = 1.2 + 0.6x$

【詳解】

$$x' = x - \bar{x}, y' = y - \bar{y}, \bar{x} = 3, \bar{y} = 3$$

x	y	x'	y'	x'y'	x'^2	y'^2
1	2	-2	-1	2	4	1
2	3	-1	0	0	1	0
3	1	0	-2	0	0	4
4	5	1	2	2	1	4
5	4	2	1	2	4	1
合計				6	10	10

$$r = \frac{6}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{10}} = 0.6$$

y對x的最適合直線為L時, $L: \hat{y} = \bar{y} + r \cdot \frac{S_Y}{S_X}(x - \bar{x})$

$$S_X = \sqrt{\frac{1}{4} \sum x'^2} = \sqrt{\frac{10}{4}}, S_Y = \sqrt{\frac{1}{4} \sum y'^2} = \sqrt{\frac{10}{4}}$$

$$\text{得 } \hat{y} = 3 + 0.6 \cdot \frac{\sqrt{\frac{10}{4}}}{\sqrt{\frac{10}{4}}}(x - 3), \text{ 即 } \hat{y} = 3 + 0.6(x - 3)$$

12. 下表為 5 位同學的智商與數學的分數統計：

智商	120	112	110	120	103
數學	91	85	79	84	76

則其相關係數 $r =$ _____。

【解答】0.857

【詳解】

將智商減去 110, 數學減去 80 之數值以 x, y 表示, $x' = x - \bar{x}, y' = y - \bar{y}$, 如下表

x	y	x'	y'	$x'y'$	x'^2	y'^2
10	11	7	8	56	49	64
2	5	-1	2	-2	1	4
0	-1	-3	-4	12	9	16
10	4	7	1	7	49	1
-7	-4	-10	-7	70	100	49
$\bar{x}=3$	$\bar{y}=3$			143	208	134

$$r = \frac{\sum x'y'}{\sqrt{\sum x'^2} \cdot \sqrt{\sum y'^2}} = \frac{143}{\sqrt{208}\sqrt{134}} = \sqrt{\frac{143^2}{208 \cdot 134}} = 0.857$$